FOURIER REIHEN
VL–Skriptum WS 2003/2004

Konrad Kiener

Vornbuch 4, A–4901 Manning a.H., Österreich. e-mail: konrad.kiener@aon.at

The classical theories of Fourier series and Fourier integrals are a highly developed branch of analysis. They have attracted the best mathematical minds for three centuries and may be regarded as part of the tradition of the human race. E. HEWITT

Inhalt

KAPITEL 1

Trigonometrische Reihen und Fourier–Reihen.

1. Grundlegende Begriffe und Sätze.

Als *Trigonometrische Reihe* bezeichnet man einen Ausdruck der Form

$$\frac{1}{2}\,a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos nx + b_n \sin nx\Big) \tag{1.1}$$

bzw. in der sogenannten komplexen Darstellung

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{1.2}$$

mit den Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots,\quad b_1, b_2, \ldots,\quad c_n \in \mathbf{C}$ und der Variablen $x \in \mathbf{R}$. Der Zusammenhang zwischen beiden Darstellungen ergibt sich aus der Eulerschen Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ und den entsprechenden Formeln für $\cos x$ und $\sin x$. Mit der Setzung $b_0 := 0$ gilt dabei für $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \qquad & c_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \\ a_n &= c_n + c_{-n} & b_n &= i(c_n - c_{-n}) \end{aligned}$$

Weiters gilt

$$a_n, b_n \in \mathbf{R} \quad \Leftrightarrow \quad c_{-n} = \overline{c}_n.$$

Falls $c_{-n} = \overline{c}_n$, dann ist (1.1) eine reine Cosinus–Reihe genau dann, falls alle c_n reell sind und eine reine Sinus–Reihe, falls alle c_n imaginär sind. Falls $a_n, b_n \in \mathbf{R}$, dann läßt sich (1.1) in einer weiteren (und vor allem in der Physik verwendeten) Form anschreiben:

$$\frac{1}{2}\,a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \cos(nx + \alpha_n). \tag{1.3}$$

Dies folgt aus $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ mit den Setzungen

$$\rho_n = ({a_n}^2 + {b_n}^2)^{1/2}, \qquad \cos\alpha_n = a_n/\rho_n, \qquad \sin\alpha_n = -b_n/\rho_n.$$

(Falls $\rho_n = 0$, dann folgt $a_n, b_n = 0$ und wir brauchen auch kein α_n.)

Zu Konvergenz–Untersuchungen betrachtet man meistens die *symmetrischen* Partialsummen

$$S_m(x) = \sum_{|n|\le m} c_n e^{inx} = \frac{1}{2}\,a_0 + \sum_{n=1}^{m}\Big(a_n\cos nx + b_n \sin nx\Big).$$

Eine solche Summe heißt auch *trigonometrisches Polynom* vom Grade höchstens m. Ist $|a_m| + |b_m| > 0$, so heißt m der Grad.

Bemerkung 1.1. Wir werden häufig die Integrale von 2π–periodischen Funktionen über Intervalle der Länge 2π betrachten. Dabei gilt für jede 2π–periodische Funktion $F(x)$ und beliebiges $\alpha \in \mathbf{R}$

$$\int_\alpha^{\alpha+2\pi} F(x)dx = \int_\alpha^{2\pi} F + \int_{2\pi}^{2\pi+\alpha} F = \int_\alpha^{2\pi} F + \int_0^{\alpha} F(x+2\pi)dx =$$
$$= \int_\alpha^{2\pi} F + \int_0^{\alpha} F = \int_0^{2\pi} F(x)dx$$

Wir werden meistens $\alpha = -\pi$ und $\alpha = 0$ verwenden.

Von grundlegender Bedeutung sind die folgenden *Orthogonalitäts–Relationen* der trigonometrischen Funktionen. Sie folgen leicht aus den Eulerschen Formeln $\cos mx = (e^{imx} + e^{-imx})/2, \quad \sin nx = (e^{inx} - e^{-inx})/2i$, sowie der Tatsache

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ilx}dx = \begin{cases} 0 & \text{falls } l \neq 0, \\ 1 & \text{falls } l = 0. \end{cases}$$

l, m, n sind dabei immer ganze Zahlen.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{imx}e^{-inx}dx = \begin{cases} 0 & \text{falls } m \neq n, \\ 1 & \text{falls } m = n. \end{cases} \tag{1.4}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0 & \text{falls } m \neq n, \quad m,n \ge 0, \\ 1/2 & \text{falls } m = n > 0, \\ 1 & \text{falls } m = n = 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0 & \text{falls } m \neq n, \quad m,n \ge 0, \\ 1/2 & \text{falls } m = n > 0, \\ 0 & \text{falls } m = n = 0. \end{cases} \tag{1.6}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx dx = 0 \tag{1.7}$$

Sei

$$f(x) := \sum_{|n|\le m} c_n e^{inx} = \frac{1}{2}\,a_0 + \sum_{n=1}^{m}\Big(a_n \cos nx + b_n \sin nx\Big)$$

ein trigonometrisches Polynom. Dann folgt durch Anwendung von (1.4) und gliedweise Integration für $|k| \le m$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\sum_{|n|\le m} c_n e^{inx}e^{-ikx}\Big)dx =$$

$$= \sum_{|n|\le m} c_n \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ix(n-k)}dx = c_k.$$

Entsprechende Integrationen liefern die Koeffizienten der reellen Darstellung. Zusammenfassend erhalten wir also:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx \\ a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx \\ a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx \end{aligned}$$

Hier sieht man auch, daß der Faktor $1/2$ bei a_0 eingeführt wurde, um die vorige Formel für a_k auch für $k = 0$ zu erreichen.

Diese Formeln legen umgekehrt nahe, einer „beliebigen" Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ durch die vorigen Formeln eine trigonometrische Reihe zuzuordnen und zu untersuchen, inwieweit dadurch f dargestellt werden kann.

Bemerkung 1.2. Da jede trigonometrische Reihe 2π–periodisch ist, muß f jedenfalls auch 2π–periodisch sein.

Die Werte von a_k, b_k, c_k in den obigen Formeln bleiben jedenfalls gleich, wenn wir f an endlich vielen Stellen abändern. „Absolute" Eindeutigkeit können wir also nicht erwarten.

Stellt umgekehrt eine trigonometrische Reihe in irgendeinem (brauchbaren) Sinne $f(x)$ dar, so kann man mit e^{-ikx} multiplizieren und durch gliedweise Integration zu den obigen Formeln für die Koeffizienten gelangen. Dies ist aber beim RIEMANN–Integral nur unter zu einschränkenden Bedingungen möglich.

Wir legen also von jetzt an den LEBESGUEschen Integrationbegriff zugrunde und nehmen von allen auftretenden Funktionen immer 2π–Periodizität an und die Meßbarkeit im LEBESGUEschen oder meist BORELschen Sinne. Zur Erinnerung: eine L–meßbare Funktion stimmt fast überall (f.ü.) mit einer B–meßbaren Funktion überein. 2π–Periodizität bedeutet, daß wir anstelle von auf der additiven Gruppe der reellen Zahlen $\mathbf{R}$ definierten 2π–periodischen Funktionen ebenso von auf dem 1–dimensionalen Torus

$$\mathbf{T} = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\} = \{e^{it} : t \in [0, 2\pi)\} = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$$

definierten Funktionen sprechen können.
Einer 2π–periodischen Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ ist dabei eine Funktion $f_T : \mathbf{T} \to \mathbf{C}$ zugeordnet und umgekehrt mit der Beziehung $f_T(e^{it}) = f(t)$. In Hinkunft werden wir deshalb nicht mehr unterscheiden zwischen f und f_T.

In Sinne der vorigen Bemerkung bezeichnen wir mit $L^1(\mathbf{T})$ die Menge der 2π–periodischen, absolut LEBESGUE–integrablen Funktionen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$. Für $f \in L^1(\mathbf{T})$ setzen wir

$$||f||_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{T}} |f(t)|dt.$$

$L^1(\mathbf{T})$ wird damit zu einem Banach–Raum.
In Hinblick auf die anfangs gegebenen Umrechnungsformeln werden wir von jetzt an meist die komplexe Darstellung (1.2) trigonometrischer Reihen verwenden und anstelle der Variablen $x \in \mathbf{R}$ die Variable t (für **t**orus) verwenden.

Definition 1.1. Zu $f \in L^1(\mathbf{T})$ heißt für $n \in \mathbf{Z}$

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{T}} f(t)e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt \tag{1.8}$$

der n–te FOURIER–Koeffizient von f.

Die FOURIER–Reihe $S(f)$ einer Funktion $f \in L^1(\mathbf{T})$ ist die trigonometrische Reihe

$$S(f)(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{int}. \tag{1.9}$$

Eine trigonometrische Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \tag{1.10}$$

heißt FOURIER–Reihe, falls sie die FOURIER–Reihe einer Funktion $\in L^1(\mathbf{T})$ ist.

Schreiben wir $\hat{f}(n) = |\hat{f}(n)|e^{i\alpha_n}$, dann heißt $\{n : \hat{f}(n) \neq 0\}$ das *Frequenz–Spektrum* und die Folgen $\{|\hat{f}(n)|\}_{n\in\mathbf{Z}}$, $\{|\hat{f}(n)|^2\}_{n\in\mathbf{Z}}$ und $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ heißen respektive das *Amplituden–*, das *Energie–* und das *Phasen–Spektrum* von f.

Die Formel (1.9) besagt zunächst lediglich, daß die Koeffizienten der Reihe entsprechend (1.8) gebildet sind. Sie enthält keine Aussage über die Konvergenz der Reihe oder, im Falle der Konvergenz, über die Gleichheit mit f.

Beispiel 1.1. Für $t \in [0, 2\pi)$ sei $g(t)$ definiert durch $t \mapsto g(t) = \frac{1}{2}(\pi - t)$ und dann 2π–periodisch fortgesetzt. Eine leichte Rechnung ergibt

$$\hat{g}(n) = \frac{1}{2in} \tag{1.11}$$

Daraus folgt sofort $a_n = 0, b_n = 1/n$, die Fourier–Reihe ist also eine reine Sinus–Reihe:

$$S(g)(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nt \tag{1.12}$$

Bemerkung 1.3. Hat eine Funktion $F : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ die Periode $a \neq 0$ (d.h. $F(x + a) = F(x), x \in \mathbf{R}$), so hat $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, definiert durch $f(t) := F(t\frac{a}{2\pi})$ die Periode 2π und daher

$$\begin{aligned}
\hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F\left(\frac{a}{2\pi} t\right) e^{-int} dt = \\
&= \frac{1}{a} \int_0^a F(\tau) e^{-in\frac{2\pi}{a}\tau} d\tau
\end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$S(f)(x) \sim \sum_{n \in \mathbf{Z}} \left(\frac{1}{a} \int_0^a F(\tau) e^{-in\frac{2\pi}{a}\tau} d\tau \right) e^{in\frac{2\pi}{a}x} \tag{1.13}$$

Der Vollständigkeit halber und wegen der üblichen Verwendung in der Physik hier noch die Formeln für die reelle Darstellung:

$$\begin{aligned}
S(F)(t) &\sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi}{a} nt + b_n \sin \frac{2\pi}{a} nt \right) \quad \text{mit} \\
a_n &= \frac{2}{a} \int_0^a F(\tau) \cos \frac{2\pi}{a} n\tau d\tau \\
b_n &= \frac{2}{a} \int_0^a F(\tau) \sin \frac{2\pi}{a} n\tau d\tau.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Bemerkung 1.4. Ist $f \in L^1(\mathbf{T})$ gerade (d.h. $f(t) = f(-t)$), so ist $S(f)$ eine reine cos–Reihe. Ist f ungerade (d.h. $f(t) = -f(-t)$), so ist $S(f)$ eine reine sin–Reihe (Beispiel 1.1).

Es folgen nun einige einfache Sätze und weitere Bemerkungen.

Zu $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ und $\alpha \in \mathbf{R}$ sei die *Rechtsverschiebung* $f_\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ definiert durch $f_\alpha(t) := f(t - \alpha)$. Zu $m \in \mathbf{Z}$ bezeichne e_m die Abbildung $e_m(t) = e^{imt}$.

SATZ 1.1. *Seien* $f, g \in L^1(\mathbf{T})$, $c \in \mathbf{C}$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $m, n \in \mathbf{Z}$ *und* $e_m(x) = e^{imx}$. *Dann gelten folgende Formeln:*

$$
\begin{aligned}
(e_m \cdot f)\,\hat{}\,(n) &= \hat{f}(n-m) \\
(f+g)\,\hat{}\,(n) &= \hat{f}(n) + \hat{g}(n) \\
(cf)\,\hat{}\,(n) &= c\hat{f}(n) \\
\hat{\bar{f}}(n) &= \overline{\hat{f}(-n)} \\
\hat{f}_\alpha(n) &= e^{-in\alpha}\hat{f}(n) \\
|\hat{f}(n)| &\leq ||f||_1
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

BEWEIS. Nur für die vorletzte Formel:

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_\alpha(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-\alpha)e^{-int}dt &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-\alpha)e^{-in(t-\alpha)}e^{-in\alpha}d(t-\alpha) \\
&= e^{-in\alpha}\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{-\alpha+2\pi} f(t)e^{-int}dt = e^{-in\alpha}\hat{f}(n).
\end{aligned}
$$

□

SATZ 1.2. *a) Sei* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ 2π*–periodisch und absolut stetig mit* L^1*–Ableitung* f'. *Dann ist auch* f' 2π*–periodisch und* $(f')\,\hat{}\,(n) = in\hat{f}(n)$.

b) Ist $f \in L^1(\mathbf{T})$ *und* $\hat{f}(0) = 0$, *dann ist* $F(t) := \int_0^t f(\tau)d\tau$ 2π*–periodisch, absolut stetig und* $\hat{F}(n) = \frac{1}{in}\hat{f}(n)$ $(n \neq 0)$.

BEWEIS. a) folgt durch partielle Intergation

$$
\begin{aligned}
(f')\,\hat{}\,(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-int}dt = \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big[f(t)e^{-int}\Big]_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(in)e^{-int}dt = (in)\hat{f}(n).
\end{aligned}
$$

b) Die Periodizität von F folgt aus

$$
F(t+2\pi) - F(t) = \int_t^{t+2\pi} f(\tau)d\tau = 2\pi\hat{f}(0).
$$

Da F absolut stetig ist mit der L^1–Ableitung f, folgt die Behauptung nun aus a). □

FOLGERUNG 1.3. *a) Falls für* $f_j \in L^1(\mathbf{T})$ $||f_j - f||_1 \to 0$, $(j \to \infty)$ *(die Folge ist also* L^1*–konvergent), dann gilt gleichmäßig für* $n \in \mathbf{Z}$ $\hat{f}_j(n) \to \hat{f}(n)$.

b) Gilt für die Teilsummen s_m einer trigonometrischen Reihe $R \sim \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{int}$ $||s_m - g||_1 \to 0$, so ist die Reihe die Fourierreihe von g, in Zeichen $R = S(g)$. Dies ist insbesondere der Fall, wenn $s_m(t) \to g(t)$ gleichmäßig.

c) Sind die Teilsummen s_m einer trigonometrischen Reihe $R \sim \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{int}$ durch eine über $[0, 2\pi)$ integrable Funktion beschränkt und gilt $s_m(t) \to g(t)$ fast überall, so ist die Reihe $S(g)$.

Beweis. a) folgt unmittelbar aus $|\hat{f}_j(n) - \hat{f}(n)| = |(f_j - f)\,\hat{}\,(n)| \leq ||f_j - f||_1$.

In b) folgt direkt und in c) durch Anwendung des Lebesgueschen Satzes über dominierte Konvergenz für $m \geq n$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)e^{-int}dt = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} s_m(t)e^{-int}dt = c_n.$$

□

2. Faltung.

Wir kommen nun zu einem zentralen Begriff der harmonischen Analysis und der Analysis überhaupt.

Satz 2.1. *Seien $f, g \in L^1(\mathbf{T})$. Für fast alle t ist die Funktion $\tau \mapsto f(t-\tau)g(\tau)$ 2π–periodisch und über $[0, 2\pi)$ integrabel:*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big|f(t-\tau)g(\tau)\Big|d\tau < \infty$$

Definieren wir für solche t die Funktion $h : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ durch

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

und $h(t) = 0$ sonst, so ist $h \in L^1(\mathbf{T})$ und es gilt

$$||h||_1 \leq ||f||_1 ||g||_1$$

Weiters gilt

$$\hat{h}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n) \quad (n \in \mathbf{Z}).$$

Beweis. Da die L^1–Funktionen f, g f.ü. mit Borel–meßbaren Funktionen f_0, g_0 übereinstimmen und sich die vorigen Integrale bei einer entsprechenden Ersetzung nicht ändern, da die Zusammensetzung stetiger mit Borel–meßbaren Funktionen sowie das Produkt von Borel–meßbaren Funktionen wieder Borel–meßbar sind, da die Addition (Subtraktion) auf $\mathbf{R}$, also die Abbildung $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \ni (t, \tau) \mapsto t - \tau \in \mathbf{R}$ stetig ist, folgt die

Borel–Meßbarkeit der Abbildung $F : (t,\tau) \mapsto f(t-\tau)g(\tau)$. Wegen der Translationsinvarianz des Lebesgue–Integrals gilt dann

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} d\tau \int_0^{2\pi} |f(t-\tau)g(\tau)|dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(\tau)|d\tau\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t-\tau|dt\right) = ||f||_1||g||_1.$$

Somit ist $F \in L^1\Big([0,2\pi)\times[0,2\pi)\Big)$ und der Satz von Fubini impliziert die Existenz von $h(t)$ f.ü. Damit gilt

$$||h||_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right| \leq$$
$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t-\tau)g(\tau)|d\tau\right) = ||f||_1||g||_1.$$

Wegen $|e^{-int}| = 1$ können wir Fubini anwenden und erhalten

$$\hat{h}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(t)e^{-int}dt = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-\tau)g(\tau)e^{-in(t-\tau)}e^{-in\tau}dtd\tau =$$
$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\left(\int_{-\tau}^{2\pi-\tau} f(t)e^{-int}dt\right)g(\tau)e^{-in\tau}d\tau = \hat{f}(n)\hat{g}(n).$$

$\square$

Definition 2.1. Zu $f, g \in L^1(\mathbf{T})$ heißt

$$f * g(t) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-\tau)g(\tau)d\tau \tag{2.1}$$

die *Faltung* von f und g.

Es gelten also die Formeln

$$||f * g||_1 \leq ||f||_1||g||_1 \tag{2.2}$$

$$(f * g)\hat{}\,(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n) \quad (n \in \mathbf{Z}). \tag{2.3}$$

Bemerkung 2.1. Falls G eine endliche abelsche Gruppe und f, g auf G definierte, komplexwertige Funktionen sind, so definiert man analog $f * g : G \to \mathbf{C}$ durch

$$f * g(x) = \frac{1}{|G|}\sum_{y\in G} f(x-y)g(y).$$

Sind z.B. $f = \chi_A, g = \chi_B$ die Indikatorfunktionen der Teilmengen $A, B \subset G$, dann rechnet man sofort nach

$$\chi_A * \chi_B(x) = \frac{1}{|G|}|A \cap (x-B)| = \frac{1}{|G|}|(x-A)\cap B|.$$

Hier bedeutet $|X|$ die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge X. Ist insbesondere $A = \{a\}$, so erhält man $|G|\,\chi_A * \chi_B(x) = |(x-a) \cap B| = \chi_{a+B}$ und damit

$$\chi_A * \chi_B(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in A} \chi_{a+B}(x). \tag{2.4}$$

Aus der obigen Formel sieht man, daß das Faltungsprodukt eine Linearkombination von Translaten der einen Funktion mit Werten der anderen als Koeffizienten ist.

In einer sehr allgemeinen Betrachtung ist dann G eine abelsche Gruppe, die zugleich eine lokalkompakte Topologie besitzt, bezüglich der die Addition stetig ist (das wichtigste Beispiel ist $\mathbf{R}$). Es zeigt sich, daß hier ein im wesentlichen eindeutiges, translationsinvariantes Maß μ existiert (das sogenannte *Haarsche Maß*), analog dem Lebesgue–Maß. Damit definiert man analog den Bananchraum

$$L^1(G) = \left\{ f : G \to \mathbf{C} : \int_G |f(x)|\mu(dx) < \infty \right\}$$

und zu $f, g \in L^1(G)$ das Faltungsprodukt

$$f * g(x) = \int_G f(x-y)g(y)\mu(dy).$$

$L^1(G)$ ist die sogenannte *Gruppenalgebra* von G. Im obigen Fall der endlichen Gruppe ist das Haarsche Maß einfach das Zählmaß mit der (normierten) Integration

$$f \mapsto I(f) := \int_G f(x)\mu(dx) := \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x).$$

SATZ 2.2. *Für $f \in L^1(\mathbf{T})$ und ein trigonometrisches Polynom $k(t) = \sum_{-N}^{N} a_n e^{int}$ gilt*

$$k * f(t) = \sum_{-N}^{N} a_n \hat{f}(n) e^{int} \tag{2.5}$$

(Da nur die Frequenzen des Polynoms übrig bleiben, spricht man von einer Filterung.*)*

BEWEIS. Falls $k(t) = e^{int}$, dann gilt die Formel, da nun

$$k * f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in(t-\tau)} f(\tau) d\tau = e^{int} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) e^{-in\tau} d\tau.$$

Aus der Linearität des Integrals folgt der allgemeine Fall. □

FOLGERUNG 2.3. *Speziell für $k(t) = D_N(t) := \sum_{-N}^{N} e^{int}$ gilt für beliebiges $f \in L^1(\mathbf{T})$*

$$S_N(f)(t) = \sum_{-N}^{N} \hat{f}(n) e^{int} = (D_N * f)(t). \tag{2.6}$$

Die Folge $\{D_N\}$ heißt der DIRICHLET–Kern.

SATZ 2.4. *Für beliebige $f, g, h \in L^1(\mathbf{T})$ und $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ gilt*

$$\begin{aligned} & f * g = g * f \\ & (f * g) * h = f * (g * h) \\ & f * (g + h) = f * g + f * h \\ & (f * g)_\alpha = f_\alpha * g = f * g_\alpha \\ & f_\alpha * g_\beta = (f * g)_{\alpha+\beta}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

BEWEIS. Wir setzen $\theta = t - \tau$ und erhalten

$$\begin{aligned} f * g(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t-\tau) g(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_t^{t-2\pi} f(\theta) g(t-\theta) d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) g(t-\theta) d\theta = g * f(t) \end{aligned}$$

Die Distributivität der Faltung folgt aus jener der gewöhnlichen Multiplikation und der Linearität des Integrals.

$$\begin{aligned} (f * g) * h(t) &= \frac{1}{4\pi^2} \int \int f(t-u-v) g(u) h(v) du dv = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int \int f(t-r) g(r-s) h(s) ds dr = f * (g * h)(t) \end{aligned}$$

□

Der Banachraum $L^1(\mathbf{T})$ wird also mit der Faltung als Multiplikation zu einer kommutativen Algebra und ist damit eine sogenannte *Banach–Algebra*.

BEMERKUNG 2.2. $L^1(\mathbf{T})$ hat kein 1–Element bezüglich der Multiplikation.
Dies sehen wir mit Vorgriff auf das spätere Riemann–Lebesgue–Lemma leicht ein:
Angenommen, es existiert ein $f \in L^1(\mathbf{T})$, sodaß für alle $g \in L^1(\mathbf{T})$ gilt $f * g = g$. Dann folgt nach (2.1) $\hat{f}(n)\hat{g}(n) = \hat{g}(n)$. Wählen wir insbesondere $g(t) = e^{int}$, dann ist $\hat{g}(n) = 1$ und daher auch $\hat{f}(n) = 1$ für alle $n \in \mathbf{Z}$. Dies widerspricht dem Riemann–Lebesgue–Lemma, wonach die Fourierkoeffizienten einer $L^1(\mathbf{T})$–Funktion gegen 0 gehen.

SATZ 2.5. *a) Seien $f \in L^1(\mathbf{T})$ und $\tau \in \mathbf{T}$. Dann gilt*

$$f_\tau : t \mapsto f(t-\tau) \in L^1(\mathbf{T}) \quad \text{und} \quad ||f_\tau||_1 = ||f||_1.$$

b) Die $L^1(\mathbf{T})$-wertige Abbildung $\tau \mapsto f_\tau$ ist stetig auf $L^1(\mathbf{T})$, d.h.: für alle $f \in L^1(\mathbf{T})$ und $\tau_0 \in \mathbf{T}$ gilt

$$\lim_{\tau \to \tau_0} ||f_\tau - f_{\tau_0}||_1 = 0.$$

BEWEIS. a) folgt unmittelbar aus der Translations–Invarianz des Lebesgue–Maßes dt. Zum Beweis von b) bemerken wir zunächst, daß die Aussage richtig ist für stetige f. Die stetigen Funktionen liegen dicht in $L^1(\mathbf{T})$. Zu $f \in L^1(\mathbf{T})$ und $\epsilon > 0$ wählen wir dann ein stetiges g mit $||f-g||_1 < \epsilon/2$. Dann folgt

$$\begin{aligned} ||f_\tau - f_{\tau_0}||_1 &\leq ||f_\tau - g_\tau||_1 + ||g_\tau - g_{\tau_0}||_1 + ||g_{\tau_0} - f_{\tau_0}||_1 = \\ &= ||(f-g)_\tau||_1 + ||g_\tau - g_{\tau_0}||_1 + ||(g-f)_{\tau_0}||_1 < \epsilon + ||g_\tau - g_{\tau_0}||_1. \end{aligned}$$

Daraus folgt $\limsup_{\tau\to\tau_0} ||f_\tau - f_{\tau_0}||_1 < \epsilon$. ϵ war beliebig, also gilt b). □

Die vorigen Eigenschaften a)(die Translations–Invarianz) b)(die Stetigkeit der Translation) teilt $L^1(\mathbf{T})$ mit einigen wichtigen seiner Teilräume.

DEFINITION 2.2. Ein *homogener Banachraum* auf $\mathbf{T}$ ist ein linearer Teilraum B von $L^1(\mathbf{T})$ mit einer Norm $||\ ||_B \geq ||\ ||_1$ (die Einbettung von B in $L^1(\mathbf{T})$ ist also stetig), bezüglich der er ein Banach–Raum ist und folgende Eigenschaften hat:

(H1) Für $f \in B$ und $\tau \in \mathbf{T}$ ist $f_\tau \in B$ und $||f_\tau||_B = ||f||_B$.

(H2) Für alle $f \in B$, $\quad \tau, \tau_0 \in \mathbf{T}$, $\quad \lim_{\tau\to\tau_0} ||f_\tau - f_{\tau_0}||_B = 0$.

