Thema 1—Die natürlichen Zahlen

Wir bezeichnen mit $\mathbf{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen d.h.

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Falls wir das Nullelement 0 dazu nehmen, dann bezeichnen wir die resultierende Menge mit $\mathbf{N}_0$—also

$$\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

$\mathbf{N}$ wird durch folgende Eigenschaften charakterisiert:
Die Axiome von Peano:

1. $1 \in \mathbf{N}$;
2. Jede natürliche Zahl hat einen eindeutig bestimmten Nachfolger n'.
3. Jede natürliche Zahl n, außer 1, ist der Nachfolger einer eindeutig bestimmten natürlichen Zahl.
4. Sei A eine Teilmenge von $\mathbf{N}$ mit folgenden Eigenschaften:
   (a) $1 \in A$;
   (b) falls $n \in A$, dann $n' \in A$.

   Dann ist $A = \mathbf{N}$.

Eigenschaft 3. wird oft wie folgt ausgedrückt:
Beweisprinzip der mathematischen (oder vollständigen) Induktion
Sei $A(n)$ eine Aussage, die von der natürlichen Zahl n abhängt. Falls

$A(1)$ richtig ist;

für $n \in \mathbf{N}$ gilt: $A(n)$ ist richtig impliziert $A(n')$ ist richtig, dann ist $A(n)$ für jedes $n \in \mathbf{N}$ richtig.

Beweis. Setze $A = \{n \in \mathbf{N} : A(n) \text{ ist richtig}\}$ und verwende Eigenschaft 4).

■

Es gibt verschiedene Varianten dieser Aussage, etwa
Mathematische Induktion — Variante I Sei $A(n)$ eine Aussage, die von der natürlichen Zahl n abhängt. Falls

$A(n_0)$ richtig ist;

für $n \geq n_0$ gilt: Ist $A(n)$ richtig, so auch $A(n')$.

Dann gilt $A(n)$ für jedes $n \geq n_0$.
Beweis. Setze $B(n) = A(n_0 + (n-1))$ und verwende die ursprüngliche Form.

■

Mathematische Induktion — Variante II Sei $A(n)$ eine Aussage, die von der natürlichen Zahl n abhängt. Falls

$A(1)$ richtig ist;

für $n \in \mathbf{N}$ gilt: Sind $A(1), \dots, A(n)$ richtig, so auch $A(n')$.

Dann gilt $A(n)$ für jedes n.

Beweis. Setze $B(n) = A(1)$ und $A(2)$ und $\ldots$ und $A(n)$.

■

Mit Hilfe der mathematischen Induktion definieren wir:

I. Addition: Wir definieren die Summe $m + n$ von zwei natürlichen Zahlen wie folgt:

Für $m \in \mathbf{N}$ definieren wir $m + 1 = m'$;

Für eine natürliche Zahl, die Nachfolger n' der natürlichen Zahl n ist, definieren wir $m + n' := (m + n)'$.

Man sieht dann, daß $m + n$ für jedes n definiert ist (setze

$$A = \{n : m + n \text{ ist definiert}\}).$$

Es gelten, wie erwartet, die bekannten Gesetze:

$m + n = n + m$ $(m, n \in \mathbf{N})$ (Kommutativität);

$m + (n + p) = (m + n) + p$ $(m, n, p \in \mathbf{N})$ (Assoziativität).

Beweis. Wir beweisen die Assoziativität. Dazu verwenden wir Induktion bzgl. p.
Für $p = 1$ ist die Aussage: $(m + n') = m + n'$.
$p \to p + 1$: Es gelte: $m + (n + p) = (m + n) + p$. Dann

$$(m + n) + p' = [(m + n) + p]' = [m + (n + p)]' = m + (n + p)' = m + (n + p').$$

■

II. Multiplikation: Auch das Produkt zweier Zahlen wird rekursiv definiert:

$m.1 = m$ $(m \in \mathbf{N})$;

$m.n' = m.n + m$ $(m, n \in \mathbf{N})$.