Beispiele homogener Räume sind:

a) $C(\mathbf{T})$, der Raum der stetigen 2π–periodischen Funktionen mit der Norm

$$||f||_\infty = \max_t |f(t)| \tag{2.8}$$

b) $C^n(\mathbf{T})$, der Teilraum der 2π–periodischen, n–mal stetig differenzierbaren Funktionen mit der Norm

$$||f||_{C^n} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \max_t |f^{(j)}(t)|. \tag{2.9}$$

c) $L^p(\mathbf{T})$, $\quad 1 \leq p < \infty$, der Teilraum von $L^1(\mathbf{T})$, bestehend aus allen Funktionen f, für die $\int |f(t)|^p dt < \infty$ mit der Norm

$$||f||_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt\right)^{1/p}. \tag{2.10}$$

BEMERKUNG 2.3. Wir sehen, daß in einem homogenen Banach–Raum B und für $f \in B$ die Abbildung $\phi : \tau \mapsto f_\tau$ eine stetige Abbildung $\phi : \mathbf{T} \to B$ ist mit $\phi(0) = f$. Im Folgenden benötigen wir den Begriff des Riemann–Integrals einer auf $\mathbf{T}$ definierten, Vektor–wertigen (mit Werten in einem Banach–Raum) und stetigen Funktion. Dies ist gleichbedeutend mit dem Integral einer auf $\mathbf{R}$ definierten, 2π–periodischen solchen Funktion. Das Integral wird genauso als Grenzwert der Riemann–Summen definiert, dessen Existenz wegen der Vollständigkeit gesichert ist und wobei man im „reellen“ Beweis den Absolutbetrag in $\mathbf{R}$ durch die Norm in B ersetzt und alles übrige wörtlich überträgt. Falls der Banachraum endlich–dimensional ist, dann bedeutet die Integration einer Vektorfunktion natürlich komponentenweise Integration.

DEFINITION 2.3. Zu stetigem $F : [a, b] \to B$ definiert man

$$\int_a^b F(x)dx = \lim \sum_{j=1}^{N} (x_{j+1} - x_j)F(x_j) \tag{2.11}$$

wobei

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N+1} = b.$$

Dabei wird der Limes über alle Zerlegungen $\{x_j\}_1^N$ des endlichen Intervalles $[a, b]$ genommen, deren Feinheit $\max_{0 \le j \le N}(x_{j+1} - x_j) \to 0$ für $N \to \infty$.

LEMMA 2.6. *Seien $k : \mathbf{T} \to \mathbf{C}$ stetig und $f \in L^1(\mathbf{T})$. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k(\tau) f_\tau d\tau = k * f. \tag{2.12}$$

BEWEIS. Nehmen wir zunächst f als stetig an. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k(\tau) f_\tau d\tau = \frac{1}{2\pi} \lim \sum_j (\tau_{j+1} - \tau_j) k(\tau_j) f_{\tau_j}, \tag{2.13}$$

wobei der Limes in der $L^1(\mathbf{T})$–Norm genommen wird und die Zerlegung $\{\tau_j\}$ von $[0, 2\pi)$ feiner und feiner wird. Andererseits gilt für stetiges f gleichmäßig in t

$$\frac{1}{2\pi} \lim \sum_j (\tau_{j+1} - \tau_j) k(\tau_j) f(t - \tau_j) = (k * f)(t).$$

Das Lemma ist daher für stetige f gezeigt. Sei nun $f \in L^1(\mathbf{T})$ beliebig und $\epsilon > 0$. Wählt man g stetig so, daß $||g - f||_1 < \epsilon$, dann gilt nach dem schon Bewiesenen

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k(\tau) f_\tau \, d\tau - k * f = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k(\tau)(f - g)_\tau \, d\tau + k * (g - f)$$

und daher

$$\left|\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k(\tau) f_\tau \, d\tau - k * f \right|\right|_1 \le 2||k||_1 \epsilon.$$

□

Der folgende Satz zeigt, daß das Faltungsprodukt die Eigenschaften des „besseren" Teiles erbt.

SATZ 2.7. *Sei B ein homogener Banach–Raum im Sinne von Definition 2.2.*
Seien $g \in L^1(\mathbf{T}), f \in B$. Dann liegt $g * f$ im Abschluß des linearen Teilraumes der endlichen Linearkombinationen von Translaten von f, gehört also zu B und es gilt

$$||g * f||_B \le ||g||_1 ||f||_B. \tag{2.14}$$

Insbesondere gelten die Aussagen für $B = L^1(\mathbf{T})$.

Beweis. Sei zunächst g stetig. Sei $\overline{V_f}$ der Abschluß in B des linearen Teilraumes V_f der endlichen Linearkombinationen von Translaten von f, also von Summen der Form $\sum_1^N c_i f_{\tau_i}$ mit $c_i \in \mathbf{C}, \tau_i \in [0, 2\pi)$. Falls g stetig ist, dann enthält V_f die Ausdrücke der Form

$$\frac{1}{2\pi} \sum_j (\tau_{j+1} - \tau_j) g(\tau_j) f_{\tau_j} \tag{2.15}$$

Deren Grenzwert in B (und damit in $\overline{V_f}$) mit zunehmender Verfeinerung der Unterteilung $\{\tau_j\}$ ist

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\tau) f_\tau \, d\tau$$

Wegen $|| \, ||_B \geq || \, ||_1$ ist dieser B–Limes gleich dem $L^1(\mathbf{T})$–Limes und nach dem vorigen Lemma ist dieser gleich $g * f$. Durch Anwendung der B–Norm auf (2.15) und Berücksichtigung der Tatsache $||f_\tau||_B = ||f||_B$ folgt

$$||g * f||_B = \left|\left| \lim \frac{1}{2\pi} \sum_j (\tau_{j+1} - \tau_j) g(\tau_j) f_{\tau_j} \right|\right|_B = \lim \left|\left| \frac{1}{2\pi} \sum_j (\tau_{j+1} - \tau_j) g(\tau_j) f_{\tau_j} \right|\right|_B \leq$$
$$\leq ||f||_B \frac{1}{2\pi} \lim \sum_j (\tau_{j+1} - \tau_j) |g(\tau_j)| = ||g||_1 ||f||_B.$$

Damit ist der Satz für stetiges g gezeigt. Die lineare Abbildung $T_f : L^1(\mathbf{T}) \supset C(\mathbf{T}) \to B$, definiert durch $T_f : g \mapsto g * f$ ist also beschränkt durch $||f||_B$. Sei nun $g \in L^1(\mathbf{T})$ beliebig. Wir wählen eine Folge von stetigen g_n mit $g_n \to g$ $(L^1(\mathbf{T}))$. Dann ist $\{g_n * f\}$ Cauchy–Folge in B (mit Grenzwert, sagen wir F) und damit auch in $L^1(\mathbf{T})$. Hier ist der Grenzwert gleich $g * f$. Also gilt auch $F = g * f \in B$. Weiters gilt

$$||F||_B = \lim ||g_n * f||_B \leq ||f||_B \lim ||g_n||_1 = ||f||_B ||g||_1.$$

□

KAPITEL 2

Summierbarkeit und Konvergenz.

1. Summationskerne.

Wir sahen in Kap. 1, Bemerkung 2.2, daß $L^1(\mathbf{T})$ kein 1–Element bezüglich der Faltung hat. Allerdings gibt es *approximative* Einheiten.

DEFINITION 1.1. Ein *Summationskern* (oder *approximative Einheit*) ist eine Folge stetiger, 2π–periodischer Funktionen $\{k_n\}$, für die gilt:

$$(1.1)\qquad \begin{aligned} &(S1) \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_n(t)dt = 1 \\ &(S2) \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |k_n(t)|dt \leq \text{const} \end{aligned}$$

Für alle $0 < \delta < \pi$ gilt

$$(1.2)\qquad (S3) \quad \lim_{n\to\infty}\int_\delta^{2\pi-\delta} |k_n(t)|dt = 0$$

Ein Summationskern $\{k_n\}$ heißt *positiv*, falls für alle t und alle n gilt $k_n(t) \geq 0$.

LEMMA 1.1. *Sei B ein Banach–Raum, ϕ eine stetige B–wertige Funktion auf $\mathbf{T}$ und $\{k_n\}$ ein Summationskern. Dann gilt*

$$(1.3)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_n(\tau)\phi(\tau)\,d\tau = \phi(0).$$

BEWEIS. Wegen (S1) gilt für $0 < \delta < \pi$

$$(1.4)\qquad \begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_n(\tau)\phi(\tau)\,d\tau - \phi(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_n(\tau)(\phi(\tau)-\phi(0))\,d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} k_n(\tau)(\phi(\tau)-\phi(0))\,d\tau + \frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta} k_n(\tau)(\phi(\tau)-\phi(0))\,d\tau. \end{aligned}$$

Die Größe des ersten Summanden kontrollieren wir durch die Stetigkeit von ϕ, die des zweiten durch die Limes–Eigenschaft des Kernes:

$$(1.5)\qquad \left|\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} k_n(\tau)(\phi(\tau)-\phi(0))\,d\tau\right|\right|_B \leq \max_{|\tau|\leq\delta} ||\phi(\tau)-\phi(0)||_B|\,|k_n||_1.$$

$$\left\|\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta} k_n(\tau)(\phi(\tau)-\phi(0))\,d\tau\right\|_B \le \max_{\tau\in\mathbf{T}}\|\phi(\tau)-\phi(0)\|_B\,\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta}|k_n(\tau)|\,d\tau. \tag{1.6}$$

Aus (S2) und der Stetigkeit von ϕ bei $\tau = 0$ bestimmen wir zu gegebenem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so, daß (1.5) durch ϵ beschränkt bleibt. Mit diesem δ folgt aus (S3), daß (1.6) gegen 0 geht mit $n \to \infty$. Damit wird (1.4) beschränkt durch 2ϵ für große n. □

SATZ 1.2. *Sei B ein homogener Banach–Raum auf $\mathbf{T}$, sei $f \in B$ und $\{k_n\}$ ein Summationskern. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty}\|k_n * f - f\|_B = 0$$

BEWEIS. Wegen $\|\ \|_B \ge \|\ \|_1$ ist das B–wertige Integral $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_n(\tau)f_\tau\,d\tau$ gleich dem $L^1(\mathbf{T})$–wertigen Integral, also gleich $k_n * f$ nach Kap. 1, Lemma (2.6). Die Behauptung folgt nun aus dem vorigen Lemma, indem wir $\phi(\tau) = f_\tau$ setzen. Dann ist $\phi(0) = f$ und ϕ ist stetig nach der Definition eines homogenen Raumes. □

Für den in Kap. 1, Folgerung 2.3 definierten Dirichlet–Kern $\{D_n\}$ gilt, wie wir schon wissen, mit $f \in L^1(\mathbf{T})$

$$S_n(f)(t) = \sum_{-n}^{n}\hat{f}(j)e^{ijt} = (D_n * f)(t).$$

Aus der Eulerschen Formel folgt leicht

$$D_n(t) = \sum_{-n}^{n} e^{ijt} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin(\frac{1}{2}t)} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos kt. \tag{1.7}$$

$\{D_n\}$ erfüllt zwar (S1), jedoch weder (S2) noch (S3), ist also *kein* Summationskern. Nimmt man jedoch anstelle der Partialsummen der Fourier–Reihe die *arithmetischen Mittel*

$$\sigma_n(f) := \frac{1}{n+1}\Big(S_0(f) + S_1(f) + \cdots + S_n(f)\Big), \tag{1.8}$$

dann gilt

$$\sigma_n(f)(t) = \sum_{-n}^{n}\left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right)\hat{f}(j)e^{ijt} = (\mathbf{K}_n * f)(t). \tag{1.9}$$

Hier haben wir die übliche Schreibweise verwendet

$$\mathbf{K}_n(t) = \sum_{j=-n}^{n}\left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right)e^{ijt}. \tag{1.10}$$

$\{\mathbf{K}_n\}$ ist der sogenannte *FEJER–Kern.* Dies ist der wichtigste Summationskern. $\mathbf{K}_n$ erfüllt klarer weise (S1). Da er positiv ist, folgt (S2) aus (S1). $\mathbf{K}_n \ge 0$ und (S3) folgen aus

LEMMA 1.3.

$$\mathbf{K}_n(t) = \frac{1}{n+1}\left\{\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}\right\}^2. \tag{1.11}$$

Daraus folgt auch die Symmetrie

$$\mathbf{K}_n(t) = \mathbf{K}_n(-t) \tag{1.12}$$

und (mehr als (S3))

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{0<\delta\le t\le 2\pi-\delta}\mathbf{K}_n(t)\right) = 0. \tag{1.13}$$

BEWEIS. Es gilt

$$\sin^2\frac{t}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos t) = -\frac{1}{4}e^{-it} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{it}.$$

Durch Ausmultiplizieren rechnet man direkt nach

$$\left(-\frac{1}{4}e^{-it} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{it}\right)\sum_{j=-n}^{n}\left(1-\frac{|j|}{n+1}\right)e^{ijt} =$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(-\frac{1}{4}e^{-i(n+1)t} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{i(n+1)t}\right).$$

□

SATZ 1.4. *Sei B ein homogener Banach–Raum auf $\mathbf{T}$. Dann sind die in B enthaltenen trigonometrischen Polynome überall dicht in B.*

BEWEIS. Für beliebiges $f \in B$ gilt: $\sigma_n(f) \in B$ (warum?) und $B - \lim \sigma_n(f) = f$. □

FOLGERUNG 1.5 (Approximationssatz von Weierstraß). *Jede stetige, 2π–periodische Funktion kann gleichmäßig durch trigonometrische Polynome approximiert werden.*

SATZ 1.6. *[Vollständigkeit des trig. Systems. Eindeutigkeitssatz]*
Sei $f \in L^1(\mathbf{T})$ und $\hat{f}(n) = 0$ für alle $n \in \mathbf{Z}$. Dann ist $f = 0$ f.ü.
Äquivalent dazu: Falls für $f, g \in L^1(\mathbf{T})$ alle Fourierkoeffizienten gleich sind, dann gilt $f = g$ f.ü.

BEWEIS. Aus (1.9) folgt $\sigma_n(f) = 0$ für alle $n \in \mathbf{Z}$. Wegen $\sigma_n(f) \to f$ $(L^1(\mathbf{T}))$ folgt $f = 0$. □

SATZ 1.7. *[Riemann–Lebesgue–Lemma] Sei $f \in L^1(\mathbf{T})$. Dann $\lim_{|n|\to\infty}\hat{f}(n) = 0$.*

BEWEIS. Zu $\epsilon > 0$ sei P ein trigonometrisches Polynom mit $||f-P||_1 < \epsilon$. Falls $|n| >$ Grad von P, dann

$$|\hat{f}(n)| = |(f-P)\hat{\ }(n)| \le ||f-P||_1 < \epsilon.$$

$\square$

BEMERKUNG 1.1. Für spätere Zwecke benötigen wir folgende Verallgemeinerung: Das Riemann–Lebesgue–Lemma gilt gleichmäßig für kompakte Teilmengen von $L^1(\mathbf{T})$.

Ist nämlich K kompakt in $L^1(\mathbf{T})$ und $\epsilon > 0$, dann gibt es endlich viele trig. Polynome $P_1, \ldots, P_N$, sodaß für alle $f \in K$ gilt $||f - P_j||_1 < \epsilon$ mit einem geeigneten $1 \leq j \leq N$. Falls nun $|n| > \max_{1 \leq j \leq N} \mathrm{grad} P_j$, dann gilt für alle $f \in K$: $|\hat{f}(n)| < \epsilon$.

Bezeichne, wie üblich, $c_0(\mathbf{Z})$ den Banach–Raum der komplexen Folgen $a = \{a_n\}_{-\infty}^{\infty}$, für die $\lim_{|n| \to \infty} a_n = 0$, versehen mit der Norm

$$||a||_\infty = \sup\{|a_n| : n \in \mathbf{Z}\}, \tag{1.14}$$

dann folgt aus Kap. 1, (1.15) und dem Riemann–Lebesgue–Lemma,
daß die Fourier–Transformation eine stetige, lineare Abbildung

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbf{T}) \to c_0(\mathbf{Z}) \quad \text{definiert durch} \quad \mathcal{F}(f) = \{\hat{f}(n)\}$$

ist. Die Bildmenge bezeichnet man üblicherweise mit $A(\mathbf{Z})$ ($\subset c_0(\mathbf{Z})$). Aus dem Eindeutigkeitssatz folgt, daß diese Abbildung injektiv ist. Die somit existierende Umkehrabbildung $A(\mathbf{Z}) \to L^1(\mathbf{T})$ ist daher abgeschlossen. Davon machen wir später Gebrauch bei der Untersuchung der *konjugierten* Reihe im Zusammenhang der Norm–Konvergenz einer Fourier–Reihe.

Weitere Summationskerne sind

(1) $k_n(t) = n\chi_{[0, 2\pi/n]}$.

(2) Der *de la Vallée Poussin*–Kern

$$\mathbf{V}_n(t) = 2\mathbf{K}_{2n+1}(t) - \mathbf{K}_n(t). \tag{1.15}$$

(S1), (S2) und (S3) folgen unmittelbar aus der Definition. $\mathbf{V}_n$ ist Polynom vom Grad $2n+1$ mit der Eigenschaft, daß $\hat{\mathbf{V}}_n(j) = 1$ für $|j| \leq n+1$. Daher stimmen in $\mathbf{V}_n * f$ jedenfalls die Koeffizienten bis zum Index $|j| \leq n+1$ mit denen von f überein.

(3) Der *Poisson*– oder *Abel*–Kern ist ein Summationskern mit kontinuierlichem Parameter $0 \leq r < 1$:

$$\mathbf{P}(r,t) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} r^{|j|} e^{ijt} = 1 + 2\sum_{j=1}^{\infty} r^j \cos jt = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos t + r^2} = \mathrm{Re}\left(\frac{1 + re^{it}}{1 - re^{it}}\right). \tag{1.16}$$

Da die Reihen in (1.16) gleichmäßig konvergieren, folgt durch Grenzübergang bei Anwendung des Satzes von Lebesgue über dominierte Konvergenz aus Kap. 1, (2.5)

$$f(r,t) := \mathbf{P}(r, .) * f(t) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \hat{f}(j) r^{|j|} e^{ijt}. \tag{1.17}$$

Es ist $\mathbf{P}(r,t) = \mathbf{P}(r,-t)$ und $\mathbf{P}(0,t) = 1$ für alle $t \in [0,\pi)$.
Weiters ist für $0 < r < 1$ und $t \uparrow \pi$

$$\frac{1+r}{1-r} = \mathbf{P}(r,0) > \mathbf{P}(r,t) \downarrow \mathbf{P}(r,\pi) = \frac{1-r}{1+r} > 0. \tag{1.18}$$

Der Poisson–Kern verbindet die Theorie der trigonometrischen Reihen mit jener der analytischen Funktionen.

Der Vollständigkeit halber seien hier noch die wichtigsten Summationsarten bei allgemeinen Reihen erwähnt.
Sei $\sum_{n\in\mathbf{Z}} u_n$ eine formale Reihe mit $u_n \in \mathbf{C}$. Für $m = 0,1,2,\ldots$ betrachtet man

$$(a) \quad s_m = \sum_{|n|\leq m} u_n = u_{-m} + \cdots + u_0 + \cdots + u_m$$

$$(b) \quad \sigma_m = \frac{1}{m+1}(s_0 + s_1 + \cdots + s_m) = \sum_{|n|\leq m}\left(1 - \frac{|n|}{m+1}\right)u_n$$

$$(c) \quad A(r) = \sum_{m\in\mathbf{Z}} r^{|m|}u_m.$$

Sie s_m heißen die *symmetrischen* Partialsummen, die σ_m heißen *Caesàro*– oder $(C,1)$–Mittel und für $0 \leq r < 1$ heißen die $A(r)$ *Abel*– oder *Poisson*–Mittel, falls die definierende Reihe konvergiert.

Definition 1.2. Die Reihe $\sum_{n\in\mathbf{Z}} u_n$ heißt *Caesàro*– oder $(C,1)$– summierbar mit Summe $s \in \mathbf{C}$, falls $\lim_{m\to\infty} \sigma_m = s$
Die Reihe $\sum_{n\in\mathbf{Z}} u_n$ heißt *Abel*– oder *Poisson*– summierbar mit Summe $s \in \mathbf{C}$, falls $\lim_{r\to 1^-} A(r) = s$

Es gilt der folgende

Satz 1.8. *Aus der Konvergenz von $\sum_{n\in\mathbf{Z}} u_n$ folgt die $(C,1)$–Summierbarkeit und aus dieser folgt die Abel–Summierbarkeit zur selben Summe. Also*

$$\lim_{m\to\infty} s_m = s \quad \Longrightarrow \quad \lim_{m\to\infty} \sigma_m = s \quad \Longrightarrow \quad \lim_{r\to 1^-} A(r) = s.$$

2. Summierbarkeit fast überall und Konvergenz.

Die vorangehenden Sätze enthielten Aussagen über die Konvergenz von $\sigma_n(f)$ in der Normtopologie des Raumes, dem f angehört. Für stetige f erhalten wir daher (sogar) gleichmäßige Summierbarkeit, d.h. gleichmäßige Konvergenz von $\sigma_n(f)$. Ist f unstetig, so kann aus diesen Sätzen nichts über die punktweise Summierbarkeit gefolgert werden.

SATZ 2.1. *[Satz von FEJER] Sei $f \in L^1(\mathbf{T})$.*

a) Falls $\lim_{h\to 0}\Big(f(t_0+h)+f(t_0-h)\Big)$ existiert (auch mit Werten $\pm\infty$), dann gilt

$$\sigma_n(f)(t_0) \to \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\Big(f(t_0+h)+f(t_0-h)\Big).$$

Ist insbesondere t_0 ein Stetigkeitspunkt von f, dann gilt $\sigma_n(f)(t_0) \to f(t_0)$.

b) Wenn jeder Punkt eines abgeschlossenen Intervalls I ein Stetigkeitspunkt von f ist, dann konvergiert $\sigma_n(f)(t)$ gleichmäßig in I gegen $f(t)$.

c) Falls $m \le f(t)$ für alle t, dann gilt $m \le \sigma_n(f,t)$. Falls $f(t) \le M$ für alle t, dann gilt $\sigma_n(f,t) \le M$.

BEWEIS. Zu a):
Nur für $\alpha := \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\Big(f(t_0+h)+f(t_0-h)\Big) \in \mathbf{C}$. Der folgende Beweis beruht auf der Tatsache, daß $\{\mathbf{K}_n\}$ ein positiver Kern ist und außerdem die Eigenschaften (1.12) und (1.13) erfüllt. Daher gilt der Satz für jeden positiven Summationskern mit diesen Eigenschaften (z.B. *Poisson*–Kern).

Es ist

$$\begin{aligned}
\sigma_n f(t_0)-\alpha &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathbf{K}_n(t)\Big(f(t_0-t)-\alpha\Big)dt = \frac{1}{2\pi}\Big(\int_{-\pi}^{0}+\int_{0}^{\pi}\Big)= \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big(-\int_{\pi}^{0}\mathbf{K}_n(t)(f(t_0+t)-\alpha)dt+\int_0^{\pi}\mathbf{K}_n(t)(f(t_0-t)-\alpha)dt\Big)= \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathbf{K}_n(t)\Big(\frac{f(t_0+t)+f(t_0-t)}{2}-\alpha)\Big)dt = \\
&= \frac{1}{\pi}\Big(\int_0^{\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\Big)\mathbf{K}_n(t)\Big(\frac{f(t_0+t)+f(t_0-t)}{2}-\alpha\Big)dt.
\end{aligned}$$

Zu $\epsilon > 0$ wählen wir δ so klein, daß für $|t| < \delta$ gilt

$$\left|\frac{f(t_0+t)+f(t_0-t)}{2}-\alpha\right| < \frac{\epsilon}{2}$$

und dann n_0 so groß, daß für $n \ge n_0$

$$\sup_{\delta\le t\le\pi}\mathbf{K}_n(t) < \frac{\epsilon}{2||f-\alpha||_1}.$$

Dann gilt

$$|\sigma_n f(t_0)-\alpha| < \frac{\epsilon}{2}\Big(\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\mathbf{K}_n\Big)+\frac{\epsilon}{2}||f-\alpha||_1\frac{1}{||f-\alpha||_1} \le \epsilon.$$

Zu b):
f ist in I gleichmäßig stetig. Daher kann δ (und damit n_0) unabhängig von $t_0 \in I$ gewählt werden.

Zu c):

$$\sigma_n f(t) - m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathbf{K}_n(\tau)(f(t-\tau) - m)d\tau \geq 0$$
$$M - \sigma_n f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathbf{K}_n(\tau)(M - f(t-\tau))d\tau \geq 0.$$

□

FOLGERUNG 2.2. *Falls f in t_0 stetig ist und $S_n f(t_0)$ konvergiert, dann gilt $\lim_{n\to\infty} S_n f(t_0) = f(t_0)$.*

BEMERKUNG 2.1. Aus der Fejer–Bedingung $\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\Big(f(t_0+h) + f(t_0-h)\Big) = \alpha$ folgt

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h \left|\frac{f(t_0+\tau)+f(t_0-\tau)}{2} - \alpha\right| d\tau = 0 \tag{2.1}$$

Punkte t_0, für die diese Bedingung mit $\alpha = f(t_0)$ gilt, nennt man *Lebesguesche Punkte*. Offenbar ist jeder Stetigkeitspunkt von f ein Lebesguescher Punkt von f. Weiters sehen wir, daß sich die Bedingung (2.1) nicht ändert, wenn man die Funktion f in Punkten einer 0–Menge abändert.

Es gilt folgender wichtige

SATZ 2.3 (Lebesgue). *Sei $f \in L^1[a,b]$, $\quad (-\infty \leq a < b \leq \infty)$, dann sind fast alle Punkte $x \in [a,b]$* Lebesguesche *Punkte.*

Im Gegensatz dazu gibt es L^1–Funktionen, bei denen die *Fejer*–Bedingung in keinem einzigen Punkt erfüllt ist (Ü: Finden Sie eine).