Man zeigt, daß mn für jedes Paar m, n definiert ist (wie für $+$).

Wiederum gelten die bekannten Gesetze:

$m \cdot n = n \cdot m$ $(m, n \in \mathbf{N})$;

$m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$ $(m, n, p \in \mathbf{N})$;

$m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$ $(m, n, p \in \mathbf{N})$ (Distributivität);

Notation: Sei a_k eine reelle Zahl für k mit $m \leq k \leq n$. Dann setzt man

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{n} a_k &= a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n \\ \prod_{k=m}^{n} a_k &= a_m . a_{m+1} \ldots a_n . \end{aligned}$$

(Genaugenommen verwendet man wieder Induktion: Z.B. definiert man

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{m} a_k &= a_m \\ \sum_{k=m}^{n'} a_k &= \sum_{k=m}^{n} a_k + a_{n'} . \end{aligned}$$

Setzt man $A = \{n \geq m : \sum_{k=m}^{n} a_k$ ist definiert$\}$, so sieht man, daß $A = \{n : n \geq m\}$).

Die folgenden Sätze werden mit Hilfe der mathematischen Induktion bewiesen:

Satz 1 *Für alle $n \geq 1$ gilt*

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis. Induktion. $n = 1$ ist klar.
$n \to n+1$: Es gelte $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n'} k &= \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + n' \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \frac{1}{2}n'(n'+1). \end{aligned}$$

■

Satz 2 *Für alle $n \geq 1$ gilt*

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2.$$

Beweis. Übung.

■

Schreibweise: Für $n \in \mathbf{N}$ ist

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k.$$

(Wir setzen $0! = 1$.)

Satz 3 *Die Anzahl der möglichen Anordnungen einer n-elementigen Menge $\{a_1, \ldots, a_n\}$ ist $n!$.*

Beweis. Wir beweisen die (formal allgemeinere) Aussage: Seien S, S_1 n-elementige Mengen. Dann gibt es $n!$ Bijektionen von S auf S_1.
Induktion. Der Fall $n = 1$ ist klar.
$n \to n+1$: Wir fixieren eine Element a aus S. Es gibt $n+1$ mögliche Bilder von a in S_1. Für jedes Bild gibt es $n!$ Bijektion—also insgesamt $(n+1)!$.

■

Schreibweise: Für natürliche Zahlen k und n (mit $k \leq n$), sei $\binom{n}{k}$ die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge. (Wir setzen $\binom{n}{k} = 1$, falls $k = 0$.) Es gilt $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{n} = 1$.

Satz 4 *Für $1 \leq k \leq n$ gilt*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Für $0 \leq k \leq n$ gilt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Beweis. Wir zerlegen die Familie der k-elementigen Teilmengen von

$$\{a_1, \ldots, a_n\}$$

in zwei disjunkten Klassen.

a) die Teilmengen, die a_1 enthalten. Es gibt $\binom{n-1}{k-1}$ davon;

b) die Teilmengen, die a_1 nicht enthalten. Es gibt $\binom{n-1}{k}$ davon.

Induktionsbeweis: Für $n = 0$ ist die Aussage richtig.
$n \to n+1$: Es gelte $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{k} &= \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k}\right) \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{n+1}{(n-k+1)k}\right) \\
&= \frac{(n+1)!}{(n-k+1)!k!} = \frac{(n')!}{k!(n'-k)!}.
\end{aligned}$$

∎

Im nächsten Satz verwenden wir den Begriff einer reellen Zahl (vgl. Mittelschulmathematik):

Satz 5 *(Binomischer Lehrsatz.) Seien x, y reelle Zahlen und n eine natürliche Zahl. Dann gilt:*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Beweis. Induktion bezüglich n.
$n = 1$ ist klar.
$n \to n+1$: Es gelte $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$. Dann ist

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n'} &= (x+y)^{n+1} \\
&= (x+y) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n'} \binom{n'-1}{k} x^{n'-k} y^k + \sum_{k=0}^{n'} \binom{n'-1}{k-1} x^{n'-k} y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n'} \left[\binom{n'-1}{k} + \binom{n'-1}{k-1} \right] x^{n'-k} y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n'} \binom{n'}{k} x^{n'-k} y^k.
\end{aligned}$$

(Wir setzen $\binom{n}{k} = 0$, falls $k < 0$).