SATZ 2.4. *Sei $f \in L^1(\mathbf{T})$ und $\alpha \in \mathbf{C}$ und sei für $t_0 \in \mathbf{R}$ (2.1) gültig. Dann folgt $\lim_{n\to\infty}\sigma_n f(t_0) = \alpha$. Insbesondere gilt also f.ü. $\sigma_n f(t) \to f(t)$.*

BEWEIS. Wir benützen aus dem vorigen Satz

$$\sigma_m f(t_0) - \alpha = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^\delta + \int_\delta^\pi\right)\mathbf{K}_m(t)\left(\frac{f(t_0+t)+f(t_0-t)}{2} - \alpha\right)dt. \tag{2.2}$$

Wir erinnern uns an Lemma 1.3 und die Darstellung des *Fejer*–Kernes

$$\mathbf{K}_m(t) = \frac{1}{m+1}\left\{\frac{\sin\frac{m+1}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}\right\}^2.$$

Weil für $0 < \tau < \pi$: $\sin(\tau/2) > \tau/\pi$, folgt daraus für solche τ : $\mathbf{K}_m(\tau) \le \frac{1}{m+1}\frac{\pi^2}{\tau^2}$ und da ohnehin $\mathbf{K}_m(t) \le \frac{1}{m+1}(1+3+5+\cdots+(2m+1)) = m+1$, erhalten wir

$$\mathbf{K}_m(\tau) \le \min\left(m+1, \frac{1}{m+1}\frac{\pi^2}{\tau^2}\right).$$

Insbesondere folgt, daß das 2. Integral in (2.2) gegen 0 geht, wenn nur $(m+1)\delta^2 \to \infty$, jedenfalls also für $\delta_m = (m+1)^{-1/4}$. Wir untersuchen nun das 1. Integral und setzen dazu

$$\phi(h) = \int_0^h \left|\frac{f(t_0+\tau)+f(t_0-\tau)}{2} - \alpha\right| d\tau.$$

Dann ist

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta_m} K_m(\tau)\left(\frac{f(t_0+\tau)+f(t_0-\tau)}{2} - \alpha\right)d\tau\right| \le \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{\frac{1}{m+1}}\right| + \frac{1}{\pi}\left|\int_{\frac{1}{m+1}}^{\delta_m}\right| \le$$

$$\le \frac{m+1}{\pi}\phi\left(\frac{1}{m+1}\right) + \frac{1}{\pi}\frac{\pi^2}{m+1}\int_{\frac{1}{m+1}}^{\delta_m}\left|\frac{f(t_0+\tau)+f(t_0-\tau)}{2} - \alpha\right|\frac{1}{\tau^2}d\tau.$$

Der erste Summand der letzten Zeile geht gegen 0 nach Voraussetzung. Partielle Integration liefert für den 2. Ausdruck

$$\frac{\pi}{m+1}\int_{\frac{1}{m+1}}^{\delta_m}\left|\frac{f(t_0+\tau)+f(t_0-\tau)}{2} - \alpha\right|\frac{1}{\tau^2}d\tau =$$

$$= \frac{\pi}{m+1}\left[\frac{\phi(\tau)}{\tau^2}\right]_{\frac{1}{m+1}}^{\delta_m} + \frac{2\pi}{m+1}\int_{\frac{1}{m+1}}^{\delta_m}\phi(\tau)\frac{1}{\tau^3}d\tau.$$

Es ist

$$\frac{\pi}{m+1}\left[\frac{\phi(\tau)}{\tau^2}\right]_{\frac{1}{m+1}}^{\delta_m} = \frac{\pi}{m+1}\left(\phi\left((m+1)^{-\frac{1}{4}}\right)(m+1)^{\frac{1}{2}} - \phi\left(\frac{1}{m+1}\right)(m+1)^2\right) =$$

$$= \frac{\pi}{(m+1)^{3/4}}\phi\left((m+1)^{-\frac{1}{4}}\right)(m+1)^{\frac{1}{4}} - \pi\phi\left(\frac{1}{m+1}\right)(m+1) \to 0.$$

Zu $\epsilon > 0$ wählen wir m_0 so groß, daß für alle $0 < t < (m_0+1)^{-1/4}$ gilt $\phi(t)/t \le \epsilon$. Dann erhalten wir für alle $m \ge m_0$

$$\frac{2\pi}{m+1}\int_{\frac{1}{m+1}}^{\delta_m}\phi(\tau)\frac{1}{\tau^3}d\tau \le \frac{2\pi\epsilon}{m+1}\int_{\frac{1}{m+1}}^{\delta_m}\frac{1}{\tau^2}d\tau = \frac{2\pi\epsilon}{m+1}\left[(m+1) - (m+1)^{\frac{1}{4}}\right] < 2\pi\epsilon.$$

□

FOLGERUNG 2.5. *Sei $f \in L^1(\mathbf{T})$. Mindestens in jedem Lebesgueschen Punkt t von f (also f.ü.) ist $S[f]$ zum Wert $f(t)$ Abel–summierbar: für fast alle $t \in \mathbf{R}$ gilt*

$$\lim_{r\uparrow 1} f(r,t) = f(t).$$

2.1. Lebesgue–Konstante. Nicht–Konvergenz der Fourier–Reihe. Die Fragen der Konvergenz der Fourier–Reihe, also der Partialsummen $S_n(f)$ sind wesentlich schwieriger und in vieler Hinsicht unvollkommener zu beantworten als im Falle der Summierbarkeit. Dies wird schon deutlich in

$$S_n(f)(t) = \sum_{-n}^{n} \hat{f}(j)e^{ijt} = (D_n * f)(t),$$

da $\{D_n\}$ kein Summationskern ist: (S2) ist nicht erfüllt.

SATZ 2.6. *Für* $n = 1, 2, \ldots$ *gilt*

$$L_n := ||D_n||_1 = \frac{4}{\pi^2}\log n + O(1). \tag{2.3}$$

L_n *heißen die* Lebesgueschen *Konstanten.*

BEWEIS. Mit der Variablentransformation $t/2 = y$ und mit (1.7) erhalten wir

$$||D_n||_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D_n(t)|dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin(\frac{1}{2}t)}\right|dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left|\frac{\sin(2n+1)y}{\sin(y)}\right|dy =$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left|\frac{\sin(2n+1)y}{y}\right|dy + O(1).$$

Letzteres, da in $]0, \pi/2]: \quad \sin y < y$ und daher in

$$\frac{1}{\sin y} = \left(\frac{1}{\sin y} - \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{y}$$

der Klammerausdruck als in 0 stetig ergänzbare Funktion beschränkt ist. Setzen wir nun $t = (2n+1)y$, dann wird das letzte Integral zu

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{(2n+1)\frac{2}{\pi}} \frac{|\sin t|}{t}dt = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\int_{k\frac{\pi}{2}}^{(k+1)\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin t|}{t}dt =$$
$$= \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u_k(s)}{k\frac{\pi}{2}+s}ds = (I).$$

Dabei ist $u_k(s) = \sin s$, falls k gerade und $u_k(s) = \cos s$, falls k ungerade ist. Der Summand für $k = 0$ ist endlich und wegen $\int_0^{\pi/2} u_k(s)ds = 1$ und $\frac{u_k(s)}{(k+1)\frac{\pi}{2}} \leq \frac{u_k(s)}{k\frac{\pi}{2}+s} \leq \frac{u_k(s)}{k\frac{\pi}{2}}$ gilt:

$$(I) \geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{2n}\frac{2}{(k+1)\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u_k(s)ds + O(1) \geq \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k+1} + O(1) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} + O(1).$$

Nun ist $\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} = \log 2n + O(1) = \log n + O(1)$. □

LEMMA 2.7. *Für $f \in L_\infty$ und $m = 0, 1, 2, \dots$ gilt*

$$||S_m f||_\infty \le ||D_m||_1 ||f||_\infty.$$

Für jedes m gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein stetiges $f \in L_\infty(\mathbf{T})$ mit $||f||_\infty = 1$ und

$$||S_m f||_\infty \ge |S_m f(0)| \ge ||D_m||_1 - \epsilon.$$

BEWEIS. Zunächst gilt

$$|S_m f(t)| \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_m(t-\tau)||f(\tau)| d\tau \le ||f||_\infty ||D_m||_1.$$

Weiters gilt für $f(t) := \operatorname{sgn} D_m(t)$ jedenfalls $||f||_\infty = 1$ und

$$|S_m f(0)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_m(-\tau) f(\tau) d\tau \right| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_m(\tau)| d\tau = ||D_m||_1.$$

An den endlich vielen Sprungstellen können wir f „ausglätten“ und erhalten ein stetiges f, wobei wir in beliebiger Nähe von $||D_m||_1$ bleiben. □

FOLGERUNG 2.8. *Sei B einer der Räume $L^1(\mathbf{T})$ oder $C(\mathbf{T})$. Die linearen Abbildungen $S_m : B \to B$ $(f \mapsto S_m f)$ und das Funktional $S_m^0 : C(\mathbf{T}) \to \mathbf{C}$, definiert durch $f \mapsto S_m f(0)$, haben alle die Normen $L_n = ||D_n||_1$. Es gibt daher eine $L^1(\mathbf{T})$–Funktion, deren Fourier–Reihe nicht L^1–konvergent ist und es gibt eine stetige Funktion, deren Fourier–Reihe im Punkt $t = 0$ unbeschränkt divergiert, also erst recht nicht gleichmäßig konvergiert.*

BEWEIS. Jedenfalls gilt für $f \in L^1(\mathbf{T}),\ g \in C(\mathbf{T})$

$$\begin{aligned} ||S_m f||_1 &= ||D_m * f||_1 \le ||D_m||_1 ||f||_1 \\ ||S_m f||_\infty &= ||D_m * f||_\infty \le ||D_m||_1 ||f||_\infty \\ |S_m f(0)| &\le ||S_m f||_\infty \le ||D_m||_1 ||f||_\infty. \end{aligned}$$

Also sind die Normen der Operatoren S_m, bzw. des Funktionals S_m^0 nach oben durch die Lebesgue–Konstanten beschränkt. Nun gilt für die Fejer–Kerne $||K_N||_1 = 1$ und daher wegen

$$S_m(K_N)(t) = D_m * K_N(t) = K_N * D_m(t) = \sigma_N(D_m)(t) \tag{2.4}$$

$||S_m||^{L^1} \ge ||S_m(K_N)||_1 = ||\sigma_N(D_m)||_1 \to ||D_m||_1$, da $\sigma_N(D_m) \to D_m$ (gleichmäßig und daher auch L^1) für $N \to \infty$. Das heißt: $||S_m||^{L^1} = L_m$. Der Rest folgt aus dem vorigen Lemma und dem Satz von Banach–Steinhaus. □

BEMERKUNG 2.2. Bezüglich der Konvergenz *fast überall* gibt es zwei berühmte Resultate:
Kolmogorov(1926) Es gibt $f \in L^1(\mathbf{T})$ mit überall divergierender Fourier–Reihe.
Carleson(1966) Beweis der Lusinschen Vermutung (L^2), Hunt (1968) Erweiterung auf $L^p, p > 1$: Jede Funktion $f \in L^p(\mathbf{T})$ besitzt eine fast überall konvergente Fourier–Reihe.

3. Punktweise Konvergenz von Fourier–Reihen.

LEMMA 3.1. *Zu* $S_N = \sum_{|n|\le N} c_n$ *sei* $\sigma_{N,k} := \frac{1}{k}(S_N + S_{N+1} + \cdots + S_{N+k-1})$. *Dann gelten die Beziehungen*

$$\begin{aligned}\sigma_{N,k} &= \left(1+\frac{N}{k}\right)\sigma_{N+k-1} - \frac{N}{k}\sigma_{N-1}\\ \sigma_{N,k} &= S_N + \sum_{N<|n|\le N+k-1}\left(1-\frac{|n|-N}{k}\right)c_n.\end{aligned} \tag{3.1}$$

BEWEIS.

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{N}{k}\right)&\sigma_{N+k-1} - \frac{N}{k}\sigma_{N-1} =\\ &= \frac{k+N}{k}\cdot\frac{1}{k+N}\Big(S_0+S_1+\cdots+S_{N+k-1}\Big) - \frac{N}{k}\cdot\frac{1}{N}\Big(S_0+S_1+\cdots+S_{N-1}\Big) =\\ &= \frac{1}{k}\Big(S_N+S_{N+1}+\cdots+S_{N+k-1}\Big).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{N,k}-S_N &= \frac{1}{k}(S_N+S_{N+1}+\cdots+S_{N+k-1}) - \frac{k}{k}S_N =\\ &= \frac{1}{k}\Big((S_N-S_N)+(S_{N+1}-S_N)+\cdots+(S_{N+k-1}-S_N)\Big) =\\ &= \frac{1}{k}\Big((c_{-N-1}+c_{N+1})+(c_{-N-2}+c_{-N-1}+c_{N+1}+c_{N+2})+\cdots\Big) =\\ &= \frac{k-1}{k}(c_{-N-1}+c_{N+1}) + \frac{k-2}{k}(c_{-N-2}+c_{N+2})+\cdots+\\ &+ \frac{k-(k-1)}{k}(c_{-N-k+1}+c_{N+k-1}) =\\ &= \sum_{N<|n|\le N+k-1}\left(1-\frac{|n|-N}{k}\right)c_n.\end{aligned}$$

□

FOLGERUNG 3.2. *Sei* $k = k_N \to \infty$ *mit* $N \to \infty$ *und* $N/k_N \le M < \infty$, *dann folgt aus* $\lim_{N\to\infty}\sigma_N = S$: $\lim_{N\to\infty}\sigma_{N,k_N} = S$.

BEWEIS. Wegen

$$\sigma_{N,k_N} - S = \left(1+\frac{N}{k}\right)\sigma_{N+k-1} - \left(1+\frac{N}{k}\right)S - \frac{N}{k}(\sigma_{N-1}-S)$$

folgt die Behauptung aus der Dreiecksungleichung und der Voraussetzung. □

Daraus folgt ein einfacher TAUBER–Satz (so bezeichnet man Sätze, wo aus der Summierbarkeit einer Reihe auf die Konvergenz geschlossen werden kann).

SATZ 3.3 (Hardy). *Sei* $c_n = O(\frac{1}{|n|})$ *für* $n \to \infty$ *und* $\lim_{N\to\infty} \sigma_N = S$, *dann gilt* $\lim_{N\to\infty} S_N = S$.

BEWEIS. Aus dem vorigen Lemma und der Voraussetzung folgt zunächst mit einer Konstanten A

$$|\sigma_{N,k} - S_N| \le A\frac{1}{N} \sum_{N<|n|\le N+k-1} \left(1 - \frac{|n|-N}{k}\right) = 2A\frac{1}{N}\left(\frac{1}{k} + \frac{2}{k} + \dots + \frac{k-1}{k}\right) =$$

$$= 2A\frac{1}{N}\frac{k(k-1)}{2k} = \frac{1}{N}A(k-1) < \frac{A}{N}k.$$

Zu $\epsilon > 0$ wählen wir λ so groß, daß $\frac{1}{\lambda}A < \epsilon$ und zu $k_N := [\frac{1}{\lambda}N]$ nach der Folgerung 3.2 N_0 so groß, daß für $N > N_0:\ \sigma_{N,k_N} - S < \epsilon$. Dann gilt

$$|S - S_N| \le |S - \sigma_{N,k_N}| + |\sigma_{N,k_N} - S_N| < 2\epsilon.$$

□

Sei nun $f \in L^1(\mathbf{T})$ von endlicher Variation, d.h.

$$V_0^{2\pi} f := \sup\left\{\sum_1^N |f(t_k) - f(t_{k-1})| : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 2\pi\right\} < \infty,$$

dann folgt aus

$$|\hat{f}(n)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt\right| = \left|\frac{1}{in}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}df(t)\right| \le \frac{V_0^{2\pi}(f)}{2\pi|n|},$$

daß die Voraussetzung im vorigen Satz erfüllt ist und wir erhalten

SATZ 3.4. *[Dirichlet–Jordan–Test] Sei* $f \in L^1(\mathbf{T})$ *von endlicher Variation. Dann konvergiert* $S_n f$ *gegen* $\frac{1}{2}(f(t+0)+f(t-0))$ *und insbesondere gegen* $f(t)$ *in jedem Stetigkeitspunkt von* f.
Die Konvergenz ist gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Stetigkeitsintervall von f.

BEWEIS. In jedem Punkt existieren $f(t+0)$, $f(t-0)$ und die Behauptung folgt aus dem Satz von Fejer 2.1 und dem vorigen Satz von Hardy. □

Insbesondere ist jede absolut stetige Funktion F von endlicher Variation und wir erhalten

FOLGERUNG 3.5. *Sei* $f \in L^1(\mathbf{T})$ *mit* $\hat{f}(0) = 0$ *und sei* $F(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$. *Dann konvergiert* $S[F]$ *(gebildet durch gliedweise Integration aus* $S[f]$*) gleichmäßig gegen* F *und man „darf“* $S[f]$ *über jedes Intervall* I *gliedweise integrieren (und erhält* $\int_I f(\tau)d\tau$*).*

LEMMA 3.6. *Sei* $f \in L^1(\mathbf{T})$ *und* $\int_{-\pi}^{\pi} |\frac{f(t)}{t}|dt < \infty$. *Dann gilt* $\lim_{n\to\infty} S_n f(0) = 0$.

BEWEIS.
$$S_nf(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{\sin t/2} \sin(n+\frac{1}{2})tdt =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ntdt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)\cos t/2}{\sin t/2} \sin nt\, dt.$$
Nun ist
$$\left|\frac{f(t)\cos t/2}{\sin t/2}\right| \leq \left|\frac{f(t)}{\sin t/2} - \frac{f(t)}{t/2}\right| + \left|\frac{f(t)}{t/2}\right|.$$
Daher ist $\left|\frac{f(t)\cos t/2}{\sin t/2}\right| \in L^1(\mathbf{T})$ und nach dem Riemann–Lebesgue–Lemma gehen alle Integrale gegen 0. □

SATZ 3.7 (Konvergenzkriterium von Dini). *$f \in L^1(\mathbf{T})$ erfülle für $t \in \mathbf{T}$ und ein $\alpha > 0$ eine der folgenden äquivalenten Bedingungen*
$$(1) \quad \int_{-\alpha}^{\alpha} \left|\frac{f(t+\tau)-f(t)}{\tau}\right| d\tau < \infty$$
$$(2) \quad \int_{-\alpha}^{\alpha} \left|\frac{f(t+\tau)-f(t)}{\tan\tau}\right| d\tau < \infty$$
$$(3) \quad \int_{-\alpha}^{\alpha} \left|\frac{f(t+\tau)-f(t)}{\tan\tau/2}\right| d\tau < \infty$$
$$(4) \quad \int_{-\alpha}^{\alpha} \left|\frac{f(t+\tau)-f(t)}{\sin\tau}\right| d\tau < \infty.$$
Dann gilt $S_nf(t) \to f(t)$.

BEWEIS. Die Äquivalenz der Bedingungen folgt aus der Beschränktheit der Abbildungen
$$\tau \mapsto \frac{\tau}{\sin\tau}, \frac{\tau}{\tan\tau}, \frac{\tau}{\tan\tau/2}$$
in der Nähe von 0. Weiters können wir $\alpha = \pi$ annehmen; denn für $\alpha \leq \tau \leq \pi$ sind die Nenner ohnehin „von 0 weg" beschränkt. Nun setzen wir $g(\tau) = f(t+\tau) - f(t)$ und wenden das vorige Lemma an. Es ist ja
$$S_ng(\tau) = \sum_{|k|\leq n} \hat{f}(k)e^{ik(t+\tau)} - f(t),$$
also $S_ng(0) = S_nf(t) - f(t)$. □

FOLGERUNG 3.8 (Aus (1)). *Falls $f \in L^1(\mathbf{T})$ in t differenzierbar ist, so gilt dort $S_nf(t) \to f(t)$.*

LEMMA 3.9. *Seien $f \in L^1(\mathbf{T})$, $g \in L^\infty(\mathbf{T})$, sei I_0 kompakte Teilmenge von $[0, 2\pi]$. Dann ist die Menge der Funktionen $\{\psi^x(t) : x \in I_0\}$ mit $\psi^x(t) = f(x-t)g(t)$ kompakt in $L^1(\mathbf{T})$.*

BEWEIS. Sei $\tilde{f}$ definiert durch $t \mapsto f(-t)$. Dann ist die Abbildung

$$\mathbf{R} \to L^1(\mathbf{T}) \to L^1(\mathbf{T}) \to L^1(\mathbf{T}) \quad \text{definiert durch} \quad x \mapsto f_x \mapsto \tilde{f}_x \mapsto \tilde{f}_x \cdot g$$

eine stetige Funktion $\mathbf{R} \to L^1(\mathbf{T})$. □

SATZ 3.10 (Lokalisationsprinzip). *Sei $f \in L^1(\mathbf{T})$ und $f(t) = 0$ für alle t aus einem offenen Intervall $I =]\alpha, \beta[$. Dann konvergiert $S_n f$ in I gegen 0 und zwar gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilintervall $I_0 \subset I$.*

BEWEIS. Der Beweis beruht auf der Zurückführung der Konvergenz von $S_n f$ auf die Konvergenz der Fourier–Koeffizienten einer kompakten Funktionenmenge.

Die punktweise Konvergenz folgt sofort aus dem Dini–Test. Zu I_0 existiert ein $\delta > 0$, sodaß für alle $t_0 \in I_0 : \quad t_0 \pm \delta \in]\alpha, \beta[$. Offenbar ist für jedes $t_0 \in I$ die Bedingung (1) aus Satz 3.7 erfüllt, sodaß $S_n f(t_0) \to 0$ gilt. Nun ist

$$S_n f(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t_0 - t) \cos nt \, dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t_0 - t) \frac{1}{\tan t/2} \sin nt \, dt.$$

Setzt man

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0 & |t| < \delta \\ 1 & \delta \le |t| \le \pi, \end{cases}$$

so gilt

$$f(t_0 - t) \frac{1}{\tan t/2} = f(t_0 - t) \frac{\lambda(t)}{\tan t/2}.$$

$\frac{\lambda(t)}{\tan t/2}$ ist beschränkt und die Behauptung folgt aus dem vorhergehenden Lemma und Bemerkung 1.1. □

FOLGERUNG 3.11. *Stimmen zwei $L^1(\mathbf{T})$–Funktionen f, g in der Umgebung eines Punktes t_0 überein, dann sind $S[f]$ und $S[g]$ in t_0 beide konvergent (mit selbem Grenzwert) oder beide divergieren in derselben Weise.*

Zum Beweis brauchen wir nur den vorigen Satz auf $f - g$ anzuwenden.

3.1. Ergänzungen und Beispiele. Sei $f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ mit $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = c_0 = 0$. Gliedweise Integration der Reihe liefert nach Folgerung 3.5 eine gleichmäßig konvergente Reihe mit $F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ als Summe. Also

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \left(-\frac{1}{in} e^{-in\tau} \Big]_0^t \right) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{1}{in} e^{in\tau} \Big]_0^t \right) =$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ c_{-n} \left(-\frac{1}{in} e^{-int} + \frac{1}{in} \right) + c_n \left(\frac{1}{in} e^{int} - \frac{1}{in} \right) \right\}.$$

Der Mittelwert von F ergibt sich daher zu

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_{-n}\frac{1}{in} - c_n\frac{1}{in}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} i\frac{1}{n}\left(c_n - c_{-n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}.$$

Folgerung 3.12. *Sei $f \in L^1(\mathbf{T})$ und $f(t) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nt + b_n \sin nt\right)$. Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$.*

Daher ist die Reihe

$$\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{\log n}\sin nt = -i\sum_{|n|\geq 2}\frac{\operatorname{sgn}(n)}{2\log|n|}e^{int} \tag{3.2}$$

keine Fourier–Reihe. Diese Reihe ist aber überall konvergent, wie wir sehen werden. (3.2) ist die konjugierte trig. Reihe zu

$$\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{\log n}\cos nt = \sum_{|n|\geq 2}\frac{1}{2\log|n|}e^{int}. \tag{3.3}$$

Dies ist eine Fourier–Reihe. Das ergibt sich aus dem folgenden Satz, der zudem zeigt, daß die Fourier–Koeffizienten von L^1–Funktionen beliebig langsam gegen 0 gehen können.

Satz 3.13. *Sei $\{a_n\} \in c_0(\mathbf{Z})$ eine gerade Folge (d.h. $a_n = a_{-n}$) nichtnegativer Zahlen, die folgende Konvexitätsbedingung erfüllt*

$$a_n \leq \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1}) \quad (n \in \mathbf{Z}). \tag{3.4}$$

Dann existiert ein nichtnegatives $f \in L^1(\mathbf{T})$ mit $\hat{f}(n) = a_n$.

Beweis. Aus der Konvexitätsbedingung

$$a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n = (a_{n-1} - a_n) - (a_n - a_{n+1}) \geq 0$$

sieht man, daß die Folge $a_n - a_{n+1}$ monoton abnimmt und daher $\lim_{n\to\infty} n(a_n - a_{n+1}) = 0$ (Satz v. Abel). Daher gilt

$$\sum_{n=1}^{N} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) = a_0 - a_N - N(a_N - a_{N+1}) \to a_0 \quad (N \to \infty).$$

Sei nun

$$f(t) := \sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n)\mathbf{K}_{n-1}(t).$$

Wegen $||\mathbf{K}_n||_1 = 1$ konvergiert diese Reihe in L^1 und weil alle Summanden ≥ 0 sind, gilt auch $f \geq 0$. Weiters gilt

$$\begin{aligned}\hat{f}(j) &= \sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n)\hat{\mathbf{K}}_{n-1}(j) = \\ &= \sum_{n=|j|+1}^{\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n)\left(1 - \frac{|j|}{n}\right) = \\ &= \lim_{N\to\infty}\Big(a_{|j|} - a_{|j|+N} - N(a_{|j|+N} - a_{|j|+N+1})\Big) = a_{|j|}\end{aligned}$$

□

Man überlege sich, daß es zu jeder positiven 0–Folge ω_n eine konvexe 0–Folge a_n gibt mit $a_n \geq \omega_n$. Dies begründet die obige Bemerkung über das „beliebig langsame“ Konvergieren einer Fourier–Reihe.

Beispiel 3.1. Sei $a_n = a_{-n} = 1/(2\log|n|)$. Dann ist

$$\sum_{|n|\geq 2} \frac{1}{2\log|n|} e^{int} = \sum_{n\geq 2} \frac{\cos nt}{\log n} \tag{3.5}$$

eine, mit Ausnahme der Punkte $\{0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots\}$, überall konvergente Fourier–Reihe.

Nun zum Nachweis der Konvergenz:

Lemma 3.14 (Abel–Summation). *Zu den komplexen Folgen $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ definieren wir $A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$, $A_{-1} := 0$. Sei $0 \leq p \leq q$. Dann gilt*

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_q b_{q+1} - A_{p-1}b_p. \tag{3.6}$$

Beweis. Es ist $a_n = A_n - A_{n-1}$. Daher

$$\begin{aligned}\sum_{n=p}^{q} a_n b_n &= \sum_{n=p}^{q}(A_n - A_{n-1})b_n = \\ &= \sum_{n=p}^{q} A_n b_n - \sum_{n=p-1}^{q-1} A_n b_{n+1} + A_q b_{q+1} - A_q b_{q+1} = \\ &= \sum_{n=p}^{q} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_q b_{q+1} - A_{p-1}b_p.\end{aligned}$$

□

FOLGERUNG 3.15. *Aus $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq 0$ folgt*

$$\left|\sum_{n=p}^{q} a_n b_n\right| \leq 2b_p \max_{p-1\leq n\leq q} |A_n|.$$

FOLGERUNG 3.16. *Die Partialsummen von $\sum_0^\infty a_n$ seien beschränkt (nicht notwendig konvergent) und $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \searrow 0$. Dann ist $\sum_{n=0}^\infty a_n b_n$ konvergent.*

SATZ 3.17. *Falls $\{a_n\}$ eine monotone 0–Folge ist, dann konvergieren die Reihen*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt, \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nt, \ \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n e^{int}$$

gleichmäßig in $\epsilon \leq |t| \leq 2\pi - \epsilon \, (\epsilon > 0)$. Die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n \sin nt$ ist überall konvergent.

BEWEIS. Wir wissen bereits

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos kt = \sum_{|k|\leq n} e^{ikt} = D_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}.$$

Für den *konjugierten* Kern gilt

$$\widetilde{D}_n(t) = -i \sum_{|k|\leq n} \operatorname{sgn}(k) e^{ikt} = 2\sum_{k=1}^{n} \sin kt = \frac{\cos\frac{t}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}.$$

Daraus sehen wir, daß die entsprechenden Partial–Summen für $0 < \epsilon \leq |t| \leq 2\pi - \epsilon$ durch $1/\sin\frac{\epsilon}{2}$ beschränkt sind. □

3.2. Das Gibbssche Phänomen. Die Überschrift bezieht sich auf das Verhalten einer konvergenten Fourier–Reihe in der Nähe einer Sprungstelle (vgl. Dirichlet–Jordan-Test, Satz 3.4). Dies betrachten wir zunächst an einer speziellen Funktion.

Sei $\Phi(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$ für $0 \leq x < 2\pi$ und im übrigen 2π–periodisch fortgesetzt. Dann ist $\hat{\Phi}(0) = 0$ und für $n \neq 0$ gilt $\hat{\Phi}(n) = \frac{1}{2in}$. Φ ist monoton und stetig mit Ausnahme der Punkte $\pm 2k\pi$. Wir untersuchen das Verhalten dieser Reihe in der Nähe von 0. Nun gilt jedenfalls $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\sin nx = 0$ für $x = 0$. Nach Satz 3.4 gilt für alle $x \in]0, 2\pi[$

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}(\pi - x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin nx = \lim_{N\to\infty} S_N\Phi(x).$$

Aus $\frac{1}{2}D_N(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos nx$ folgt

$$\frac{1}{2}\int_0^x D_N(y)dy = \frac{1}{2}x + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\sin nx = \frac{1}{2}x + S_N\Phi(x) \quad \text{und daher}$$

$$S_N\Phi(x) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int_0^x D_N(y)dy = S_N\Phi(x) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\sin(N+1/2)y}{\sin y/2}dy = 0.$$

Nun benützen wir wieder die Tatsache der asymptotischen Gleichheit von $1/\sin y$ und $1/y$ bei 0 und erhalten mit $h(y) = \frac{1}{\sin y/2} - \frac{1}{y/2}$

$$\begin{aligned}
S_N\Phi(x) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\sin(N+1/2)y}{y/2}dy &= S_N\Phi(x) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int_0^{(N+1/2)x}\frac{\sin t}{t}dt = \\
= S_N\Phi(x) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\sin(N+1/2)y}{\sin y/2}\,dy &+ \frac{1}{2}\int_0^x \sin(N+1/2)y\left(\frac{1}{\sin y/2} - \frac{1}{y/2}\right)dy = \\
= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\chi_{[0,x]}(y)h(y)\cos y/2\right)\sin Ny\,dy &+ \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\chi_{[0,x]}(y)h(y)\sin y/2\right)\cos Ny\,dy.
\end{aligned}$$

Die letzte Zeile geht gleichmäßig gegen 0 nach dem erweiterten Riemann–Lebesgue–Lemma; denn die Menge $\{\chi_{[0,x]}\} : x \in I$ ist eine kompakte Teilmenge in $L^1(\mathbf{T})$ für jedes kompakte Intervall I. Somit gilt gleichmäßig in I

$$\lim_{N\to\infty}\left\{S_N\Phi(x) + \frac{1}{2}x - \int_0^{(N+1/2)x}\frac{\sin t}{t}dt\right\} = 0.$$

Daraus folgt für $a > 0$ und $x_N = a/N$

$$\lim_{N\to\infty}\left\{S_N\Phi(a/N) + \frac{1}{2}\frac{a}{N} - \int_0^{a+a/2N}\frac{\sin t}{t}dt\right\} = 0,$$

also insbesondere für $a = \pi$

$$\lim_{N\to\infty} S_N\Phi(\pi/N) = \int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt.$$

Bei beliebiger rechtsseitiger Annäherung an 0 folgt also

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{x\to 0+} S_N\Phi(x) \geq \int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt \sim 1.8519 > \Phi(0+) = \frac{\pi}{2} \sim 1.5708.$$

Das bedeutet: die F–Reihe „schießt“ an der Sprungstelle „immer wieder“ (also in beliebiger Nähe) um etwa 18% „übers Ziel“.

Dies gilt für jede Funktion f von endlicher Variation bei einer Sprungstelle ξ (diese sei als isoliert angenommen) mit Sprunghöhe $f(\xi+0) - f(\xi-0) = l \neq 0$. Dazu betrachten wir die Funktion $\Delta(x) = f(x) - \frac{l}{\pi}\Phi(x-\xi)$. Wegen $\Delta(\xi+0) = f(\xi+0) - l/2 = f(\xi-0) + l/2 = \Delta(\xi-0)$ ist Δ stetig in ξ und einer abgeschlossenen Umgebung I um ξ. Die F–Reihe $S(\Delta)(x) = S(f)(x) - S(\frac{l}{\pi}\Phi(\cdot - \xi)(x)$ konvergiert also gleichmäßig in I, d.h

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}\left|S_nf(x) - S_n\frac{l}{\pi}\Phi(x-\xi) - f(x) + \frac{l}{\pi}\Phi(x-\xi)\right| = 0.$$

Das bedeutet: gleichmäßig in I gilt

$$S_nf(x) - f(x) \sim S_n\frac{l}{\pi}\Phi(x-\xi) - \frac{l}{\pi}\Phi(x-\xi).$$

Das obige Verhalten von Φ bei 0 gilt also auch für f bei ξ. Dieses Verhalten der Fourier–Reihe bezeichnet man als *Gibbssches Phänomen.*

3.3. Absolut konvergente Fourier–Reihen. Sei

$$A(\mathbf{T}) = \{f \in L^1(\mathbf{T}) : \sum_{n\in\mathbf{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty\}.$$

Die Abbildung $A(\mathbf{T}) \ni f \mapsto (\hat{f}(n)) \in l_1$ ist offenbar linear und injektiv. Sie ist auch surjektiv, weil zu $(a_n) \in l_1$ die Reihe $\sum a_n e^{int}$ gleichmäßig gegen eine (stetige) Funktion $g(t)$ konvergiert, für die $\hat{g}(n) = a_n$. Durch die Festsetzung

$$||f||_{A(\mathbf{T})} = \sum_{n\in\mathbf{Z}} |\hat{f}(n)|$$

wird $A(\mathbf{T})$ zu einem Banach–Raum, isomorph zu l_1.

Satz 3.18. $A(\mathbf{T})$ *ist eine Banach–Algebra mit der punktweisen Multiplikation der Funktionen und der Konstanten 1 als 1–Element.*

Beweis. Wir haben zu zeigen $||fg||_{A(\mathbf{T})} \le ||f||_{A(\mathbf{T})}||g||_{A(\mathbf{T})}$. Sei dazu

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \hat{f}(n)e^{int}, \quad g(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \hat{g}(n)e^{int}.$$

Aus der absoluten Konvergenz der beiden Reihen folgt:

$$\begin{aligned} f(t)g(t) &= \sum_k \sum_m \hat{f}(k)\hat{g}(m)e^{i(k+m)t} = \\ &= \sum_{n\in\mathbf{Z}} \left(\sum_{k\in\mathbf{Z}} \hat{f}(k)\hat{g}(n-k) \right) e^{int}. \end{aligned}$$

Daher gilt

$$(fg)\hat{}(n) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \hat{f}(k)\hat{g}(n-k).$$

Daraus folgt

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} |\widehat{fg}(n)| \le \sum_{n\in\mathbf{Z}} \sum_{k\in\mathbf{Z}} |\hat{f}(k)||\hat{g}(n-k)| = \sum_{k\in\mathbf{Z}} |\hat{f}(k)| \sum_{m\in\mathbf{Z}} |\hat{g}(m)| < \infty.$$

□

Bemerkung 3.1. Aus der GELFAND–Theorie der Banachalgebren folgt aus dem letzten Satz ein einfacher Beweis der Sätze von *Wiener* und *Lévy*.

Satz von *N. Wiener*: Wenn $f \in A(\mathbf{T})$ und $f(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbf{T}$, dann ist auch $1/f \in A(\mathbf{T})$.

Satz von *P. Lévy*: Wenn $f \in A(\mathbf{T})$ und wenn $\Phi(z)$ definiert und analytisch ist in einer offenen Umgebung von $f(\mathbf{T})$, dann ist auch $\Phi \circ f \in A(\mathbf{T})$.

Welche Funktionen haben absolut konvergente Fourier–Reihen? Hier zwei einfache Kriterien.

Satz 3.19. *Sei $f \in L^1(\mathbf{T})$ absolut stetig mit quadratisch integrierbarer Ableitung, d.h. $f(x) = c + \int_0^x g(\tau)d\tau,\ g \in L^2(\mathbf{T})$. Dann gilt $\sum_{n\in\mathbf{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty$.*

Beweis. Übung

$\square$

Für $\alpha \in]0,1]$ sei $Lip_\alpha(\mathbf{T})$ der Raum der 2π–periodischen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ mit $\sup_{h\neq 0,t} \frac{|f(t+h)-f(t)|}{|h|^\alpha} < \infty$ und der Norm

$$||f||_{Lip_\alpha} = ||f||_\infty + \sup_{t,h\neq 0} \frac{|f(t+h)-f(t)|}{|h|^\alpha}.$$

$Lip_\alpha(\mathbf{T})$ ist ein Banach–Teilraum von $C(\mathbf{T})$ (jedoch nicht homogen, vgl Übungen).

Zu $f \in C(\mathbf{T})$ bezeichne $\omega(f,h) := \max_{t\in\mathbf{T}} |f(t+h) - f(t)|$ den *Stetigkeitsmodul* von f und $\Omega(f,h) := ||f(\cdot + h) - f(\cdot)||_1 = \Omega(f,h) := ||f_{-h} - f||_1$ den sogenannten L^1–*Stetigkeitsmodul*. Dann gilt

$$|\hat{f}(n)| = \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[f(t+\frac{\pi}{n}) - f(t)\right]e^{-int}dt\right| \leq \frac{1}{2}\Omega(f,\frac{\pi}{n}) \leq \omega(f,\frac{\pi}{n}).$$

Damit und wegen $|f(t+h) - f(t)|/|h| \leq C|h|^{\alpha-1}$ folgt unter Anwendung des Dini–Testes

Folgerung 3.20. *Sei $f \in Lip_\alpha(\mathbf{T})$. Dann gilt*

$$\hat{f}(n) = O(n^{-\alpha})$$

und $S_n f(t) \to f(t)$.

Satz 3.21 (Bernstein). *Sei $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$. Dann gilt $Lip_\alpha(\mathbf{T}) \subset A(\mathbf{T})$ und die Einbettung ist stetig, d.h. es existiert ein c_α, sodaß für alle $f \in Lip_\alpha(\mathbf{T})$*

$$||f||_{A(\mathbf{T})} \leq c_\alpha ||f||_{Lip_\alpha}.$$

Beweis. Es ist

$$f(t-h) - f(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \left(e^{-inh} - 1\right)\hat{f}(n)e^{int}.$$

Zu vorgegebenem m wählen wir $h = 2\pi/(3\cdot 2^m)$ und $2^m \leq n < 2^{m+1}$.
Dann ist $|e^{-inh} - 1| \geq \sqrt{3} > 1$ und daher (mit Vorgriff auf die Parsevalsche Gleichung im nächsten Abschnitt)

$$\sum_{2^m\leq|n|<2^{m+1}} |\hat{f}(n)|^2 \leq \sum_{n\in\mathbf{Z}} |e^{-inh} - 1|^2|\hat{f}(n)|^2 = ||f_h - f||_2^2 \leq ||f_h - f||_\infty^2 \leq$$

$$\leq \left(\frac{2\pi}{3\cdot 2^m}\right)^{2\alpha} ||f||^2_{Lip_\alpha}.$$

Die linke Seite besteht aus höchstens 2^m Summanden und die Cauchy–Schwarz–UGL liefert

$$\sum_{2^m \le |n| < 2^{m+1}} |\hat{f}(n)| \le 2^{m/2} \left(\frac{2\pi}{3 \cdot 2^m} \right)^{\alpha} ||f||_{Lip_\alpha}.$$

Somit

$$\begin{aligned}
\sum_{n \in \mathbf{Z}} |\hat{f}(n)| &\le |\hat{f}(0)| + \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{2^m \le |n| < 2^{m+1}} |\hat{f}(n)| \right) \le \\
&\le ||f||_{Lip_\alpha} + \left(\frac{2\pi}{3} \right)^{\alpha} ||f||_{Lip_\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha - 1/2}} \right)^m = \\
&= ||f||_{Lip_\alpha} \left(1 + \left(\frac{2\pi}{3} \right)^{\alpha} \right) \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha - 1/2}} \right)^m = \\
&= c_\alpha \cdot ||f||_{Lip_\alpha}.
\end{aligned}$$

□

KAPITEL 3

Normkonvergenz von Fourier–Reihen. Die Sätze von A.N. Kolmogorov, M. Riesz und J. Marcinkiewicz.

1. Fourier–Reihen in $L^2(\mathbf{T})$.

Was die Charakterisierung einer Funktion durch die Größenordnung ihrer Fourier–Koeffizienten betrifft, gibt es unter den L^p–Räumen für $L^2(\mathbf{T})$ die befriedigendste Aussage. Der Grund liegt in der Tatsache, daß L^2 ein Hilbert–Raum ist unter dem inneren Produkt

$$< f, g >:= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt. \tag{1.1}$$

Wegen der Kompaktheit von $\mathbf{T}$ gilt $L^1(\mathbf{T}) \supset L^2(\mathbf{T})$ und alle an der absoluten Integrierbarkeit einer Funktion hängenden Begriffe und Sätze gelten sinngemäß auch für $L^2(\mathbf{T})$. Hinzu kommen hier alle mit der Orthogonalität und Vollständigkeit des Systems der trigonometrischen Funktionen verbundenen Aussagen. Es sei erinnert an einen Satz aus der allgemeinen Theorie der Hilbert–Räume.

SATZ 1.1. *Sei $\{a_i\}_J$ ein orthonormales System in einem komplexen Hilbert–Raum $\mathcal{H}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) Die „Polynome“ (d.h. endliche *Summen) $\sum c_i a_i$ liegen dicht $\mathcal{H}$.*

(2) Für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt $x = \sum_{i \in J} < x_i, a_i > a_i$.

(3) Für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt $||x||^2 = \sum_{i \in J} | < x_i, a_i > |^2$. (Parsevalsche Gleichung)

(4) Falls für alle $i \in J$ gilt $< x, a_i >= 0$, dann ist $x = 0$. (Vollständigkeit des Systems $\{a_i\}_J$)

Die obige Indexmenge J kann auch überabzählbar sein. Sie ist aber genau dann abzählbar (eventuell endlich), falls $\mathcal{H}$ ein *separabler* Hilbert–Raum ist. Dies ist der Fall für $L^2(\mathbf{T})$. Mit dem ON–System $\{e^{int}\}$ erhalten wir

SATZ 1.2. *(1) Für $f \in L^2(\mathbf{T})$ gilt*

$$\sum |\hat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt.$$

(2) In der L^2–Norm gilt $f = \lim_{N\to\infty} \sum_{-N}^{N} \hat{f}(n)e^{int}$.

(3) Zu einer Folge $\{a_n\}_{-\infty}^{\infty}$ *komplexer Zahlen mit* $\sum |a_n|^2 < \infty$ *gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion* $f \in L^2(\mathbf{T})$ *mit* $a_n = \hat{f}(n)$.

(4) Für $f, g \in L^2(\mathbf{T})$ *gilt*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}.$$

Den Folgenraum $\{a_n : \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\}$ bezeichnet man üblicherweise mit $l_2(\mathbf{Z})$ und der Satz besagt, daß die Zuordnung $f \mapsto \{\hat{f}(n)\}$ eine Hilbert–Raum–Isomorphie $L^2(\mathbf{T}) \to l_2(\mathbf{Z})$ definiert.

Satz 1.3 (Beste Approximation in L^2 durch die Fourierreihe). *Für jedes* $f \in L^2(\mathbf{T})$ *und jedes trigonometrische Polynom* $p(t) = \sum_{|n| \le m} d_n e^{int}$ *gilt* $||f - p||_2 \ge ||f - S_m f||_2$. *Gleichheit tritt nur für* $p = S_m f$ *ein.*

Beweis. Es ist

$$||f - p||_2^2 = ||\hat{f} - \hat{p}||_2^2 = \sum_{|n| \le m} |\hat{f}(n) - d_n|^2 + \sum_{|n| > m} |\hat{f}(n)|^2 \ge$$
$$\ge \sum_{|n| > m} |\hat{f}(n)|^2 = ||f - S_m f||_2^2$$

Gleichheit tritt nur für $d_n = \hat{f}(n)$ auf. □

Beispiel 1.1. Wenden wir die Parsevalsche Gleichung an auf die Funktion $f(t) = t$, $t \in [0, 2\pi)$ (2π–periodisch fortgesetzt), so folgt wegen $f \sim \pi + i \sum_{n \ne 0} e^{int}/n$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f|^2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{4\pi^2}{3} = \pi^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

und daher die bekannte Formel

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

2. Norm–Konvergenz in $L^p(\mathbf{T})$.

2.1. Norm–Konvergenz und konjugierte Funktion. In welchen Teilräumen B von $L^1(\mathbf{T})$ konvergiert nun die Fourier–Reihe einer Funktion aus B in der Normtopologie von B? Diese Frage führt zu einer bemerkenswerten Verbindung der Theorie der Fourier–Reihen mit der komplexen Analysis dank der Tatsache, daß mit der Setzung $\mathbf{C} \ni z = re^{ix}$ und $b_n = a_n r^n$ für $n \ge 0$ und $b_n = 0$ für $n < 0$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n \in \mathbf{Z}} b_n e^{inx},$$

eine Potenzreihe also formal einer trigonometrischen Reihe entspricht, deren Koeffizienten für $n < 0$ verschwinden.

DEFINITION 2.1. Sei B ein homogener Banachraum auf $\mathbf{T}$, der das System $\{e_m(t) = \exp(imt)\}$ enthält. Wir sagen B *gestattet Norm–Konvergenz*, wenn für alle $f \in B$

$$\lim_{n\to\infty} ||S_n(f) - f||_B = 0. \tag{2.1}$$

Die S_n können wir auffassen als Projektionen von B auf den von $\{e_0, e_{-1}, e_1 \ldots, e_{-n}, e_n\}$ in B aufgespannten Teilraum.

SATZ 2.1. *Ein homogener Banach–Raum gestattet Norm–Konvergenz genau dann, wenn die Normen $||S_n||^B$ gleichmäßig beschränkt sind, d.h. es gibt ein $K \geq 0$, sodaß*

$$||S_n(f)||_B \leq K||f||_B \tag{2.2}$$

für alle $f \in B$ und alle $n \geq 0$.

BEWEIS. Falls für alle $f \in B$ gilt $S_n(f) \to f$ (B), dann ist $||S_n(f)||_B$ eine beschränkte Folge für jedes f. Nach Banach–Steinhaus sind daher die Operatornormen $||S_n||^B$ gleichmäßig beschränkt.
Nehmen wir umgekehrt (2.2) an, dann wählen wir zu $\epsilon > 0$ zunächst ein trig. Polynom $p \in B$ mit $||f - p||_B < \epsilon$ (vgl. Satz 1.4). Wegen $S_n(p) = p$ für $n \geq \text{grad}(p)$ folgt für solche n

$$\begin{aligned} ||S_n(f) - f||_B = ||S_n(f) - S_n(p) + S_n(p) - f||_B = ||S_n(f) - S_n(p) + p - f||_B \leq \\ \leq ||S_n(f - p)||_B + ||p - f||_B \leq (K+1)\epsilon. \end{aligned}$$

□

Die Verbindung zur komplexen Analysis liegt in folgenden Begriffen und dem folgenden Satz. Zunächst definiert man für $f \in L^1(\mathbf{T})$ zu $S(f)(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{int}$ die sogenannte *konjugierte* Reihe formal als die trigonometrische Reihe

$$-i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sgn}(n)\hat{f}(n)e^{int}. \tag{2.3}$$

Dies ist i.a. keine Fourier–Reihe. Wir werden aber in Kürze sehen, in welchem Sinne dadurch eine Funktion, die sg. *zu f konjugierte Funktion $\widetilde{f}$* erklärt ist.

DEFINITION 2.2. Ein Teilraum $B \subset L^1(\mathbf{T})$ heißt konjugiert–abgeschlossen, falls für jedes $f \in B$ auch $\widetilde{f} \in B$, d.h. es existiert ein $\widetilde{f} \in B$ mit

$$\widetilde{f} \sim -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sgn}(n)\hat{f}(n)e^{int}.$$

Neben der konjugierten Reihe betrachten wir eine weitere formal aus $S(f)$ gebildete trigonometrische Reihe mit einer (eventuell existierenden) zugeordneten Funktion $f^\flat$:

$$f^\flat \sim \sum_{j=0}^{\infty} \hat{f}(j) e^{ijt}. \tag{2.4}$$

Wir bemerken zunächst, daß jede *beschränkte* Folge komplexer Zahlen $M = \{m_n\}_{-\infty}^{\infty}$ einen stetigen linearen Operator definiert

$$M : c_0(\mathbf{Z}) \to c_0(\mathbf{Z}); \quad \{\alpha_n\} \mapsto \{m_n \cdot \alpha_n\}$$

mit $||M||^{c_0} = \sup\{|m_n| : n \in \mathbf{Z}\}$.
Die zuvor definierten trig. Reihen entsprechen den beiden Folgen (bzw. dadurch definierten Operatoren)

$$\widetilde{M} = \{-i \operatorname{sgn}(n)\} \quad \text{und} \quad M^\flat = \{h(n)\} \quad \text{definiert durch} \quad h(n) = \begin{cases} 0 & \text{für } n < 0 \\ 1 & \text{für } n \geq 0. \end{cases}$$

Falls nun mit f auch $\widetilde{f}$ und (oder) $f^\flat$ in B liegen, (d.h. auch: die Folgen $\{-i \operatorname{sgn}(n)\hat{f}(n)\}$ und $\{h(n)\hat{f}(n)\}$ liegen in $A(\mathbf{Z})$) dann sind die Abbildungen $f \mapsto \widetilde{f}$ bzw. $f \mapsto f^\flat$ stetige, lineare Abbildungen $B \to B$. Dies folgt aus dem Satz über den „Abgeschlossenen Graphen“ und der Kommutativität der beiden Diagramme:

$$\begin{tikzcd} B \ni f \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d] & \{\hat{f}(n)\} \arrow[d, "\widetilde{M}"] \\ B \ni \widetilde{f} & \{-i \operatorname{sgn}(n)\hat{f}(n)\} \arrow[l, "\mathcal{F}^{-1}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \ni f \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d] & \{\hat{f}(n)\} \arrow[d, "M^\flat"] \\ B \ni f^\flat & \{h(n)\hat{f}(n)\} \arrow[l, "\mathcal{F}^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

da die inverse Fourier–Transformation $\mathcal{F}^{-1}$ abgeschlossen ist (vgl. Kap 2. Bemerkung 1.1).

LEMMA 2.2. *Die Abbildung $B \to B : \quad f \mapsto \widetilde{f}$ ist genau dann definiert, falls die Abbildung $B \to B : \quad f \mapsto f^\flat$ definiert ist. Es gelten dann die Umrechnungen*

$$f^\flat = \frac{1}{2}\hat{f}(0) + \frac{1}{2}(f + i\widetilde{f}), \quad \widetilde{f} = -i\Big(2f^\flat - f - \hat{f}(0)\Big)$$

BEWEIS. Sei $f \mapsto \widetilde{f}$ wie oben definiert. Dann ist auch $f^\flat := \frac{1}{2}\hat{f}(0) + \frac{1}{2}(f + i\widetilde{f}) \in B$ und wegen $\operatorname{sgn}(0) = 0$ rechnet man unmittelbar nach

$$(f^\flat)\hat{}\,(n) = \begin{cases} 0 & \text{für } n < 0 \\ \hat{f}(n) & \text{für } n \geq 0 \end{cases}$$

d.h. $f^\flat \sim \sum_{j=0}^{\infty} \hat{f}(j)e^{ijt}$. Ist umgekehrt $f^\flat \in B$ für $f \in B$, dann ist auch
$\widetilde{f} := -i\Big(2f^\flat - f - \hat{f}(0)\Big) \in B$ und es gilt $\widetilde{f} \sim -i \sum \operatorname{sgn}(n)\hat{f}(n)e^{int}$. □

SATZ 2.3. *Sei B ein homogener Banachraum auf $\mathbf{T}$, der das System $\{e^{int}\}$ enthält und in dem für alle $n \in \mathbf{Z}$ gelte*

$$||e^{int}f||_B = ||f||_B. \tag{2.5}$$

Dann ist B konjugiert–abgeschlossen genau dann, wenn B Norm–Konvergenz gestattet.

BEWEIS. Nach dem vorigen Lemma und Satz 2.1 genügt es zu zeigen, daß die Abbildung $f \mapsto f^\flat$ genau dann wohldefiniert ist, wenn die Projektionen S_n gleichmäßig auf B beschränkt sind.

Sei zunächst $||S_n||^B \leq K < \infty$. Für die Operatoren

$$S_n^\flat(f) := \sum_0^{2n} \hat{f}(j)e^{ijt} = e^{int}S_n\left(e^{-int}f\right) \tag{2.6}$$

gilt nach Voraussetzung $||S_n^\flat||^B \leq K$.

Zu $f \in B$ und $\epsilon > 0$ wählen wir ein trigonometrisches Polynom $P \in B$ mit $||f - P||_B \leq \epsilon/2K$. Dann gilt

$$||S_n^\flat(f) - S_n^\flat(P)||_B \leq ||S_n^\flat(f - P)||_B \leq \epsilon/2. \tag{2.7}$$

Falls n und m beide größer sind als der Grad von P, dann gilt $S_n^\flat(P) = S_m^\flat(P)$ und aus der vorigen Abschätzung folgt

$$||S_n^\flat(f) - S_m^\flat(f)||_B \leq \epsilon.$$

Die Folge $S_n^\flat(f)$ ist daher Cauchy–Folge in B; ihr Grenzwert liegt also in B und hat die Fourier–Reihe $\sum_0^\infty \hat{f}(j)e^{ijt}$, d.h. $f^\flat = \lim S_n^\flat(f) \in B$.