■

Satz 6 *Für $x \neq 1$ gilt:*

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Beweis. Übung.

■

Übungsbeispiele

1. Beweise:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}.
\end{aligned}$$

2. Zeige: $2^n \geq n^2 \quad (n \geq 4)$.

3. Zeige:

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}.$$

4. (Bernoulli-Ungleichung) Zeige:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad (x \geq -1, n \in \mathbf{N}).$$

5. Seien $x_1, \ldots, x_n$ $(n \geq 2)$ reelle Zahlen (alle positiv oder alle negativ aber > -1). Zeige:
$$(1+x_1)\ldots(1+x_n) > 1 + x_1 + \cdots + x_n.$$

6. Zeige:
$$2^n \leq n! \quad (n \geq 4).$$

7. Seien $m, n \in \mathbf{N}$. Zeige: Es gibt (eindeutig-bestimmte) nichtnegative ganze Zahlen q und r, so daß
$$n = qm + r, \qquad 0 \leq r < m.$$
("Division mit Rest").

8. (Abelsche partielle Summation) Zeige:
$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}),$$
wobei $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

9. Zeige:
$$\binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} - \cdots = 0.$$

10. Zeige:
$$2^{n-1} \leq n! \leq n^n \quad (n \geq 1).$$

Zusätzliche Aufgaben

A. Zeige:
$$N!(N+1)^{n-N} \leq n! \leq N! n^{n-N} \quad (N \geq 1, n \geq N).$$

B. Zeige:
$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!} \quad (k \in \mathbf{N}_0).$$

C. Zeige:
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq 3.$$

D. Zeige:
$$\binom{n}{3} \leq \frac{1}{3} n!.$$

E. Zeige:
$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k}.$$

F. Es gibt
$$\frac{n!}{n_1! \ldots n_k!}$$
Möglichkeiten, $n = n_1 + \cdots + n_k$ Objekte auf k Kästchen $K_1, \ldots, K_k$ so zu verteilen, daß n_1 Objekten in K_1, ..., n_k Objekte in K_k liegen.

G. Sei p das Polynom $t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n$, mit Nullstellen $\lambda_1, \ldots \lambda_n$. Falls $s_k = \sum_i \lambda_i^k$, zeige:

$$ka_k = -\sum_{i=0}^{k-1} a_i s_{k-i}.$$

H. Zeige:

$$\binom{2n}{0} < \binom{2n}{1} < \cdots < \binom{2n}{n}.$$

I. Zeige:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

J. Zeige: $m \cdot n = n \cdot m$ $(m, n \in \mathbf{N})$.

K. Zeige:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}.$$

L. Berechne:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \quad \text{bzw.} \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}.$$

M. Zeige:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{k+j}{j} = \binom{k+n+1}{n}.$$

N. Zeige:

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots = n2^{n-1}.$$

O. Zeige:

$$\sqrt{\frac{\frac{5}{4}}{4n+1}} \leq \frac{1.3.5.\ldots.(2n-1)}{2.4.6.\ldots.2n} \leq \sqrt{\frac{\frac{3}{4}}{2n+1}}.$$

P. Zeige: $\sin n\theta = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2i+1} \sin^{2i+1}\theta \cos^{n-(2i+1)}\theta$

$\cos n\theta = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2i} (-1)^i \sin^{2i}\theta \cos^{n-2i}\theta.$

Q. Zeige: $\frac{d^n}{dx^n}(uv) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} u^{(r)} v^{(n-r)}$.

R. $\frac{d^n}{dx^n} a^x = a^x (\ln a)^n$.

S. $\frac{d^n}{dx^n} \sin x = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$, $\frac{d^n}{dx^n} \cos x = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.