Sei umgekehrt $f \mapsto f^\flat$ eine wohldefinierte (und daher beschränkte. vgl. oben) Abbildung $B \to B$. Dann folgt aus

$$S_n^\flat(f) = f^\flat - e^{i(2n+1)t}(e^{-i(2n+1)t}f)^\flat,$$

daß die $||S_n^\flat||^B$ beschränkt sind durch 2x die B–Norm der Abbildung $f \mapsto f^\flat$. Wegen (2.6) und (2.5) folgt $||S_n||^B = ||S_n^\flat||^B$ und daher die Behauptung. $\square$

2.2. Existenz der konjugierten Funktion. Die Sätze von Kolmogorov und M. Riesz. Die Potenzreihe $1 + 2\sum_{n=1}^\infty z^n = \frac{1+z}{1-z}$ konvergiert für $|z| < 1$.
Wir setzen $z = re^{ix} \quad (x \in \mathbf{R}, 0 \leq r < 1)$. Dann ist

$$\begin{aligned} P(r,x) &= \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2} = \mathrm{Re}\frac{1+re^{ix}}{1-re^{ix}} \\ Q(r,x) &= \frac{2r\sin x}{1-2r\cos x + r^2} = \mathrm{Im}\frac{1+re^{ix}}{1-re^{ix}} \end{aligned} \tag{2.8}$$

$P(r,x)$ ist der Poisson–Kern. $Q(r,x)$ ist der s.g. *konjugierte* Poisson–Kern.

Sei $L^1(\mathbf{T}) \ni f = \mathrm{Re} f + i\,\mathrm{Im} f = f_1 + if_2$. Dann gilt für $n \in \mathbf{Z}$ und $j = 1,2$ $\hat{f}_j(n) = \overline{\hat{f}_j(-n)}$. Für $|z| < 1$ sind die Potenzreihen

$$T_j(z) = \hat{f}_j(0) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}_j(n) z^n$$

konvergent und aus dem Lebesgueschen Konvergenzsatz folgt

$$\begin{aligned} T_j(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_j(t)dt + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_j(t)e^{-int}dt\right) r^n e^{inx} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_j(t)\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in(x-t)}\right)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_j(t)P(r,x-t)dt + i\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_j(t)Q(r,x-t)dt \end{aligned}$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} f_j(r,x) &:= f_j(re^{ix}) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_j(t)P(r,x-t)dt \\ \tilde{f}_j(r,x) &:= \tilde{f}_j(re^{ix}) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_j(t)Q(r,x-t)dt \end{aligned} \tag{2.9}$$

(dabei verwenden wir für die Funktionserweiterungen wieder dieselben Symbole f_j), sodaß

$$T_j(re^{ix}) = f_j(re^{ix}) + i\tilde{f}_j(re^{ix}).$$

$f_j(r,x) = f_j(re^{ix})$ bzw. $\tilde{f}_j(r,x) = \tilde{f}_j(re^{ix})$ sind als Real– und Imaginärteil der analytischen Funktion T_j harmonische Funktionen von $z = re^{ix} = (r,x)$. Weiter ist

$$\begin{aligned} \tilde{f}_j(re^{ix}) = \mathrm{Im}\, T_j(re^{ix}) &= \frac{1}{2i}\left(T_j\big(re^{ix}\big) - \overline{T_j\big(re^{ix}\big)}\right) \\ &= \frac{1}{i}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\hat{f}_j(n)e^{inx} - \overline{\hat{f}_j(n)}e^{-inx}\right) r^n \\ &= -i\sum_{n\in\mathbf{Z}} \mathrm{sgn}(n)\hat{f}_j(n)e^{inx} r^{|n|} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Dabei ist $\mathrm{sgn}(0) = 0$ gesetzt. Dies ist also das A–Mittel der zu $S[f_j]$ *konjugierten* Reihe

$$\tilde{S}[f_j](x) = -i\sum_{n\in\mathbf{Z}} \mathrm{sgn}(n)\hat{f}_j(n)e^{inx}.$$

Wir definieren nun allgemein

$$\tilde{f}(re^{ix}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)Q(r, x-t)dt. \tag{2.11}$$

Dann gilt

$$\tilde{f}(re^{ix}) = \tilde{f}_1(re^{ix}) + \tilde{f}_2(re^{ix}).$$

Andererseits ist

$$f(re^{ix}) = f_1(re^{ix}) + f_2(re^{ix}).$$

Alle $f_j, \tilde{f}_j$ sind harmonisch und

$$f(re^{ix}) + i\tilde{f}(re^{ix}) = \big(f_1 + i\tilde{f}_1\big)(re^{ix}) + \big(f_2 + i\tilde{f}_2\big)(re^{ix})$$

ist **analytisch** in D und wegen $\hat{f}(n) = \hat{f}_1(n) + \hat{f}_2(n)$ ist $\tilde{f}(re^{ix})$ das A–Mittel der zu $Sf(t) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{int}$ konjugierten Reihe

$$-i\sum_{n\in\mathbf{Z}} \operatorname{sgn}(n)\hat{f}(n)e^{int} \sim \tilde{f}.$$

Bei "reeller" Darstellung gilt

$$\begin{aligned} f &\sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos nt + b_n \sin nt\Big) \\ \tilde{f} &\sim \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \sin nt - b_n \cos nt\Big). \end{aligned}$$

Die folgenden Beispiele (vgl. Ü 31) zeigen Möglichkeiten der Nicht–Zugehörigkeit von $\tilde{f}$:

Beispiel 2.1.

1. $f \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nt}{\log n} \in L^1(\mathbf{T})$ $\qquad$ $\tilde{f} \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nt}{\log n} \notin L^1(\mathbf{T})$
2. $f \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n} = \frac{1}{2}(\pi - t) \in L^\infty$ $\qquad$ $\tilde{f} \sim -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{n} = \log\big|2\sin\frac{1}{2}t\big| \notin L^\infty$
3. $f \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nt}{n\log n} \in C(\mathbf{T})$ $\qquad$ $\tilde{f} \sim -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nt}{n\log n}$ unstetig

Bemerkung 2.1. In 1. ist zwar $\tilde{f}(t)$ für alle t erklärt und endlich. Wir wissen auch, daß die darstellende Reihe keine Fourier–Reihe ist (vgl. Kap. 2, Folgerung 3.12). Wir können daraus aber nicht ohne weiteres $\tilde{f} \notin L^1(\mathbf{T})$ schließen: weder wissen wir, daß die Partialsummen L^1– noch etwa L^1–dominiert gegen $\tilde{f}$ konvergieren. Der Beweis für die Behauptung folgt am Ende dieses Abschnittes.

Die folgenden Ausführungen halten sich an [**Zy**] Vol I pp 252.

SATZ 2.4 (PRIVALOV). *Sei* $f \in L^1(\mathbf{T})$. *Dann existiert für fast alle* $x \in \mathbf{R}$

$$\lim_{r \to 1^-} \tilde{f}(re^{ix}) =: \tilde{f}(x) \in \mathbf{C}.$$

Wo dieser Grenzwert nicht existiert, definieren wir $\tilde{f}(x) = 0$. $\tilde{f}$ *heißt die* konjugierte Funktion *von* f.

$\tilde{f}$ *ist* 2π*–periodisch und meßbar.*

Der Beweis beruht auf folgendem

SATZ 2.5 (FATOU). *Sei* $G : \{z : |z| < 1\} \to \mathbf{C}$ *beschränkt und analytisch. Dann existiert*

$$\lim_{r \to 1^-} G(re^{ix})$$

für fast alle $x \in \mathbf{R}$. *D.h. In fast allen Richtungen existiert der "radiale Limes".*

BEWEIS. Nach Voraussetzung läßt sich G als für $|z| < 1$ konvergente Potenzreihe darstellen: $G(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$. Mit $z = re^{ix}, \quad 0 \le r < 1, x \in \mathbf{R}$ berechnen wir $G(z)\overline{G}(z)$ nach der Cauchy–Produktregel und erhalten eine absolut und in x gleichmäßig konvergente Reihe (sodaß wir im folgenden $\sum$ und $\int$ vertauschen können) und es gilt:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{inx}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \overline{a_m} r^m e^{-imx}\right) =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty}\Bigg(\sum_{\substack{m,\, n \ge 0 \\ m+n=k}} a_n \overline{a_m} r^n r^m e^{inx} e^{-imx}\Bigg) dx =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{\substack{m,\, n \ge 0 \\ m+n=k}} a_n \overline{a_m} e^{inx} e^{-imx} dx = \sum_{k=0}^{\infty} r^k |a_k|^2 \le$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |G(re^{ix})|^2 dx \le \sup_{|z|<1} |G(z)|^2 < \infty$$

unabhängig von r. Daraus folgt für $r \to 1^-$: $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$. Es existiert daher ein $g \in L^2(\mathbf{T})(\subset L^1(\mathbf{T}))$ mit $\hat{g}(k) = a_k$ für $k \ge 0$ und $\hat{g}(k) = 0$ für $k < 0$. Für $0 \le r < 1$ gilt also

$$G(re^{ix}) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{g}(k) r^k e^{ikx} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \hat{g}(k) r^{|k|} e^{ikx} = g(r, x).$$

D.h. G ist das Abel–Mittel der L^2–Funktion g und daher gilt für fast alle "Richtungen" x:

$$\lim_{r\to 1^-} G(re^{ix}) = \lim_{r\to 1^-} g(r,x) = g(x).$$

$\square$

Die folgende Aussage samt alternativem Beweis (vgl. [**Ka**] p 64) liefert sogar mehr:

LEMMA 2.6. *Jede in $D := \{z : |z| < 1\}$ harmonische und beschränkte Funktion ist das Poisson–Integral einer beschränkten Funktion auf $\mathbf{T}$.*

BEWEIS. Sei F harmonisch und beschränkt in D und für $r_n \to 1^-$

$$f_n(e^{it}) := F(r_n e^{it}).$$

$\{f_n\}$ ist eine beschränkte Folge stetiger Funktionen (also $\in L^\infty \subset (L^1)^*$). Es existiert daher eine gegen ein $f \in L^\infty(\mathbf{T})$ w^*–konvergente Teilfolge: $f_{n_j} \to f$. Somit gilt für $\rho e^{i\tau} \in D$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\rho, t-\tau) f(e^{it})dt = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\rho, t-\tau) f_{n_j}(e^{it})dt$$
$$= \lim_{j\to\infty} F(r_{n_j}\rho e^{i\tau}) = F(\rho e^{i\tau}).$$

$\square$

BEWEIS. Von Satz 2.4:
Da wir jede L^1–Funktion f in der Form $f = f_1 - f_2 + i(f_3 - f_4)$ mit $0 \le f_i \in L^1$ darstellen können, sei o.B.d.A. $f \ge 0$. Wegen $P(r,x) > 0$ für $0 \le r < 1, x \in \mathbf{R}$ ist $f(r,x) > 0$. Mit $z = re^{ix}$ ist also $F(z) = f(r,x) + i\tilde{f}(r,x)$ analytisch in D und hat positiven Realteil. Daher ist $G(z) = \exp(-F(z))$ analytisch in D und beschränkt mit $|G(z)| \le 1$. Sei

$$A = \{x \in \mathbf{R} : \lim_{r\to 1^-} f(r,x) \,\text{existiert},\ \lim_{r\to 1^-} G(re^{ix}) \,\text{existiert}\}.$$

Nach Folgerung 2.5 (Abel–Summierbarkeit) und dem vorigen Satz 2.5 folgt, daß $\mathbf{R} \setminus A$ eine 0–Menge ist. Für $x \in A$ ist $\lim_{r\to 1^-} f(r,x) < \infty$ und daher ist

$$\lim_{r\to 1^-} \exp(-f(r,x) - i\tilde{f}(r,x)) \ne 0.$$

$\tilde{f}(r,x)$ ist stetig in r und reellwertig. Daher muß auch $\lim_{r\uparrow 1} \tilde{f}(r,x)$ existieren und endlich sein.

Sei $r_n \to 1^-$. Dann ist $\tilde{f}$ punktweise fast überall Grenzwert der Folge der stetigen 2π–periodischen Funktionen $\tilde{f}(r_n,x)$, also meßbar und 2π–periodisch. $\square$

SATZ 2.7. *Seien $f, g \in L^1(\mathbf{T})$, $\alpha \in \mathbf{C}$, $\xi \in \mathbf{R}$. Dann gilt f.ü.*

$$(f+g)^\sim = \tilde{f} + \tilde{g}, \quad (\alpha f)^\sim = \alpha\tilde{f}, \quad (f_\xi)^\sim = (\tilde{f})_\xi.$$

Beweis. Dies folgt aus den entsprechenden Aussagen für $\tilde{f}(r,x)$ und $\tilde{g}(r,x)$. □

Satz 2.8 (Kolmogorov). *Für $f \in L^1$ und $0 < \mu < 1$ ist $|\tilde{f}|^\mu \in L^1$ und es existiert eine nur von μ abhängige Konstante C_μ, sodaß für alle $f \in L^1$ gilt:*

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\tilde{f}(x)|^\mu dx \right)^{1/\mu} \leq C_\mu ||f||_1.$$

Beweis. Sei zunächst $f \geq 0$ und o.B.d.A. $||f||_1 > 0$ (denn sonst ist $\tilde{f} = 0$ f.ü. und die Behauptung klar). Sei $F(z) := f(r,x) + i\tilde{f}(r,x)$. F ist in D holomorph mit positivem Realteil. Dann gilt

$$F(z) = R(r,x)e^{i\Phi(r,x)}$$

mit $0 < R$ und $-\pi/2 < \Phi < \pi/2$. $\log(R(r,x)) + i\Phi(r,x))$ ist dann der Hauptwert von $\log F(z)$ und die Funktion

$$G(z) = F^\mu(z) = e^{\mu \log_H F(z)} = R^\mu(r,x)e^{i\mu\Phi(r,x)}$$

ist holomorph in D. Wegen $P(0,x) = 1$, $Q(0,x) = 0$, $f \geq 0$ ist $F(0) = \hat{f}(0) = ||f||_1 > 0$ und daher mit Anwendung der Cauchy–Integralformel für $0 < r < 1$

$$G(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R^\mu(r,x) e^{i\mu\Phi(r,x)} dx = (F(0))^\mu = (\hat{f}(0))^\mu$$

reell. Daher ist das Integral über den Imaginärteil 0 und es bleibt

$$(*) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R^\mu(r,x) \cos\big(\mu\Phi(r,x)\big) dx = ||f||_1^\mu.$$

Nun ist $|\tilde{f}(r,x)| \leq |F(z)| = R(r,x)$ und $\cos\mu\Phi > \cos\mu\pi/2$
(wegen $0 < \mu < 1, \quad -\pi/2 < \Phi < \pi/2$) und daher wegen $(*)$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \big|\tilde{f}(r,x)\big)^\mu dx \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R^\mu(r,x) dx \leq \big(\cos\mu\frac{\pi}{2}\big)^{-1} ||f||_1^\mu.$$

Setzen wir $A_\mu^\mu = \big(\cos\mu\frac{\pi}{2}\big)^{-1}$, dann gilt also

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \big|\tilde{f}(r,x)\big|^\mu dx \leq A_\mu^\mu ||f||_1^\mu.$$

Da $\lim_{r\to 1^-} \big|\tilde{f}(r,x)\big|^\mu = \big|\tilde{f}(x)\big|^\mu$ fast überall, folgt aus dem Lemma von Fatou und nach Ziehen der μ–ten Wurzel die Behauptung.

Sei nun f beliebig komplexwertig. Mit der üblichen Zerlegung $f = f_1 - f_2 + i(f_3 - f_4)$ mit $f_j \geq 0$ gilt dann $||f_j||_1 \leq ||f||_1$ (die Träger von f_1, f_2 und f_3, f_4 sind disjunkt).

Für $0 < \mu < 1$ und $a_i \in \mathbf{C}$ gilt die Jensensche Ungleichung (vgl. [**HLP**], p 28)

$$|a_1 + \cdots + a_m|^\mu \leq |a_1|^\mu + \cdots + |a_m|^\mu.$$

Damit gilt

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\tilde{f}(r,x)\right|^\mu dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\tilde{f}_1-\tilde{f}_2+i(\tilde{f}_3-\tilde{f}_4)\right|^\mu dx \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{4}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\tilde{f}_j\right|^\mu dx \leq A_\mu^\mu \sum_{j=1}^{4}||f_j||_1^\mu \leq 4A_\mu^\mu||f||_1^\mu.$$

In $B_\mu := 4^{1/\mu}A_\mu$ haben wir die behauptete Konstante.

□

SATZ 2.9 (M. RIESZ). *Sei $1 < p < \infty$. Für jedes $f \in L^p$ ist $\tilde{f} \in L^p$ und die Abbildung $f \mapsto \tilde{f}$ ist ein stetiger linearer Operator. Es existiert also eine (nur von p abhängige) Konstante A_p, sodaß für alle $f \in L^p$*

$$||\tilde{f}||_p \leq A_p||f||_p.$$

Weiters gilt

$$\tilde{S}[f] = S[\tilde{f}].$$

Nach Satz 2.4 ist $\tilde{f}$ jedenfalls 2π–periodisch und meßbar. Wir benötigen folgendes

LEMMA 2.10. *Sei $1 < p \leq 2$. Dann existieren Konstante $\alpha = \alpha_p < 0$ und $\beta = \beta_p > 0$, sodaß für $|\phi| \leq \pi/2$ gilt:*

$$|\sin\phi|^p \leq \alpha\cos p\phi + \beta\cos^p\phi.$$

BEWEIS. Wegen der Symmetrie der Ungleichung bezüglich 0, betrachten wir nur $0 \leq \phi \leq \pi/2$. Es existiert (Ü) ein δ mit $0 < \delta < \pi/2 < p\delta$. Wegen $p \leq 2$ ist $p\delta \leq 2$. Mit der Setzung $\alpha = (\cos p\delta)^{-1}$ und $\beta = (\cos\delta)^{-1}(1+|\alpha|)$ gilt dann

$$\begin{aligned}&\text{für}\quad 0 \leq \phi < \delta: &&\alpha\cos p\phi + \beta\cos^p\phi \geq \beta\cos^p\phi - |\alpha| \geq 1+|\alpha|-|\alpha| = 1 \geq |\sin\phi|^p\\ &\text{für}\quad \delta \leq \phi \leq \pi/2: &&\alpha\cos p\phi + \beta\cos^p\phi \geq \alpha\cos p\delta = 1 \geq |\sin\phi|^p.\end{aligned}$$

□

BEWEIS. Zum Beweis des Satzes sei zunächst $1 < p \leq 2$, $\quad f \geq 0$ und $||f||_1 > 0$. Wie oben hat die in $\{z = re^{ix} : 0 \leq r < 1\}$ holomorphe Funktion $F(z) = f(r,x) + i\tilde{f}(r,x)$ einen positiven Realteil $f(r,x)$, also gilt

$$F(z) = R(r,x)e^{i\Phi(r,x)} \quad \text{mit} \quad R > 0,\, -\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}.$$

Sei

$$G(z) = F^p(z) = R(r,x)^p e^{ip\Phi(r,x)}.$$

Wegen $F(0) = \hat{f}(0) > 0$ ist $G(0)$ reell und nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R^p(r,x)\cos p\Phi(r,x)dx = \left(\hat{f}(0)\right)^p.$$

Nun ist

$$\left|\tilde{f}(r,x)\right|^p = \left|\mathrm{Im}\ F\right|^p = R^p(r,x)\left|\sin\Phi(r,x)\right|^p, \quad \text{und}$$
$$\left|f(r,x)\right|^p = \left|\mathrm{Re}\ F\right|^p = \big(f(r,x)\big)^p = R^p(r,x)\cos^p\Phi(r,x).$$

Nach dem vorigen Lemma gilt für $0 < r < 1$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\tilde{f}(r,x)\right|^p dx &\le \beta\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R^p(r,x)\cos^p\Phi(r,x)dx + \alpha\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R^p(r,x)\cos p\Phi(r,x)dx\\ &= \beta\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(\tilde{f}(r,x)\big)^p dx + \alpha\big(\hat{f}(0)\big)^p < ||f(r,\cdot)||_p^p.\end{aligned}$$

Letzteres, da der 2. Summand negativ ist. Nun gilt nach Kap. 2 Satz 1.2 $\lim_{r\to 1^-}||f(r,\cdot)-f||_p = 0$ und nach dem Lemma von Fatou daher

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\tilde{f}(r,x)\right|^p dx \le \beta||f||_p^p,$$

also mit $A_p' = \beta^{1/p}$ die Behauptung.

Für komplexwertige f setzen wir wieder $f = f_1 - f_2 + i(f_3 - f_4)$ und aus $|f_j| \le |f|$ folgt $||f_j||_p \le ||f||_p$ und daher

$$||\tilde{f}||_p \le A_p'\big(||f_1||_p + \cdots + ||f_4||_p\big) \le 4A_p'||f||_p.$$

Daher erhalten wir die Behauptung mit $A_p = 4A_p'$ für $1 < p \le 2$. Für $2 < p < \infty$ folgt die Aussage des Satzes aus Dualitätsüberlegungen: Sei q der konjugierte Exponent, d.h. definiert durch $1/p + 1/q = 1$ und somit $1 < q < 2$. Sei $f \in L^p$, $h \in L^q$. Für festes $0 \le r < 1$ ist $Q(r,x)$ stetig in x. Aus $Q(r,x) = -Q(r,-x)$ und der Hölder–Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{f}(r,x)h(x)dx\right| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)Q(r,x-t)dt\right)h(x)dx\right|\\ &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}-Q(r,t-x)h(x)dx\right)f(t)dt\right|\\ &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\tilde{h}(r,t)dt\right|\\ &\le ||f||_p||\tilde{h}(r,\cdot)||_q \le A_q||f||_p||h(r,\cdot)||_q.\end{aligned}$$

Für $r \to 1^-$ folgt nach dem Lemma von Fatou und Kap. 2 Satz 1.2

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\tilde{h}(x)dx\right| \le A_q||f||_p||h||_q.$$

h war beliebig und daher folgt

$$||\tilde{f}||_p \le A_q||f||_p,$$

also $A_p = A_q$. □

Der Beweis von $\tilde{S}[f] = S[\tilde{f}]$ wird aus den nun folgenden Begriffen und Sätzen folgen.

Bemerkung 2.2. Falls $\tilde{S}[f]$ eine Fourier–Reihe ist, etwa $S[g]$, so ist wegen $\tilde{f}(r,x) = g(r,x) \to g(x)$, $(r \to 1^-)$: $g(x) = \tilde{f}(x)$ für fast alle x, also $\tilde{S}[f] = S[\tilde{f}]$. Im allgemeinen gilt dies aber selbst dann nicht, wenn die konjugierte Reihe überall konvergiert und somit die konjugierte Funktion darstellt (vgl. Kap. 2 Folgerung 3.12). Wir benötigen den erweiterten Integralbegriff von DENJOY. Die folgende Kurzfassung ist unserer Situation angepaßt:

Sei f 2π–periodisch und $-\pi = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = \pi$ eine Zerlegung des Intervalles $[-\pi,\pi]$ mit der Feinheit $\rho = \max(x_j - x_{j-1})$ und Zwischenpunkten $\xi_j \in]x_{j-1}, x_j[$. Wir setzen für $t \in [-\pi,\pi]$

$$I_\rho(t) := \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j + t)(x_j - x_{j-1}).$$

Dies ist eine RIEMANN–Summe für f_{-t} und wegen der Periodizität von f wieder eine RIEMANN–Summe für f. Falls f R–integrierbar ist, so gilt

$$\lim_{\rho\to 0} I_\rho(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f,$$

und zwar unabhängig von t, x_j, ξ_j. Falls f nicht R–integrierbar ist, jedoch eine Zahl I existiert, sodaß die $I_\rho(t)$ **dem Maß nach** gegen I konvergieren, so ist dieses I eindeutig bestimmt (wieso?Ü) und heißt das DENJOY–Integral von f über $[-\pi,\pi]$, symbolisiert durch

$$I = (D)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.$$

Die Bedingung lautet: Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta(e) = \delta > 0$, sodaß für alle $\rho < \delta$ $|I_\rho(t) - I| < \epsilon$, außer in eine t–Menge $T \subset [-\pi,\pi]$ mit Maß $|T| < \epsilon$. Die Menge T wird i.a. von der Wahl der x_j und ξ_j abhängen.

Satz 2.11 (SAKS). *Jedes $f \in L^1(\mathbf{T})$ ist (D)–integrierbar und Legesgue– und Denjoy–Integral von f sind gleich.*

Beweis. Für $\epsilon > 0$ sei $f = f_1 + f_2$ mit stetigem f_1 und $||f_2||_1 < \epsilon^2/12\pi^2$. Dann gilt natürlich $I_\rho(t) = I^1_\rho(t) + I^2_\rho(t)$ und weiter

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|I^2_\rho(t)\right| dt \le \sum_{j=1}^{n}(x_j - x_{j-1}) \int_{-\pi}^{\pi} \left|f_2(\xi_j + t)\right| dt = \sum_{j=1}^{n}(x_j - x_{j-1})||f_2||_1 2\pi \le 4\pi^2||f_2||_1 < \epsilon^2/3.$$

Daraus und wegen

$$\frac{\epsilon}{3}\left|\left\{t : \left|I^2_\rho(t)\right| \ge \frac{\epsilon}{3}\right\}\right| \le \int_{\{t:|\%|\ge\frac{\epsilon}{3}|\}} \le \int_{\{t:|\%|\ge\frac{\epsilon}{3}|\}} + \int_{\{t:|\%|<\frac{\epsilon}{3}|\}} = \int_{-\pi}^{\pi}\left|I^2_\rho(t)\right| dt$$

folgt

$$|T| := \left|\left\{t : \left|I^2_\rho(t)\right| \ge \frac{\epsilon}{3}\right\}\right| < \epsilon.$$

Sei $I = \int f$, $I_1 = \int f_1$, $I_2 = \int f_2$ (alle Integrale über $[-\pi, \pi]$). Dann ist

$$\left|I_\rho(t) - I\right| = \left|I_\rho^1 + I_\rho^2 - I_1 - I_2\right| \leq \left|I_\rho^1 - I_1\right| + \left|I_\rho^2\right| + \left|I_2\right|.$$

Wegen der Stetigkeit von f_1 gilt $\left|I_\rho^1 - I_1\right| < \epsilon/3$ für $\rho < \delta(\epsilon)$. Für $t \notin T$ gilt weiters $\left|I_\rho^2(t)\right| < \epsilon/3$. Nach Voraussetzung über f_2 ist

$$\left|I_2\right| \leq 2\pi ||f_2||_1 < \frac{\epsilon^2}{6\pi} < \frac{\epsilon}{3},$$

falls nur $\epsilon < 2\pi$. Insgesamt gilt also außerhalb von T und für $\rho < \delta(\epsilon)$: $\quad \left|I_\rho(t) - I\right| < \epsilon$.

□

Satz 2.12 (Kolmogorov). *Für $f \in L^1(\mathbf{T})$ ist $\tilde{f}e^{-imx}$ für jedes $m \in \mathbf{Z}$ über $[-\pi, \pi]$ (D)–integrierbar und es gilt*

$$(D)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)e^{-imx}dx = -i\, sgn\,(m)\hat{f}(m). \tag{2.12}$$

Wenn also zusätzlich noch gilt $\tilde{f} \in L^1(\mathbf{T})$ (insbesondere also in L^p, $1 < p < \infty$ nach dem schon Bewiesenen), dann folgt aus dem vorigen Satz

$$\hat{\tilde{f}}(m) = -i\, sgn\,(m)\hat{f}(m) \quad d.h. \quad \tilde{S}[f] = S[\tilde{f}]. \tag{2.13}$$

Beweis. Sei $m \in \mathbf{Z}$ fest, $\delta_j = x_j - x_{j-1}$ und $f \in L^1(\mathbf{T})$. Wir setzen

$$\tilde{I}_m(t) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{f}(t + \xi_j)e^{-im(t+\xi_j)}\delta_j.$$

Es ist

$$\left|\tilde{I}_m(t)\right| = \left|e^{-imt}\sum_{j=1}^{n} \tilde{f}(t + \xi_j)e^{-im\xi_j}\delta_j\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} \tilde{f}(t + \xi_j)e^{-im\xi_j}\delta_j\right|.$$

Die letzte Summe ist nach Satz 2.7 die konjugierte Funktion von $\sum_{j=1}^{n} f(t + \xi_j)e^{-im\xi_j}\delta_j$. Aus Satz 2.8 folgt für $\mu = 1/2$

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|\tilde{I}_m(t)\right|^{\frac{1}{2}}dt\right)^2 = \left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|\left(\sum_{j=1}^{n} f(t + \xi_j)e^{-im\xi_j}\delta_j\right)^{\sim}\right|^{\frac{1}{2}}dt\right)^2 \leq$$

$$\leq 2\pi B_{1/2}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{j=1}^{n} f(t + \xi_j)e^{-im\xi_j}\delta_j\right|dt \leq 4\pi^2 B_{1/2}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(t)\right|dt.$$

Wenn also $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt < \eta = \eta(\epsilon)$, so ist $|\tilde{I}_m(t)| < \epsilon$, außer höchstens auf einer Menge vom Maß $< \epsilon$. Wir nehmen im folgenden $\eta < \epsilon/3$ an. Sei nun $f = f_1 + f_2$, wobei f_1 ein trigonometrisches Polynom ist und $\int_{-\pi}^{\pi} |f_2| < \eta$ gilt. Dann ist $\tilde{f} = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2$ und

$\tilde{I}_m(t) = \tilde{I}_m^1(t) + \tilde{I}_m^2(t)$. $\tilde{f}_1(x)e^{-imx}$ ist ein trigonometrisches Polynom, also L–integrierbar mit Wert $-2\pi i \operatorname{sgn}(m)\hat{f}_1(m)$. Also gilt mit Ausnahme von $t \in T_1$ mit $|T_1| < \epsilon/3$:

$$\left|\tilde{I}_m^1(t) + 2\pi i \operatorname{sgn}(m)\hat{f}_1(m)\right| < \epsilon/3,$$

wenn nur $\rho < \delta_1 = \delta_1(\epsilon/3)$. Andererseits ist nach dem vorigen $\left|\tilde{I}_m^2(t)\right| < \epsilon/2$, außer für $t \in T_2$ mit $|T_2| < \epsilon/3$, sobald $\rho < \delta_2 = \delta_2(\epsilon/3)$. Außerdem ist

$$2\pi|\hat{f}_2(m)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} \left|f_2\right| < \eta(\epsilon) < \frac{\epsilon}{3}.$$

Sei nun $\rho < \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\left|\tilde{I}_m(t) + 2\pi i \operatorname{sgn}(m)\hat{f}(m)\right| &= \\ &= \left|\tilde{I}_m^1(t) + \tilde{I}_m^2(t) + 2\pi i \operatorname{sgn}(m)\big(\hat{f}_1(m) + \hat{f}_2(m)\big)\right| \leq \\ &\leq \left|\tilde{I}_m^1(t) + 2\pi i \operatorname{sgn}(m)\hat{f}_1(m)\right| + \left|\tilde{I}_m^2(t) + 2\pi i \operatorname{sgn}(m)\hat{f}_2(m)\right| < \epsilon,\end{aligned}$$

sofern $t \notin T_1 \cup T_2$. Wegen $|T_1 + T_2| \leq \epsilon/3 + \epsilon/3 < \epsilon$ ist alles gezeigt. Aus Satz 2.11 und (2.12) ergibt sich sofort (2.13) □

FOLGERUNG 2.13. *Für die zu $f(t) = \sum_{n\geq 2} \frac{\cos nt}{\log n}$ konjugierte Funktion gilt:*

$$\sum_{n\geq 2} \frac{\sin nt}{\log n} = \tilde{f}(t) \notin L^1(\mathbf{T}).$$

Als weitere Folgerung erhalten wir zusammen mit Satz 2.3:

SATZ 2.14 (M. RIESZ). *Für $1 < p < \infty$ ist $L^p(\mathbf{T})$ abgeschlossen gegenüber Konjugation und es gilt daher für alle $f \in L^p(\mathbf{T})$: $S_n(f) \to f$ in $L^p(\mathbf{T})$.*

Es folgt nun ein alternativer Beweis des Satzes von M. RIESZ, wobei die Verteilungsfunktion von $\tilde{f}$ genauer untersucht wird. Dies erlaubt dann die Anwendung eines fundamentalen Interpolationssatzes von Marcinkiewicz. Hier folge ich Katznelson ([**Ka**], pp 62) und Hunt in [**Ash**], pp 20.

DEFINITION 2.3. Für eine meßbare Funktion $f : \mathbf{T} \to \mathbf{R}$ ist die Verteilungsfunktion definiert durch

$$m_f(\lambda) := \left|\{t : f(t) \leq \lambda\}\right| \quad -\infty < \lambda < \infty.$$

Diese Definition entspricht jener in der Wahrscheinlichkeitstheorie, hier in bezug auf das Lebesguemaß anstelle eines Wahrscheinlichkeitsmaßes.

BEMERKUNG 2.3. m_f ist rechtsseitig stetig, monoton wachsend (im weiteren Sinne) von 0 für $\lambda = -\infty$ bis 2π für $\lambda = \infty$ und für stetiges (das genügt hier) $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ gilt

$$\int_{\mathbf{T}} F(f(t))dt = \int_{\mathbf{R}} F(x)dm_f(x). \tag{2.14}$$

DEFINITION 2.4. Eine meßbare Funktion $f : \mathbf{T} \to \mathbf{R}$ heißt für $0 < p < \infty$ vom *schwachen* L^p*–Typ* , wenn eine Konstante C existiert, sodaß für alle $\lambda > 0$

$$m_f(\lambda) \geq 2\pi - C\frac{1}{\lambda^p} \tag{2.15}$$

oder äquivalent dazu

$$\big|\{t : f(t) > \lambda\}\big| \leq C\frac{1}{\lambda^p} \tag{2.16}$$

Interessant ist die Bedingung natürlich vor allem für große λ. Falls $f \in L^p$, so sagt man auch f ist vom *starken* L^p*–Typ*. Im folgenden schreiben wir kurz
$E\big(f \leq \lambda\big) = \{t : f(t) \leq \lambda\} = \{f \leq \lambda\}$ bzw. $E\big(f > \lambda\big) = \{t : f(t) > \lambda\} = \{f > \lambda\}$. Insbesondere ist also

$$\begin{aligned} m_{|f|}(y) &= \big|E(|f| \leq y)\big| \quad \text{und} \\ n_{|f|}(y) &:= \big|E(|f| > y)\big| = 2\pi - m_{|f|}(y). \end{aligned}$$

LEMMA 2.15. *Jedes $f \in L^p$ ist vom schwachen L^p–Typ.*

BEWEIS.

$$\begin{aligned} ||f||_p^p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{E\left(|f|>\lambda\right)} + \int_{E\left(|f|\leq\lambda\right)}\right) \geq \\ \geq \frac{1}{2\pi}\int_{E\left(|f|>\lambda\right)} |f(x)|^p dx \geq \frac{1}{2\pi}\lambda^p\big|E\big(|f| > \lambda\big)\big|. \end{aligned}$$

Es gilt also 2.16 mit $C = 2\pi||f||_p^p$. □

BEISPIEL 2.2. $\frac{1}{|\sin t|^{1/p}}$ ist vom schwachen L^p–Typ, aber nicht vom starken L^p–Typ (Ü).

LEMMA 2.16. *Sei $p > 0$ und $f \in L^p$. Dann gilt*

$$p\int_0^\infty y^{p-1} n_{|f|}(y)dy = \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx = \int_0^\infty y^p dm_{|f|}(y). \tag{2.17}$$

BEWEIS. Sei $E = \big\{(x, y) \in [0, 2\pi] \times \mathbf{R}^+ : |f(x)| > y\big\}$, sodaß also

$$n_{|f|}(y) = \int_0^{2\pi} \chi_E(x, y)dx.$$

Durch Anwendung des Satzes von Fubini und 2.14 erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&p\int_0^\infty y^{p-1}n_{|f|}(y)dy = p\int_0^\infty y^{p-1}\Big(\int_0^{2\pi}\chi_E(x,y)dx\Big)dy\\
(2.18)\qquad &= \int_0^{2\pi}\Big(p\int_0^{|f(x)|}\chi_E(x,y)\cdot y^{p-1}dy\Big)dx = \int_0^{2\pi}\Big(y^p\Big|_0^{|f(x)|}\Big)dx\\
&= \int_0^{2\pi}|f(x)|^p dx = \int_0^\infty y^p dm_{|f|}(y).
\end{aligned}
$$

□

Satz 2.17. *Sei f vom schwachen L^p–Typ. Dann ist $f \in L^q(\mathbf{T})$, also vom starken L^q–Typ für alle* $0 < q < p$.

Beweis.

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}|f|^q = q\int_0^\infty y^{q-1}\big(2\pi - m_{|f|}(y)\big)dy = q\int_0^1 + q\int_1^\infty\\
&\le q\int_0^1 1\cdot\big(2\pi - m_{|f|}(y)\big)dy + q\int_1^\infty y^{q-1}\big(2\pi - m_{|f|}(y)\big)dy\\
&\le q2\pi + qC\int_1^\infty y^{q-1}\frac{1}{y^p}dy = q\Big(2\pi + C\int_1^\infty y^{q-p-1}dy\Big) < \infty.
\end{aligned}
$$

□

Satz 2.18 (KOLMOGOROV). *Für $f \in L^1(\mathbf{T})$ ist die konjugierte Funktion $\tilde f$ vom schwachen L^1–Typ und daher gilt nach dem vorigen Lemma $\tilde f \in L^\mu(\mathbf{T})$ für alle* $0 < \mu < 1$.

Beweis. Zunächst für $f \geq 0$ und $||f||_1 = \hat f(0) = 1$. Wir möchten das Maß derjenigen Punkte t bestimmen, wo $|\tilde f(t)| > \lambda$ gilt. Wir betrachten dazu

$$H_\lambda(z) := 1 + \frac{1}{\pi}\mathrm{Arg}\frac{z-i\lambda}{z+i\lambda} = 1 + \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\Big(\log\frac{z-i\lambda}{z+i\lambda}\Big)$$

und untersuchen $H_\lambda\big(f(z)+i\tilde f(z)\big)$. Hier ist $f(z) > 0$.
Die Möbius–Transformation $w_\lambda(z) = \frac{z-i\lambda}{z+i\lambda}$ $(\lambda > 0)$ bildet die rechte z–Halbebene in die untere w–Halbebene ab und daher gilt $-\pi < \mathrm{Arg}\, w_\lambda(z) < 0$ für $\mathrm{Re}\, z > 0$. Daraus folgt

1) $H_\lambda > 0$ für $\mathrm{Re}\, z > 0$ und H_λ ist hier harmonisch.

2) Wir bestimmen nun die Niveau–Linien von H_λ. Wegen der Kreisverwandtschaft von w_λ wird ein Kreis durch $\pm i\lambda$ mit Mittelpunkt $m(\in \mathbf{R})$ auf eine Gerade durch 0 abgebildet ($w_\lambda(i\lambda) = 0$). Deren Punkte habe somit alle dasselbe Argument, d.h. die Niveau–Linien

von H_λ sind die Kreise durch $\pm i\lambda$. Insbesondere gilt

$$\left\{z : H_\lambda(z) = \frac{1}{2}\right\} = \left\{z = \lambda e^{it} : -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Wegen der Gebietstreue von w_λ muß also für alle z mit $|z| \geq \lambda$ gelten $H_\lambda(z) \geq 1/2$.

3) Schließlich gilt noch (Ü) für $\lambda > 0$

$$H_\lambda(1) = 1 + \frac{2}{\pi}(-\arctan\lambda) < \frac{2}{\pi\lambda}.$$

$H_\lambda\big(f(z) + i\tilde{f}(z)\big)$ ist positiv und harmonisch in D. Unter Beachtung von $Q(0,t) = 1$, $P(0,t) = 0$ folgt aus der Mittelwerteigenschaft

$$A := \frac{1}{2\pi}\int H_\lambda\Big(f(re^{it}) + i\tilde{f}(re^{it})\Big) = H_\lambda\big(\hat{f}(0)\big) = H_\lambda(1) < \frac{2}{\pi\lambda}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2\pi}\int_{|f+i\tilde{f}|>\lambda} H_\lambda\big(f + i\tilde{f}\big) + \frac{1}{2\pi}\int_{|f+i\tilde{f}|\leq\lambda} H_\lambda\big(f + i\tilde{f}\big) \\ &\geq \frac{1}{2\pi}\int_{|f+i\tilde{f}|>\lambda} H_\lambda\big(f + i\tilde{f}\big) \geq \frac{1}{4\pi}\Big|\big\{t : |f + i\tilde{f}| > \lambda\big\}\Big| \\ &\geq \frac{1}{4\pi}\big|E(|\tilde{f}| > \lambda)\big|. \end{aligned}$$

Wegen $|f|$, $|\tilde{f}| \leq |f + i\tilde{f}|$ ist

$$\big\{t : |f + i\tilde{f}| > \lambda\big\} \supset \big\{t : |\tilde{f}| > \lambda\big\}$$

und daher

$$\Big|\big\{t : |\tilde{f}(re^{it})| > \lambda\big\}\Big| \leq \frac{8}{\lambda}. \tag{2.19}$$

Wegen der Linearität der Abbildung $f \mapsto \tilde{f}$ folgt damit und wegen $f = ||f||\frac{f}{||f||}$ für ein $0 \leq f \in L^1(\mathbf{T})$ durch Grenzübergang $r \to 1$ in 2.19

$$\Big|\big\{t : |\tilde{f}(e^{it})| > \lambda\big\}\Big| \leq 8||f||_1\frac{1}{\lambda}.$$

Ein beliebiges f kann geschrieben werden als $f = f_1 - f_2 + i(f_3 - f_4)$ mit $f_i \geq 0$. Klar ist $||f_i||_1 \leq ||f||_1$ und wegen $\tilde{f} = \tilde{f}_1 - \tilde{f}_2 + i(\tilde{f}_3 - \tilde{f}_4)$ folgt

$$\big\{t : |\tilde{f}(e^{it})| > \lambda\big\} \subset \cup_{j=1}^4\big\{t : |\tilde{f}_j(e^{it})| > \lambda/4\big\}$$

und daher für jedes $f \in L^1(\mathbf{T})$

$$\Big|\big\{t : |\tilde{f}(e^{it})| > \lambda\big\}\Big| \leq 32 \cdot 4||f||_1\frac{1}{\lambda}.$$

□

Ergänzend hierzu sei noch folgender Satz zitiert (vgl. [**Zy**] Vol. I, p 254, [**Ka**] p 66)

SATZ 2.19 (ZYGMUND). *Für* $f \log^+ |f| \in L^1(\mathbf{T})$ *gilt* $\tilde{f} \in L^1(\mathbf{T})$.

Hier ist $\log^+ x = \sup(\log x, 0)$ für $x \geq 0$.

SATZ 2.20. *Sei* $f : \mathbf{T} \to \mathbf{R}$ *meßbar und* $|f| \leq 1$. *Dann gilt für* $0 \leq \alpha < \pi/2$

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{\alpha|\tilde{f}(e^{it})|} dt \leq \frac{2}{\cos \alpha}. \tag{2.20}$$

BEWEIS. Wir betrachten $F(z) := \tilde{f}(z) - if(z) = -i(f + i\tilde{f})$. Wegen $|f| \leq 1$ und $0 \leq \alpha < \pi/2$ gilt $\cos(\alpha f(z)) \geq \cos \alpha$. Daher für $z \in D$

$$\operatorname{Re}\left(e^{\pm\alpha F(z)}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{\pm\alpha\tilde{f}(z) \mp \alpha i f(z)}\right) = e^{\pm\alpha\tilde{f}(z)} \cos(\alpha f(z)) \geq e^{\pm\alpha\tilde{f}(z)} \cos \alpha.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int e^{\pm\tilde{f}(re^{it})} dt &\leq \frac{1}{\cos \alpha} \frac{1}{2\pi} \int \operatorname{Re} e^{\pm\alpha F(re^{it})} dt \\ &= \frac{1}{\cos \alpha} \operatorname{Re} e^{\pm\alpha F(o)} = \frac{1}{\cos \alpha} \cos(\alpha f(0)) \leq \frac{1}{\cos \alpha}. \end{aligned}$$

Durch Addition für $\pm$ und durch Grenzübergang $r \to 1$ folgt

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{|\tilde{f}(e^{it})|} dt \leq \frac{2}{\cos \alpha}.$$

□

FOLGERUNG 2.21. *Sei* $|f| \leq 1$. *Dann gilt*

$$m_{|\tilde{f}|}(\lambda) > 2\pi \left(1 - \frac{4}{\cos\sqrt{2}} e^{-\lambda}\right). \tag{2.21}$$

BEWEIS. Sei $f = f_1 + if_2$ mit reellwertigen f_1, f_2. Dann ist $\tilde{f} = \tilde{f}_1 + i\tilde{f}_2$ und es gilt

$$\left|\tilde{f}(e^{it})\right| > \lambda \Leftrightarrow \left(\left|\tilde{f}_1(e^{it})\right| > \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \quad \text{oder (und)} \quad \left|\tilde{f}_2(e^{it})\right| > \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \right).$$

Eine Anwendung des vorigen Satzes mit $\alpha = \sqrt{2}$ liefert (am besten von rechts nach links gelesen)

$$\frac{1}{2\pi} e^{\lambda} \left| \left\{ t : \left|\tilde{f}_j(e^{it})\right| > \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \right\} \right| < \frac{1}{2\pi} \int_{\left|\tilde{f}_j(e^{it})\right| > \frac{\lambda}{\sqrt{2}}} e^{\sqrt{2}\left|\tilde{f}_j(e^{it})\right|} dt \leq \frac{1}{2\pi} \int e^{\sqrt{2}\left|\tilde{f}_j(e^{it})\right|} dt \leq \frac{2}{\cos\sqrt{2}}$$

und daraus folgt die Behauptung. □

Eine Anwendung der eindeutigen Bestimmtheit eines endlichen Borelmaßes auf $\mathbf{R}$ durch seine Fourier–Stieltjes–Transformierte liefert den folgenden

SATZ 2.22. *Sei $U \subset \mathbf{T}$ eine Menge vom Maß 2α mit Indikatorfunktion χ_U. Sei χ_α die Indikatorfunktion von $]-\alpha, \alpha[$. Dann gilt*

$$m_{\tilde{\chi}_\alpha} = m_{\tilde{\chi}_U},$$

d.h. die Verteilungsfunktion der zu χ_U konjungierten Funktion ist bestimmt durch das Maß von U, nicht aber durch die besondere Struktur von U.

BEWEIS. Sei $f := \chi_U$. Mit $z = re^{it}$, $0 \leq r < 1$, $\xi \in \mathbf{R}$ betrachten wir die in z analytische Funktion $F(\xi, z) := e^{i\xi(\tilde{f}(z) - if(z))}$. Dann gilt nach Cauchy $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\xi, re^{it})dt = F(\xi, 0)$ und damit für $r \to 1$ und $U' = \mathbf{T} \setminus U$

$$\int_{\mathbf{T}} e^{i\xi(\tilde{f}(z) - if(z))}dt = \int_{U'} e^{i\xi\tilde{f}(e^{it})}dt + e^{\xi}\int_U e^{i\xi\tilde{f}(e^{it})}dt = 2\pi e^{i\xi\left(-i\frac{2\alpha}{2\pi}\right)} = 2\pi e^{\xi\alpha/\pi}.$$

Durch Ersetzung $-\xi \to \xi$ und Übergang zu konj. Komplexen folgt

$$\int_{U'} e^{i\xi\tilde{f}(e^{it})}dt + e^{-\xi}\int_U e^{i\xi\tilde{f}(e^{it})}dt = 2\pi e^{-\xi\alpha/\pi}.$$

Daraus folgt durch Subtraktion

$$\left(e^{\xi} - e^{-\xi}\right)\int_U e^{i\xi\tilde{f}(e^{it})}dt = 2\pi\left(e^{\xi\alpha/\pi} - e^{-\xi\alpha/\pi}\right)$$

und daher

$$\begin{aligned} \int_U e^{i\xi\tilde{f}(e^{it})}dt &= 2\pi\frac{\sinh\xi\alpha/\pi}{\sinh\xi} \\ \int_{U'} e^{i\xi\tilde{f}(e^{it})}dt &= 2\pi\frac{\sinh\xi(1-\alpha/\pi)}{\sinh\xi}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Setzen wir $m_{\tilde{\chi}_U}(\lambda) = n_1(\lambda) + n_2(\lambda)$ mit

$$n_1(\lambda) = \left|U \cap \{t : \tilde{f}(e^{it}) \leq \lambda\}\right|, \quad n_2(\lambda) = \left|U' \cap \{t : \tilde{f}(e^{it}) \leq \lambda\}\right|$$

dann bedeutet 2.22

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} e^{i\xi x}dn_1(x) &= 2\pi\frac{\sinh\xi\alpha/\pi}{\sinh\xi} \\ \int_{\mathbf{R}} e^{i\xi x}dn_2(x) &= 2\pi\frac{\sinh\xi(1-\alpha/\pi)}{\sinh\xi}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

und beide Ausdrücke sind nur abhängig von α, nicht aber von der Struktur von U. Wir erhalten sogar mehr: nämlich, daß die Verteilungen von $\tilde{f}$ eingeschränkt auf U bzw. U' nur vom Maß von U, also nur von α abhängig sind. $\square$

Wir berechnen nun $\tilde{\chi}_\alpha$:

Die Fourier–Entwicklung von χ_α ist (vgl. Ü 2c)

$$\chi_\alpha(t) = \frac{\alpha}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}e^{int} = \frac{\alpha}{\pi} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{\pi n}\cos nt.$$

Daher

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}_\alpha(re^{it}) &= 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n\frac{\sin n\alpha}{\pi n}\sin nt = \sum_{n=1}^{\infty} r^n\frac{1}{\pi n}\big(\cos n(t-\alpha) - \cos n(t+\alpha)\big)\\ &= \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}r^n e^{in(t-\alpha)} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}r^n e^{in(t+\alpha)}\right)\\ &= \frac{1}{\pi}\mathrm{Log}_H\left(\frac{1-re^{i(t+\alpha)}}{1-re^{i(t-\alpha)}}\right) = \frac{1}{\pi}\log\left|\frac{1-re^{i(t+\alpha)}}{1-re^{i(t-\alpha)}}\right|.\end{aligned}$$

Für $r \to 1$ erhalten wir daraus

$$\tilde{\chi}_\alpha(re^{it}) = \frac{1}{\pi}\log\left|\frac{1-e^{i(t+\alpha)}}{1-e^{i(t-\alpha)}}\right| = \frac{1}{\pi}\log\left|\frac{e^{it}-e^{-i\alpha)}}{e^{it}-e^{i\alpha)}}\right| = \frac{1}{2\pi}\log\frac{1-\cos(t+\alpha)}{1-\cos(t-\alpha)}. \tag{2.24}$$

Eine Analyse des Graphen der Funktion (2.24) zeigt: $\{t : \tilde{\chi}_\alpha(e^{it}) > \lambda\}$ enthält jedenfalls $t_0 = \alpha$, da $\tilde{\chi}_\alpha(\alpha) = \infty$ und als stetiges Urbild des offenen Intervalles $]\lambda,\infty[$ ist diese Menge für $\lambda \geq 1$ ein offenes Intervall um $t_0 = \alpha$. Eine weitere Analyse (Ü) zeigt, daß dieses Intervall höchstens eine Länge $< 5\alpha e^{-\pi\lambda}$ hat. Das heißt

$$\Big|\{t : \tilde{\chi}_\alpha(e^{it}) > \lambda\}\Big| < 5\alpha e^{-\pi\lambda}. \tag{2.25}$$

Aus der Asymmetrie von $\tilde{\chi}_\alpha$ ergibt sich

Folgerung 2.23. *Sei f die Indikatorfunktion einer Menge U vom Maß $|U| = 2\alpha$. Dann gilt für $\lambda \geq 1$*

$$\Big|\{t : |\tilde{f}(e^{it})| > \lambda\}\Big| < 10\,\alpha\, e^{-\pi\lambda}.$$

2.3. Interpolation nach Marcinkiewicz.

Definition 2.5. Seien V, W Funktionenräume. Eine Abbildung $T : V \to W$ heißt *sublinear*, falls

$$|T(f+g)| \leq |T(f)| + |T(g)|,$$

wann immer Tf, Tg definiert sind.

Bemerkung 2.4. a) Jedes lineare T ist sublinear.

b) Sei T_n eine Folge linearer Abbildungen. Dann ist $T^*(x) := \sup|T_n(x)|$ sublinear.

c) Bezeichne ω ein symmetrisches Intervall um x. Dann ist die Hardy–Littlewood *maximum average function*

$$\Lambda f(x) := \sup_{\omega} \left\{ \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} |f(t)| dt : x \in \omega \right\}$$

sublinear.

BEMERKUNG 2.5. Falls T sublinear ist, dann gilt offenbar

$$E(|Tf| \leq y) \cap E(|Tg| \leq y) \subset E(|Tf + Tg| \leq 2y).$$

Äquivalent dazu ist

$$E(|Tf + Tg| > 2y) \subset E(|Tf| > y) \cup E(|Tg| > y)$$

und daraus folgt

$$n_{|T(f+g)|}(2y) \leq n_{|T(f)|}(y) + n_{|T(g)|}(y). \tag{2.26}$$

DEFINITION 2.6. Sei $T : L^p \to L^p$, $(1 \leq p \leq \infty)$ sublinear.
T heißt vom *starken* (p,p)*–Typ*, falls

$$||Tf||_p \leq C||f||_p,$$

T heißt vom *schwachen* (p,p)*–Typ*, falls

$$n_{|Tf|} \leq C^p ||f||_p^p \frac{1}{y^p},$$

gültig für alle $f \in L^p$, $y > 0$ und C unabhängig von f.

Am besten in verkehrter Reihenfolge lesend, sehen wir aus

$$y^p \frac{1}{2\pi} \big| E(|Tf| > y) \big| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{E(|Tf|>y)} \big|Tf(x)\big|^p dx + \frac{1}{2\pi} \int_{E(|Tf| \leq y)} \big|Tf(x)\big|^p dx =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int \big|Tf(x)\big|^p dx = ||Tf||_p^p \leq C^p ||f||_p^p :$$

wenn T vom starken (p,p)–Typ ist, dann auch vom schwachen. Die Umkehrung gilt nicht. Jedoch gilt folgender

SATZ 2.24 (MARCINKIEWICZ). *Sei* $1 \leq p_0 < p_1 < \infty$ *und* T *sublinear. Für alle* $f \in L^{p_j}$ *und alle* $y > 0$ *gelte*

$$y^{p_j} n_{|Tf|} \leq C_j^{p_j} \int_0^{2\pi} \big|f(x)\big|^{p_j} dx.$$

Für $p_1 = \infty$ *ersetzen wir die schwach–Typ Annahme durch* $||Tf||_\infty \leq C_1 ||f||_\infty$.

Dann gilt für alle $p_0 < p < p_1$ *und alle* $f \in L^p$

$$\int_0^{2\pi} \big|Tf(x)\big|^p dx \leq p\, 2^p\, C_0^{p_0 \frac{p_1 - p}{p_1 - p_0}} C_1^{p_1 \frac{p - p_0}{p_1 - p_0}} \left(\frac{1}{p - p_0} + \frac{1}{p_1 - p} \right) \int_0^{2\pi} \big|f(x)\big|^p dx. \tag{2.27}$$

BEWEIS. Wir fixieren ein $y > 0$, setzen $A := C_0^{p_0 \frac{1}{p_1 - p_0}} C_1^{-p_1 \frac{1}{p_1 - p_0}}$ und

$$f^y(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } |f(x)| \leq Ay \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
$$f_y(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } |f(x)| \leq Ay \\ f(x) & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $f(x) = f_y(x) + f^y(x)$ und weil T sublinear ist, folgt:

$$n_{|Tf|}(2y) = n_{|T(f_y + f^y)|}(2y) \leq n_{|Tf_y|}(y) + n_{|Tf^y|}(y).$$

Für p_1 folgt aus der Annahme, daß T vom schwachen (p_1, p_1)–Typ ist:

$$\begin{aligned} n_{|Tf|}(2y) &\leq C_0^{p_0} y^{-p_0} \int_0^{2\pi} \left|f_y(x)\right|^{p_0} dx + C_1^{p_1} y^{-p_1} \int_0^{2\pi} \left|f^y(x)\right|^{p_1} dx \\ &= C_0^{p_0} y^{-p_0} \int_0^{2\pi} \chi_{\{|f(x)| > Ay\}}(x,y) |f(x)|^{p_0} dx + C_1^{p_1} y^{-p_1} \int_0^{2\pi} \chi_{\{|f(x)| \leq Ay\}}(x,y) |f(x)|^{p_1} dx. \end{aligned}$$

Wir multiplizieren diese Ungleichungs–Kette mit $p\,2^p\,y^{p-1}$, integrieren über dy und erhalten für die linke Seite

$$p \int_0^\infty n_{|Tf|}(2y)(2y)^{p-1} d(2y) = ||Tf||_p^p (2\pi)^p.$$

Die rechte Seite ist $p\,2^p \cdot \{I + II\}$ mit

$$\begin{aligned} I &= C_0^{p_0} \int_0^\infty y^{p-p_0-1} \left(\int_0^{2\pi} \chi_{\{\frac{1}{A}|f(x)| > y\}}(x,y) |f(x)|^{p_0} dx \right) dy \\ &= C_0^{p_0} \frac{1}{p - p_0} \int_0^{2\pi} |f(x)|^{p_0} dx \left((p - p_0) \int_0^{\frac{1}{A}|f(x)|} 1 \cdot y^{p-p_0-1} dy \right) dx \\ &= C_0^{p_0} \frac{1}{p - p_0} \frac{1}{A^{p-p_0}} \int_0^{2\pi} |f(x)|^{p_0} |f(x)|^{p-p_0} dx \\ &= C_0^{p_0} \frac{1}{A^{p-p_0}} ||f||_p^p. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
II &= C_1^{p_1} \int_0^\infty y^{p-p_1-1} \left(\int_0^{2\pi} \left(1 - \chi_{\{\frac{1}{A}|f(x)|>y\}}\right)(x,y)|f(x)|^{p_1} dx \right) dy \\
&= C_1^{p_1} \int_0^\infty y^{p-p_1-1} \left(\int_0^{2\pi} \chi_{\{\frac{1}{A}|f(x)|\le y\}}(x,y)|f(x)|^{p_1} dx \right) dy \\
&= C_1^{p_1} \int_0^{2\pi} |f(x)|^{p_1} \left(\int_{\frac{1}{A}|f(x)|}^\infty 1 \cdot y^{p-p_1-1} \frac{1}{p-p_1}(p-p_1) dy \right) dx \\
&= C_1^{p_1} \int_0^{2\pi} |f(x)|^{p_1} |f(x)|^{p-p_1} \cdot \frac{1}{p_1-p} \cdot A^{p_1-p} dx \\
&= A^{p_1-p} \cdot C_1^{p_1} \frac{1}{p_1-p} ||f||_p^p.
\end{aligned}
$$

Dabei hatten wir

$$
y^{p-p_1} \Big|_{\frac{1}{A}|f(x)|}^{\infty} = -A^{p_1-p}|f(x)|^{p-p_1}
$$

wegen $p < p_1$. Addition und Einsetzen für A liefert die rechte Seite der Ungleichung des Satzes. Der Fall $p_1 = \infty$ bleibt als Übungsaufgabe. □

Bemerkung 2.6. a) Der vorige Satz ist ein Spezialfall eines allgemeinen Interpolations–Theorem's von MARCINKIEWICZ. Für eine ausführliche Behandlung vgl. [**Zy**] Vol. II pp 111.

b) Nach dem Satz 2.18 ist die Abbildung $f \to \tilde{f}$ vom schwachen $(1,1)$–Typ. Sie ist offensichtlich vom starken (und damit schwachen) $(2,2)$–Typ. Aus dem Satz von Marcinkiewicz folgt dann sofort der Satz von M. RIESZ für $1 < p \le 2$ und durch Dualität für $2 \le p < \infty$.

KAPITEL 4

Charaktere auf Gruppen. Eine Einführung.

1. Invariante Teilräume von $L^1(\mathbf{T})$ und Charaktere.

Die Tatsache, daß einige der wichtigen Funktionenräume homogen sind, mit f also auch jedes Translat f_α enthalten, wollen wir nun in Hinblick auf die Translations-Abbildungen selbst betrachten und werden dabei die fundamentale Rolle der Funktionen e^{int} von dieser Seite her erkennen.

Sei dazu $G = \mathbf{T}$, additiv geschrieben, und $C(\mathbf{T})$ wie bisher der Vektorraum der stetigen 2π–periodischen Funktionen. Zu $f \in C(\mathbf{T}), \alpha \in G$ betrachten wir die Translations-Abbildungen
$T_\alpha f : t \mapsto f(t-\alpha)$. Dann gilt offenbar

$$T_0 = I, \quad T_{\alpha+\beta} = T_\alpha \circ T_\beta = T_\beta \circ T_\alpha, \quad T_{-\alpha} = T_\alpha^{-1}. \tag{1.1}$$

Die Menge $\{T_\alpha : \alpha \in G\}$ bildet also eine Transformationsgruppe auf $C(\mathbf{T})$. Welches sind nun die *invarianten* Teilräume, d.h. jene $V \subset C(\mathbf{T})$ für die gilt

$$\bigwedge_{\alpha \in G} T_\alpha(V) \subset V.$$

Auf der Suche nach den nicht mehr weiter zerlegbaren invarianten Teilräumen kommt man sofort zum Begriff der *minimalen* invarianten Teilräume V, d.h. V enthält keinen echten invarianten Teilraum. Offensichtlich ist jeder 1–dimensionale invariante Teilraum minimal, enthält also mit f auch jedes $T_\alpha f$ und wegen der 1–Dimensionalität ist daher $T_\alpha f = c_\alpha f$, f also ein Eigenvektor von T_α.

Zu $f \in C(\mathbf{T})$ sei V_f der kleinste invariante Teilraum, der f enthält, also die Menge aller endlichen Linearkombinationen von Translaten $T_\alpha f$. Wir bestimmen nun jene Funktionen f, für die gilt $\dim V_f = 1$.

Zunächst ist jedenfalls $f \neq 0$. Es existiert also ein $x_0 \in G$ mit $f(x_0) \neq 0$. Zu jedem $\alpha \in G$ existiert ein $\chi(-\alpha) \in \mathbf{C}$ mit

$$T_\alpha f = \chi(-\alpha) f \quad \text{d.h.} \quad \bigwedge_{\alpha, x \in G} f(x-\alpha) = \chi(-\alpha) f(x).$$

Insbesondere erhalten wir $f(x_0 - \alpha) = \chi(-\alpha) f(x_0)$ und daher ist $\chi : G \to \mathbf{C}$ definiert durch $\alpha \mapsto \chi(\alpha)$ stetig. Für $\alpha = 0$, $x = x_0$ folgt $f(x_0) = \chi(0) f(x_0)$ und somit $\chi(0) = 1$.

Weiters ist

$$T_{\alpha+\beta}f = \chi(-\alpha-\beta)f = T_\beta(T_\alpha f) = T_\beta(\chi(-\alpha)f) = \chi(-\alpha)\chi(-\beta)f,$$

und daher

$$\chi(\alpha+\beta) = \chi(\alpha)\chi(\beta).$$

Daraus wiederum folgt mit
$f = T_0 f = T_{\alpha-\alpha}f = \chi(\alpha)\chi(-\alpha)f$:

$$(\chi(\alpha))^{-1} = \chi(-\alpha).$$

Wegen der Kompaktheit von $G = \mathbf{T}$ ist χ beschränkt und daher sehen wir:

$$|\chi(\alpha)| = 1\,, \quad \text{also} \quad \chi(\alpha) \in \mathbf{T}.$$

Dehnt man die vorigen Überlegungen von $G = \mathbf{T}$ auf beliebige (topologische, nicht notwendig kompakte) abelsche Gruppen G aus, so nennt man eine solche Abbildung $\chi : G \to \mathbf{T}$ einen (stetigen) *Charakter* der Gruppe G.

Schließlich gilt

$$f(x) = f(x_0 + x - x_0) = \chi(x_0 - x)f(x_0) = \chi(x_0)f(x_0)\chi(-x)$$

und daher

$$f = c\chi^{-1}.$$

f ist also Vielfaches eines Charakters.

Im allgemeinen erhebt sich jetzt natürlich die Frage nach der Existenz stetiger Charaktere, ja sogar nach der Existenz „genügend“ vieler. Man vergleiche dazu die analoge und fundamentale Frage nach der Existenz genügend vieler stetiger Funktionale auf einem topologischen Vektorraum (meist in diesem Sinne: zu $x \neq y \in V$ existiert ein stetiges lineares Funktional $f : V \to \mathbf{C}$ mit $f(x) \neq f(y)$). Wir bestimmen diese nun für $G = \mathbf{T}, \mathbf{R}$. Wegen der Nichtkompaktheit von $\mathbf{R}$ ist nun die Beschränktheit eines Charakters Teil der Definition.

SATZ 1.1. *a) Jeder stetige Charakter $\chi : \mathbf{R} \to \mathbf{T}$ ist von der Form*

$$\chi(x) = e^{ixy}, \quad (y \in \mathbf{R}).$$

b) Jeder stetige Charakter $\chi : \mathbf{T} \to \mathbf{T}$ ist von der Form

$$\chi(x) = e^{ixn}, \quad (n \in \mathbf{Z}).$$

BEWEIS. Zu a) Aus $a, b \in \mathbf{R} : \quad \chi(a+b) = \chi(a)\chi(b)$ folgt

$$\int_0^r \chi(a+b)db = \chi(a)\int_0^r \chi(b)db.$$

χ ist stetig und $\chi(0) = 1$. Daher existiert ein $r > 0$ mit $\int_0^r \chi(b)db > 0$. Weiters ist

$$\int_0^r \chi(a+b)db = \int_a^{a+r} \chi(c)dc$$

differenzierbar nach a und somit ist

$$\chi(a) = \frac{1}{\int_0^r \chi(b)db} \int_0^r \chi(a+b)db$$

differenzierbar. Daher

$$\chi'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{\chi(a+h)-\chi(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\chi(h)-\chi(0)}{h} \cdot \chi(a) = \chi'(0)\cdot\chi(a).$$

Daher $\chi(a) = Ce^{\lambda a}$. Die Anfangsbedingung $\chi(0) = 1$ liefert $C = 1$ und aus $|\chi(a)| = 1 = |e^{\lambda a}|$ folgt $\chi(a) = e^{iya}$ mit $y \in \mathbf{R}$.

Zu b) χ muß nun noch zusätzlich 2π–periodisch sein. Daraus folgt $y = k \in \mathbf{Z}$. □

2. Darstellungen topologischer Gruppen.

Eine sehr instruktive Einführung in das weitläufige Thema findet man in [**KG**].

DEFINITION 2.1. Eine multiplikativ geschriebene Gruppe G, versehen mit einer Topologie, bezüglich der die Multiplikation $G \times G \ni (x,y) \mapsto x\cdot y \in G$ (Produkttopologie auf $G\times G$) und die Inversenbildung $G \ni x \mapsto x^{-1} \in G$ stetig sind, heißt *topologische Gruppe*. Zwei topologische Gruppen G, G' heißen *isomorph*, falls es einen Gruppen–Isomorphismus $h : G' \to G$ gibt, der zugleich ein Homöomorphismus ist.

SATZ 2.1. *Jede Untergruppe H einer top. Gruppe ist bezüglich der Relativ–Topologie eine top. Gruppe.*

Zu zwei top. Gruppen G_1, G_2 ist auch $G_1 \times G_2$, versehen mit der Produkt–Topologie und komponentenweisen Operationen eine top. Gruppe.

BEISPIEL 2.1. 1) $\mathbf{R}$ ist bezüglich $+$ eine lokalkompakte abelsche top. Gruppe mit der diskreten Untergruppe $\mathbf{Z}$, allgemeiner $l\mathbf{Z}$, $\quad l > 0$.

2) $(\mathbf{R}^n, +)$ ist lokalkompakte abelsche top. Gruppe.

3) $\mathbf{C}^* = \{z \in \mathbf{C} : z \neq 0\}$ ist bezüglich der Multiplikation eine lokalkompakte abelsche Gruppe mit der *kompakten* Untergruppe $\mathbf{T} = \{z : |z| = 1\}$

4) Die Abbildung $\overline{x} \mapsto e^{ix}$ ist eine Isomorphie $(\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}, +) \to (\mathbf{T}, \cdot)$.

5) $M_n(\mathbf{R})$, die Algebra der reellen $n\times n$–Matrizen enthält die top. Gruppe

$$GL(n,\mathbf{R}) = \{A : \det A \neq 0\}$$

der invertierbaren $n\times n$ Matrizen. Sie ist als offene Teilmenge des $\mathbf{R}^{n^2}$ lokalkompakt. Sie ist für $n \geq 2$ nicht kommutativ und heißt die *reelle lineare Gruppe* in n Variablen. Sie enthält als abgeschlossene, nichtkompakte Untergruppe die spezielle lineare Gruppe

$$SL(n,\mathbf{R}) = \{A : \det A = 1\}$$

und diese wieder die kompakte Untergruppe

$$O(n, \mathbf{R}) = \{A : AA^T = I\},$$

die sogenannte *orthogonale Gruppe*. In analoger Weise definiert man als Teilmengen von $M_n(\mathbf{C})$ die entsprechenden komplexen Gruppen

$$GL(n, \mathbf{C}) \supset SL(n, \mathbf{C}) \supset U(n, \mathbf{C}).$$

SATZ 2.2. *Sei G top. Gruppe und H Normalteiler in G. Dann ist die Quotientengruppe G/H bezüglich der Quotiententopologie eine top. Gruppe.*

BEWEIS. Sei $p : G \to G/H$ die kanonische Projektion $p(x) : x \mapsto \overline{x} = xH$ und $(\overline{x}_0, \overline{y_0}) \in (G/H \times G/H)$. Eine Umgebung von $\overline{x}_0 \cdot \overline{y}_0$ in G/H hat die Form $p(U)$, wo U eine $x_0 \cdot y_0$–Umgebung in G ist. Es existieren also ein x_0–Umgebung V und eine y_0–Umgebung W in G mit $V \cdot W = \{x \cdot y : x \in V, y \in W\} \subset U$. Dann aber gilt $p(V \cdot W) = p(V) \cdot p(W) \subset p(U)$, d.h. die Abbildung $(\overline{x}_0, \overline{y_0}) \mapsto \overline{x}_0 \cdot \overline{y_0}$ ist stetig. Analoges zeigt man für die Inversenbildung. $\square$

Bezüglich des Zusammenhanges zwischen Faktorisierung und Produktbildung gilt folgender

SATZ 2.3. *Sei H_i Untergruppe der top. Gruppe G_i für $i = 1, 2, \ldots, n$. Die Abbildung $\Phi : G_1/H_1 \times \cdots \times G_n/H_n \to G_1 \times \cdots \times G_n/H_1 \times \cdots \times H_n$, definiert durch*

$$\Phi((x_1H_1, \ldots, x_nH_n)) = (x_1, \ldots, x_n) \cdot (H_1 \times \cdots \times H_n)$$

ist eine Homöomorphie. Sind alle H_i Normalteiler, dann ist Φ eine Isomorphie.

Einen Beweis dieses Satzes sowie eine ausführliche Darstellung der Grundlagen der Theorie topologischer Gruppen findet man in [**HR**], Band 1.

BEISPIEL 2.2. Der n–dimensionale Torus ist eine kompakte, zusammenhängende Gruppe.

$$\mathbf{R}^n/(2\pi\mathbf{Z})^n \sim (\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z})^n \sim \mathbf{T}^n.$$

Das folgende Konzept ist grundlegend in der Gruppentheorie und der Harmonischen Analysis. Im Falle Abelscher Gruppen wird es wieder die besondere Rolle der früher definierten Charaktere zeigen.

DEFINITION 2.2. Sei G top. Gruppe, E top. Vektorraum über $\mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$. Bezeichne $GL(E)$ die Gruppe der top. Automorphismen von E. Ein Homomorphismus, also eine Abbildung

$$U : G \to GL(E), \quad s \mapsto U_s \text{ mit } \quad U_{s \cdot t} = U_s \circ U_t$$

heißt *stetige lineare Darstellung von G in E*, falls folgende Bedingung erfüllt ist: die Abbildung

$$G \ni s \mapsto U_s x \in E$$

ist stetig für alle $x \in E$.

Man nennt dies auch eine Darstellung von G mit Darstellungsraum E. Ist $\dim E < \infty$, dann heißt $\dim E$ die *Dimension* oder der *Rang* der Darstellung.

Ist F Unterraum von E mit $U_s(F) \subset F$ für alle $s \in G$, dann heißt F *stabil gegen* oder *invariant* unter U, kurz U–stabil.

Eine lineare Darstellung U heißt *irreduzibel*, falls $\{0\}$ und E die einzigen abgeschlossenen U–stabilen Unterräume sind.

Zwei Darstellungen $U^1 : G \to GL(E_1)$, $U^2 : G \to GL(E_2)$ heißen *äquivalent*, falls es einen top. Vektorraum–Isomorphismus $T : E_1 \to E_2$ gibt, sodaß für alle $s \in G$ gilt $U_s^2 = T \circ U_s^1 \circ T^{-1}$. Anders ausgedrückt: das folgende Diagramm ist kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{T} & E_2 \\ {\scriptstyle U_s^1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle U_s^2} \\ E_1 & \xrightarrow{T} & E_2 \end{array}$$

Zwei endlichdimensionale Darstellungen sind also äquivalent, falls ihre Matrizendarstellungen bei einer geeigneten Basistransformation der Darstellungsräume E_1, E_2 gleich sind.

Ist E ein komplexer Hilbertraum und sind die U_s unitär, dann spricht man von einer *unitären* Darstellung. Analog heißen U^1, U^2 *unitär äquivalent*, wenn T ein Hilbertraum–Isomorphismus ist.

Die Menge der Äquivalenzklassen irreduzibler unitärer Darstellungen heißt das *Dual von* G, in Zeichen $\widehat{G}$.

Falls F ein U–stabiler Teilraum von E ist, definieren die Einschränkungen $U_s|F : F \to F$ eine *Teildarstellung*.

Für den Fall einer endlichen Gruppe G und $\dim E < \infty$ einige Bemerkungen und Sätze, die jedoch auch in sehr viel allgemeineren Situationen gültig bleiben:

a) Zunächst können wir annehmen, daß E versehen ist mit einem U–invarianten inneren Produkt, d.h. für alle $s \in G,\ x, y \in E$ gilt

$$< x, y > = < U_s x, U_s y > .$$

Dies ist gleichbedeutend mit der Annahme, daß alle U_s unitär sind. Ist dies nämlich nicht der Fall, so können wir ein solches inneres Produkt definieren durch

$$(x, y) := \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} < U_s x, U_s y > .$$

Dann aber ist mit F auch das orthogonale Komplement $F^\perp$ U–stabil:

Sei nämlich $E = F \bigoplus F^{\perp}$, $x \in F, y \in F^{\perp}, s \in G$. Dann gilt

$$< x, U_s y > = < U_{s^{-1}} x, y > = 0,$$

da ja $U_{s^{-1}} x \in F$. Setzen wir $V_s := U_s|F$, $V_s^{\perp} := U_s|F^{\perp}$, dann gilt für $x = w + w^{\perp}$ mit $w \in F, w^{\perp} \in F^{\perp}$: $U_s x = U_s w + U_s w^{\perp}$, also

$$U_s = V_s \bigoplus V_s^{\perp} : F \bigoplus F^{\perp} \to F \bigoplus F^{\perp}.$$

U ist also die direkte Summe zweier Teildarstellungen. Umgekehrt ist natürlich die direkte Summe von zwei Teildarstellungen selbst eine Darstellung von G in E. Die darstellenden Matrizen von $E = F \bigoplus F^{\perp}$ haben also die Blockform

$$\begin{bmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_s^{\perp}. \end{bmatrix}$$

Eine analoge Aussage gilt dann für endliche direkte Summen.

Satz 2.4. *Jede lineare Darstellung einer endlichen Gruppe ist die direkte Summe irreduzibler Darstellungen.*

Beweis. Induktion über $\dim E$. Sei $U : G \to GL(E)$ eine Darstellung. Falls $\dim E = 1$, ist die Aussage klar. Sie gelte für alle Darstellungen vom Grad $< n$ und sei nun $\dim E = n$. Ist U irreduzibel, so sind wir fertig. Falls nicht, dann gilt $E = F \bigoplus F^{\perp}$ mit U–stabilen $F, F^{\perp}$ und $0 < \dim F, F^{\perp} < n$. Nach Induktionsannahme zerfallen $F, F^{\perp}$ (d.h. die Einschränkung von U auf die Teilräume ist nicht weiter reduzibel) in die direkte Summe irreduzibler Teiräume und somit auch E. □

Satz 2.5 (Lemma von I. Schur). *Sei E ein Hilbertraum über $\mathbf{C}$, $\mathfrak{U}$ eine Familie unitärer Operatoren $U : E \to E$, für die es keinen echten invarianten Teilraum gibt. Sei $A : E \to E$ linear, stetig und kommutierend mit allen U, d.h. für alle $U \in \mathfrak{U}$ gilt $U \circ A = A \circ U$. Dann existiert ein $\lambda \in \mathbf{C}$ mit $A = \lambda I_E$. A ist also eine Homothetie.*

Beweis. Zunächst können wir annehmen, daß A selbstadjungiert ist. Für beliebiges A ist ja

$$A = \frac{1}{2}(A + A^*) + i\frac{1}{2i}(A - A^*) =: C + iD. \tag{2.1}$$

Aus der Eindeutigkeit der Zerlegung (2.1) in die selbstadjungierten Anteile C, D folgt dann: A kommutiert mit allen $U \in \mathfrak{U}$ genau dann, wenn dies für C und D gilt. Sei also o.B.d.A. $A = A^*$. Das Spektrum von A ist nicht leer und zu einem Eigenwert λ betrachten wir $B := A - \lambda I_E$. Dann gilt auch $U \circ B = B \circ U$ für alle $U \in \mathfrak{U}$. Sei $F = \ker B$. Es ist $F \neq \{0\}$, F ist abgeschlossen und $\mathfrak{U}$–stabil:
ist nämlich $x \in F$, also $Bx = 0$, dann folgt aus $U(Bx) = B(Ux) = 0$ auch $Ux \in F$. Also folgt $F = E$, d.h. $\bigvee_{x \in E} \quad Ax - \lambda x = 0$. □

Für eine Übertragung dieses Satzes auf unendlichdimensionale Hilberträume benötigt man den Spektralsatz.

SATZ 2.6. *Jede irreduzible Darstellung U einer abelschen topologischen Gruppe in einem komplexen Hilbertraum E hat die Dimension 1.*

BEWEIS. Sei $\mathfrak{U} = \{U_t : t \in G\}$ und $A = U_s$. Nach dem Lemma von Schur existiert ein $\lambda_s \in \mathbf{C} - \{0\}$ mit $U_s = \lambda_s I_E$. Wegen der Irreduzibilität folgt $\dim E = 1$. Die Stetigkeit der Abbildung $s \mapsto \lambda_s$ folgt aus der vorausgesetzten Stetigkeit von $G \ni s \mapsto \lambda_s x \in E$ für ein $0 \neq x \in E$. $\square$

Damit $U_s = \lambda_s I_E$ unitär ist auf dem 1–dimensionalen Raum $E = \mathbf{C}$, muß außerdem gelten $|\lambda_s| = 1$ und weiter gilt (bei additiver Schreibweise von G)

$$\lambda_{s+t} I = U_{s+t} = \lambda_s \lambda_t I.$$

Somit entspricht einer irreduziblen Darstellung der abelschen Gruppe G ein stetiger Charakter $\chi : G \to \mathbf{T}$ im früheren Sinn. Umgekehrt definiert jeder solche Charakter eine irreduzible Darstellung von G der Dimension 1. Zusammenfassend erhalten wir

SATZ 2.7. *Bei einer topologischen abelschen Gruppe G kann das Dual $\widehat{G}$ mit der Menge der Charaktere von G identifiziert werden. $\widehat{G}$ ist bezüglich der Multiplikation der Charaktere wieder eine abelsche Gruppe (d.h. ist $\chi_1, \chi_2, \chi \in \widehat{G}$, dann ist auch $\chi_1\chi_2 \in \widehat{G}$ und ebenso $1/\chi = \overline{\chi} \in \widehat{G}$), die mit einer geeigneten Topologie versehen zu einer topologischen Gruppe wird (s.g. kompakt–offene Topologie).*

SATZ 2.8. *Seien G_1, G_2 top. abelsche Gruppen. Dann gilt $\widehat{G_1 \times G_2} = \widehat{G_1} \bigotimes \widehat{G_2}$. Dabei ist $\widehat{G_1} \bigotimes \widehat{G_2}$ die Menge aller Tensorprodukte $\chi_1 \bigotimes \chi_2 : G_1 \times G_2 \to \mathbf{T}$, definiert durch $\chi_1 \bigotimes \chi_2(x_1, x_2) := \chi_1(x_1)\chi_2(x_2)$ mit $\chi_i \in \widehat{G_i}$, $x_i \in G_i$.*

BEWEIS. Offenbar ist $\chi_1 \bigotimes \chi_2(x_1, x_2) \in \widehat{G_1 \times G_2}$, also $\widehat{G_1} \bigotimes \widehat{G_2} \subset \widehat{G_1 \times G_2}$. Sei umgekehrt $\chi : G_1 \times G_2 \to \mathbf{T}$ ein Charakter. Dann gilt für beliebige $(x_1, x_2) \in G_1 \times G_2$:

$$\chi((x_1, x_2)) = \chi((x_1, e_1) + (e_1, x_2)) = \chi((x_1, e_1))\chi((e_1, x_2)).$$

Dabei ist e_i das neutrale Element in G_i. Dann aber ist

$$x_i \mapsto \chi_i(x_i) := \chi((x_i, e_i)) \in \widehat{G_i}$$

und $\chi = \chi_1 \bigotimes \chi_2$. $\square$

BEMERKUNG 2.1. 1.) Wir wissen bereits $\widehat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$, $\widehat{\mathbf{T}} = \mathbf{Z}$. Wir bestimmen nun $\widehat{\mathbf{Z}}$: Sei dazu $\chi : \mathbf{Z} \to \mathbf{T}$ ein Charakter. Wegen $\chi(m) = (\chi(1))^m$ ist χ durch den Wert $\chi(1)$ festgelegt. Wegen $|\chi(1)| = 1$ existiert ein $x \in \mathbf{R}$ mit $\chi(1) = e^{ix}$, sodaß $\chi(m) = e^{imx}$. Dann gilt dies auch für jedes $y \in x + 2\pi\mathbf{Z}$, d.h. $\chi(1)$ ist festgelegt durch die Restklasse $x + 2\pi\mathbf{Z}$. Wir erhalten daher

$$\widehat{\mathbf{Z}} = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} = \mathbf{T}.$$

Aus dem vorigen Satz folgt $\widehat{\mathbf{T}^n} = \mathbf{Z}^n$ und $\widehat{\mathbf{Z}^n} = \mathbf{T}^n$, insgesamt also

$$\widehat{\widehat{\mathbf{T}^n}} = \mathbf{T}^n, \quad \widehat{\widehat{\mathbf{Z}^n}} = \mathbf{Z}^n, \quad \widehat{\widehat{\mathbf{R}^n}} = \mathbf{R}^n.$$

Dies sind Spezialfälle des *Dualitäts–Satzes* von Pontyagin–Van Kampen, wonach für jede lokalkompakte abelsche Gruppe G gilt $\hat{\hat{G}} = G$.

2.) Für die additive Gruppe der Reste mod(n) $G = \mathbf{Z}(n) = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ (mit der diskreten Topologie) ist die Charaktergruppe identisch mit der Gruppe der n–ten Einheitswurzeln:

$$\widehat{G} = \left\{ e^{i\frac{2\pi}{n}k} : 0 \leq k \leq n-1 \right\}.$$

Dies folgt mit einem ähnlichen Argument, wie in 1.).

Satz 2.9. *Die Charaktere der additiven Gruppe* $\mathbf{R}^n$ *werden durch die Funktionen* χ_y : $\mathbf{R}^n \ni x \mapsto e^{i<y,x>} \in \mathbf{T}$, $(y \in \mathbf{R}^n)$ *gegeben:*

$$\chi_y(x) = e^{i(\xi_1\eta_1 + \cdots + \xi_n\eta_n)} \quad x = (\xi_1, \ldots, \xi_n),\ y = (\eta_1, \ldots, \eta_n).$$

$\mathbf{R}^n$ *ist also selbstdual:* $\widehat{\mathbf{R}}^n = \mathbf{R}^n$.

Die Charaktere von $\mathbf{T}^n$ *haben die Gestalt*

$$\chi_m(\overline{x}) = e^{i(\xi_1 m_1 + \cdots + \xi_n m_n)} \quad \overline{x} = (\xi_1, \ldots, \xi_n) + 2\pi\mathbf{Z}^n,\ m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbf{Z}^n.$$

Es folgen nun einige elementare Aussagen über Fourier–Reihen in mehreren Veränderlichen. Wie für $n = 1$ werden dazu Funktionen $\overline{f} : \mathbf{T}^n \to \mathbf{C}$ identifiziert mit Funktionen $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$, die in allen Variablen 2π–periodisch sind. Sei $p : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n/(2\pi\mathbf{Z}) = \mathbf{T}^n$ die Projektion $\mathbf{R}^n \ni x \mapsto \overline{x} := x + (2\pi\mathbf{Z})^n$, dann ist durch die Gleichung $f = \overline{f} \circ p$ eine 1–1–Beziehung zwischen den 2π–periodischen Funktionen auf $\mathbf{R}^n$ und den Funktionen auf $\mathbf{T}^n$ hergestellt.

Sei $I = [-\pi, \pi]$ und $I^n \subset \mathbf{R}^n$ der entsprechende (kompakte) Würfel in $\mathbf{R}^n$. Sei dx die Einschränkung des Lebesgue–Maßes von $\mathbf{R}^n$ auf I^n und $d\overline{x}$ das Bildmaß von dx unter der Projektion p, dann geht der Rand ∂I^n von I^n (eine 0–Menge bezüglich dx) in eine 0–Menge bezüglich $d\overline{x}$ über und wir können $L^q(\mathbf{T})$ identifizieren mit $L^q(I^n)$, dem Raum der abslolut q–integrablen, in allen Variablen 2π–periodischen Funktionen auf I^n. Es gilt dann

$$\int_{\mathbf{T}^n} \overline{f}(\overline{x}) d\overline{x} = \int_{I^n} f(x) dx.$$

$d\overline{x}$ ist dann ein *translations–invariantes* Maß auf $\mathbf{T}^n$ und es gilt (dabei lassen wir nun die Überstriche weg und schreiben $\mathbf{T}^n$ additiv)

$$\int_{\mathbf{T}^n} \overline{f}_y(x) dx = \int_{\mathbf{T}^n} f(x) dx.$$

Dabei ist die translatierte Funktion $f_y : \mathbf{T}^n \to \mathbf{C}$ definiert durch $f_y(x) = f(x-y)$ Wir bemerken, daß wegen der Kompaktheit von $\mathbf{T}^n$ gilt

$$L^q(\mathbf{T}^n) \subset L^1(\mathbf{T}^n) \quad (1 \leq q).$$

Satz 2.10 (Orthonormalität der Charaktere). *Bezeichne* $m = (m_1, \dots m_n) = (m_j)_{1 \le j \le n} \in \mathbf{Z}^n$ *einen Multiindex. Dann gilt*
(2.2)
$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{T}^n} \chi_m(x) dx = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{I^n} e^{i <m,x>} dx = \prod_{1 \le j \le n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\, m_j x_j} dx_j = \begin{cases} 1 & \text{für } m = 0 \\ 0 & \text{für } m \neq 0. \end{cases}$$

Daraus folgen die Orthonormalitäts–Relationen der Charaktere

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{T}^n} \chi_l(x) \overline{\chi}_m(x) dx = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{T}^n} \chi_{l-m}(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{für } l = m \\ 0 & \text{für } l \neq m. \end{cases} \tag{2.3}$$

Sei nun G eine abelsche, topologische Gruppe und $Z \subset \widehat{G}$. Eine Linearkombination

$$p = \sum_{\chi \in Z} c_\chi \chi$$

mit nur endlich vielen $0 \neq c_\chi \in \mathbf{C}$ bezeichnet man als *Z–spektrales trigonometrisches Polynom* auf G. Innerhalb des Raumes $C(G)$ der stetigen Funktionen $f : G \to \mathbf{C}$ bezeichne $\mathfrak{T}_Z(G)$ den Unterraum der Z–spektralen trigonometrischen Polynome.

Im Falle $G = \mathbf{T}^n$ ist ein Z–spektrales Polynom von der Form

$$p(x) = \sum_{m \in Z} c_m e^{i <x,m>}$$

und wegen der Orthonomalitäts–Relationen erhalten wir

$$c_m = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{T}^n} p(x) e^{-i <x,m>} dx = \widehat{p}(m)$$

und weiter

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{T}^n} |p(x)|^2 dx = \sum_{m \in Z} |\widehat{p}(m)|^2.$$

Dadurch motiviert definieren wir wie im Falle $n = 1$ für $f \in L^1(\mathbf{T}^n)$ die Fourier–Reihe

$$f \sim \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} \hat{f}(m) \chi_m \quad \text{bzw.}$$
$$f(x) \sim \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} \widehat{f}(m) e^{i <m,x>}$$

mit den *Fourier–Koeffizienten*

$$\widehat{f}(m) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{I^n} f(x) e^{-i <x,m>} dx =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} f(\xi_1, \dots, \xi_n) e^{-i (m_1 \xi_1 + \cdots + m_n \xi_m)} d\xi_1 \cdots d\xi_n.$$

Aus der Hilbert–Raum–Theorie erhalten wir sofort

SATZ 2.11. *Sei $Z \subset \mathbf{T}^n$ und $f \in L^2(\mathbf{T}^n)$. Ein Z–spektrales Polynom $p = \sum_{m \in Z} c_m \chi_m$ approximiert f im L^2–Mittel genau dann optimal, falls gilt: $c_m = \widehat{f}(m)$. Genauer*

$$||f - p||_2 \geq ||f - \sum m \in Z \widehat{f}(m) \chi_m||.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $c_m = \hat{f}(m)$. Weiters gilt die Besselsche Ungleichung

$$\sum_{m \in Z} |\widehat{f}(m)|^2 \leq ||f||_2^2.$$

SATZ 2.12. *Das ON–System $\{\chi_m : m \in \mathbf{Z}^n\}$ der Charaktere von $\mathbf{T}^n$ ist vollständig in $L^2(\mathbf{T}^n)$, d.h.*

$$\bigwedge_{m \in \mathbf{Z}^n} \int f \overline{\chi}_m = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0 \quad \textit{fast überall.}$$

BEWEIS. Aus $\int_{\mathbf{T}^n} \overline{\chi}_m = 0$ folgt $\int_{\mathbf{T}^n} \overline{p} = 0$ für alle trigonometrischen Polynome. Diese liegen nach dem Satz von Stone–Weierstraß dicht in $C(\mathbf{T}^n)$ (Es gibt genügend viele Charaktere, d.h. sie trennen die Punkte von $\mathbf{T}^n$!) bezüglich der gleichmäßigen Konvergenz, also auch bezüglich der L^2–Konvergenz. $C(\mathbf{T}^n)$ aber liegt dicht $L^2(\mathbf{T}^n)$. Somit ist f orthogonal zu allen $L^2(\mathbf{T}^n)$–Funktionen und daher f.ü. 0. □

Daraus folgt sofort

SATZ 2.13. *Die Fourier–Transformation $\mathcal{F} : f \mapsto (\widehat{f}(m))_{m \in \mathbf{Z}^n}$ ist ein Hilbert–Raum–Isomorphismus und es gilt die Parsevalsche Gleichung*

$$||f||_2 = \Big(\sum_{m \in \mathbf{Z}^n} |\widehat{f}(m)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Dieser Satz läßt sich im Sinne der Darstellungstheorie interpretieren:

Die Verschiebungs–Operatoren $T_a : L^2(\mathbf{T}^n) \to L^2(\mathbf{T}^n)$, definiert durch $(T_a f)(x) = f(x-a)$ bilden via $\mathbf{T}^n \ni a \mapsto T_a$ offenbar eine unitäre Darstellung von $\mathbf{T}^n$ in den komplexen Hilbert–Raum $L^2(\mathbf{T}^n)$. Es ist die sogenannte *reguläre Darstellung* von $\mathbf{T}^n$ in $L^2(\mathbf{T}^n)$.

Andererseits liefern die Operatoren $V_a : l_2(\mathbf{Z}^n) \to l_2(\mathbf{Z}^n)$, definiert durch $l_2(\mathbf{Z}^n) \ni c \mapsto (V_a(c)(m)) = (\overline{\chi}_m(a) c_m) \in l_2(\mathbf{Z}^n)$ eine unitäre Darstellung von $\mathbf{T}^n$ in $l_2(\mathbf{Z}^n)$. Wegen der leicht nach zurechnenden Beziehung

$$\widehat{f_a}(m) = \overline{\chi}_m(a) \cdot \widehat{f}(m)$$

(vgl. Kap.1 Formel (1.15)) erhalten wir folgendes, kommutative Diagram

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbf{T}^n) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & l_2(\mathbf{Z}^n) \\ {\scriptstyle T_a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle V_a} \\ L^2(\mathbf{T}^n) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & l_2(\mathbf{Z}^n) \end{array}$$

und nach dem vorigen Satz sind daher beide Darstellungen unitär äquivalent. $L^2(\mathbf{T}^n)$ zerfällt dabei in die direkte Summe der 1–dimensionalen (und daher minimal) invarianten Teilräume, die von den Charakteren χ_m aufgespannt werden. Die Operatoren T_a bekommen unter der (isometrischen) Fourier–Transformation die Diagonalgestalt V_a.

KAPITEL 5

Einige Anwendungen der Fourier–Reihen.

1. Isoperimetrische Ungleichung.

SATZ 1.1. *[Wirtinger's Ungleichung] Sei f 2π–periodisch mit $f' \in L^2(\mathbf{T})$ und $\int_0^{2\pi} f = 0$. Dann gilt*

$$\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt \geq \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $f(t) = ae^{-it} + be^{it} \quad (a, b \in \mathbf{C})$. Ist f reell, dann gilt Gleichheit genau, wenn $f(t) = a\cos t + b\sin t, \quad (a, b \in \mathbf{R})$.

BEWEIS. Aus der Parsevalschen Gleichung und wegen $(f')\hat{} = in\hat{f}(n)$ erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'|^2 dt = \sum_{n\neq 0} n^2 |\hat{f}(n)|^2 \geq \sum_{n\in\mathbf{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt.$$

Gleichheit gilt offenbar genau dann, wenn $\hat{f}(n) = 0$ für $|n| > 1$. In diesem Fall ist

$$f(t) = \hat{f}(-1)e^{-it} + \hat{f}(1)e^{it} = ae^{-it} + be^{it}.$$

Ist f (und damit f') reell, dann ist $\hat{f}(-1) = \overline{\hat{f}(1)}$ und daher

$$f(t) = 2\mathrm{Re}\{\hat{f}(1)e^{it}\} = a\cos t + b\sin t.$$

Die Annahme $\int f = 0$ ist nötig: die Ungleichung ist offenbar falsch für konstante f. $\square$

Der folgende Zusammenhang zwischen der Isoperimetrischen Ungleichung und der Wirtinger–UGL ist entnommen aus [**Os**].

SATZ 1.2 (Isoperimetrie des Kreises). *Der Kreis ist eindeutig durch folgende Eigenschaft charakterisiert: Unter allen (einfach) geschlossenen Kurven $\mathcal{C}$ gegebener Länge L umschließt der Kreis die größte Fläche A. Dies ist gleichbedeutend mit der Isoperimetrischen Ungleichung*

$$L^2 \geq 4\pi A.$$

Hier gilt Gleichheit genau dann, wenn $\mathcal{C}$ ein Kreis ist.

SATZ 1.3. *Die Wirtinger–UGL ist äquivalent zur Isoperimetrischen UGL für alle geschlossenen glatten (d.h. C^1–)Kurven. Gleichheit gilt nur für den Kreis.*

BEWEIS. Wir können o.B.d.A. annehmen,daß $\mathcal{C}$ einfach geschlossen ist (wieso?) und eine Parameter–Darstellung $(x(t), y(t))$ besitzt mit 2π–periodischen C^1–Funktionen x, y. Für die Bogenlänge L von $\mathcal{C}$ und für die von $\mathcal{C}$ eingeschlossene Fläche A gilt

$$L = \int_0^{2\pi} \Big(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\Big)^{\frac{1}{2}} dt, \quad A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \Big(x\dot{y} - \dot{x}y\Big) dt.$$

Mit der Umparametrisierung $t = \frac{2\pi}{L} \cdot s$ (s Bogenlänge) gilt

$$\int_0^{2\pi} \Big(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\Big) dt = \int_0^{2\pi} \Big(\frac{ds}{dt}\Big)^2 dt = \frac{L^2}{2\pi}$$

und daher

$$\begin{aligned} L^2 - 4\pi A &= 2\pi \int_0^{2\pi} \Big(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - x\dot{y} + \dot{x}y\Big) \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} \Big[(\dot{x} + y)^2 - 2\dot{x}y - y^2 + \dot{y}^2 - x\dot{y} + \dot{x}y\Big] = \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} (\dot{x} + y)^2 + 2\pi \int_0^{2\pi} (\dot{y}^2 - y^2) - 2\pi \int_0^{2\pi} (x\dot{y} + \dot{x}y). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Das letzte Integral der letzten Zeile ist gleich $2\pi(xy)|_0^{2\pi} = 0$ wegen der 2π–Periodizität. Das erste ist jedenfalls ≥ 0 und das zweite wegen der Wirtinger UGL, wenn nur $\int y = 0$. Dies aber können wir o.B.d.A. annehmen, indem wir den Schwerpunkt der Kurve zum Ursprung machen ($\int y$ ist gerade dessen y–Koordinate).

Gleichheit tritt genau dann ein, wenn $\dot{x} + y = 0$ und $\int \dot{y}^2 = \int y^2$. Aus Satz 1.1 folgt

$$\begin{aligned} y(t) &= a\cos t + b\sin t = -\dot{x} \quad \text{somit} \\ x(t) &= -a\sin t + b\cos t. \end{aligned}$$

Dann aber ist $\mathcal{C}$ ein Kreis.

Wir nehmen nun umgekehrt die Isoperimetrische UGL an. Sei y eine 2π–periodische C^1–Funktion mit $\int y = 0$. Wir setzen $x(t) = -\int_0^t y(\tau)d\tau$. Dann ist auch x 2π–periodisch. Durch $(x(t), y(t))$ ist eine geschlossene C^1–Kurve definiert. Aus der angenommenen

Gültigkeit der Isoperimetrischen UGL und der Cauchy–Schwarz–UGL, aus der Definition von x und aus 1.1 folgt

$$\begin{aligned} 0 \leq L^2 - 4\pi A &= \left(\int_0^{2\pi} \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 - 2\pi \int (\dot{x}y - x\dot{y}) \\ &\leq 2\pi \int_0^{2\pi} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - 2\pi \int (x\dot{y} - \dot{x}y) \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} (\dot{x} + y^2) + 2\pi \int_0^{2\pi} (\dot{y}^2 - y^2) \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} (\dot{y}^2 - y^2). \end{aligned}$$

Also gilt die Wirtinger–UGL. Ist das letzte Integral 0, dann besteht Gleichheit in der vorigen Ungleichungskette und somit

$$\left(\int_0^{2\pi} \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 = 2\pi \int_0^{2\pi} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2),$$

d.h. Gleichheit in der Cauchy–Schwarz–UGL und es folgt $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (ds/dt)^2 = c^2$. Wegen $\dot{x} = y$ erhalten wir für y die DGL

$$y^2 + \dot{y}^2 = c^2$$

mit der allgemeinen Lösung $y(t) = c\sin(t - \alpha) = a\cos t + b\sin t$. □

Bezüglich ganz anderer Beweise und Erweiterung der Isoper. UGL und einer Übertragung der Wirtinger–UGL auf die Kugel vgl. [**Bl**] §23.

2. Gleichverteilung in T.

DEFINITION 2.1. Eine Folge $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ von Punkten $x_m \in \mathbf{T}$ heißt gleichverteilt, wenn für alle $f \in C(\mathbf{T})$ gilt

$$\int_{\mathbf{T}} f(x)dx = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} f(x_m). \tag{2.1}$$

Zur Motivation des Begriffes bemerken wir, daß sich die Beziehung (2.1) auf alle L^1–Funktionen, insbesondere also auf die Indikator–Funktionen meßbarer Teilmengen $A \subset \mathbf{T}$ anwenden läßt. Dies bedeutet dann

$$\int_{\mathbf{T}} \chi_A(x)dx = |A| = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \chi_A(x_m) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} \#\{m \leq M : x_m \in A\}.$$

Interpretieren wir den Index m als Zeitpunkt nach m Sekunden, so ist also die „mittlere Verweilzeit der Folge in A gleich dem Maß von A. Dies entspricht dem Ergodenprinzip von

Boltzmann–Gibbs: *Zeitmittel und Phasenmittel einer mechanischen Größe sind gleich*, hier modelliert in folgender Weise:

$\mathbf{T}$ ist der Phasenraum, $f \in C(\mathbf{T})$ ist die mechanische Größe, das Phasenmittel ist $\int_{\mathbf{T}} f(x)dx$, x_m ist die Phase zum Zeitpunkt m und das Zeitmittel ist

$$\lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} f(x_m).$$

SATZ 2.1 (Weylsches Kriterium). *Die Folge $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ von Punkten $x_m \in \mathbf{T}$ ist genau dann gleichverteilt, wenn für alle Charaktere $\chi \neq 1$ von $\mathbf{T}$ gilt*

$$\lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \chi(x_m) = 0.$$

BEWEIS. Die Notwendigkeit der Bedingung ist klar, da jeder Charakter $\neq 1$ nach Kap.4 (2.2) den Mittelwert 0 hat: $\int_{\mathbf{T}} \chi = 0$.

Die Bedingung ist auch hinreichend: Sei $\epsilon > 0$. Da die trigonometrischen Polynome p dicht liegen in $C(\mathbf{T})$, wählen wir ein p so, daß $||f-p||_\infty < \epsilon/3$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbf{T}} f(x)dx - \frac{1}{M} \sum_{1\le m\le M} f(x_m) \right| \le \\
&\le \left| \int_{\mathbf{T}} (f-p) \right| + \left| \int_{\mathbf{T}} p - \frac{1}{M} \sum_{1\le m\le M} p(x_m) \right| + \left| \frac{1}{M} \sum_{1\le m\le M} (f(x_m) - p(x_m)) \right| \\
&\le 2\frac{\epsilon}{3} + \left| \int_{\mathbf{T}} p - \frac{1}{M} \sum_{1\le m\le M} p(x_m) \right| < \epsilon
\end{aligned}$$

für genügend große M. □

SATZ 2.2 (Bohl). *Für $\theta \in \mathbf{R}$ ist die Folge $\{m\theta \,(mod\, 2\pi) \,:\, m = 0,1,2,\dots\}$ genau dann gleichverteilt in $\mathbf{T}$, wenn θ irrationales Vielfaches von π ist.*

BEWEIS. Sei $\chi_k(x) = e^{ikx},\ k \neq 0$. Dann gilt

$$\frac{1}{M} \sum_{0}^{M-1} e^{ik\theta m} = \frac{1}{M} \frac{e^{ik\theta M} - 1}{e^{ik\theta} - 1} \to 0$$

genau dann, wenn $\theta \neq \frac{l}{k} 2\pi$. □

Der Satz ist gleichbedeutend mit der Aussage, daß die maßtreue Transformation $T : \mathbf{T} \to \mathbf{T}$, definiert durch $T(\alpha) = \alpha + \theta$ genau dann *ergodisch* ist, wenn θ irrationales Vielfaches von π ist.

Beispiel 2.1. Die Folge $\{\log m \,(\mathrm{mod} 2\pi)\}$ ist *nicht* gleichverteilt. Um dies zu sehen, verwenden wir das Weylsche Kriterium für den Charakter $\chi(x) = e^{ix}$ und untersuchen

$$\frac{1}{M}\sum_{1}^{M} e^{i\,\log m} = \frac{1}{M}\big(1+\cos(\log 2)+\cdots+\cos(\log M)\big)+i\frac{1}{M}(\sin(\log 2)+\cdots+\sin(\log M)).$$

Diese Folge müßte gegen 0 gehen. Das ist aber nicht der Fall. Um das zu sehen, verwenden wir die Eulersche Summenformel. Eine Variante davon lautet (vgl. [**E**], Band 2, Seite 47):

$$\sum_{\nu=0}^{n} f(\nu) = \frac{f(0)+f(n)}{2} + \int_0^n \left(x-[x]-\frac{1}{2}\right) f'(x)dx + \int_0^n f(x)dx.$$

Angewendet auf den Realteil erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{M}\big(1+\cos(\log 2)+\cdots+\cos(\log M)\big) = \frac{1}{M}\sum_{0}^{M-1}\cos(\log(m+1)) = \\
&= \frac{1}{M}\frac{1+\cos(\log(M))}{2} + \frac{1}{M}\int_0^{M-1}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)(-\sin(\log(x))\frac{1}{x}dx+ \\
&+ \frac{1}{M}\int_0^{M-1}\cos(\log(x))dx.
\end{aligned}$$

Der erste und der zweite Summand gehen gegen 0 für $M \to \infty$. Für den letzten Summanden gilt

$$\frac{1}{M}\int_0^{M-1}\cos(\log(x))dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{M-1}{M}\sin\big(\log(M-1)+\frac{\pi}{4}\big).$$

Diese Folge oszilliert.

3. Irrfahrten in $\mathbf{Z}^d$. Der Satz v. Polya.

Die folgende Darstellung ist eine modifizierte Version jener aus dem Buch [**DK**].

Ein Teilchen bewege sich im d–dimensionalen Gitter $\mathbf{Z}^d$ nach folgender Vorschrift: zum „Zeitpunkt“ $n = 0$ befindet sich das Teilchen im 0–Punkt und macht zum Zeitpunkt $n \geq 1$ einen zufälligen „Einheitsschritt“ e_n zu einem der benachbarten Gitterpunkte. Z.B. sind für $d = 3$ die möglichen Einheitsschritte

$$e \in \mathcal{E} = \{(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1)\}$$

Im allgemeinen Fall ist die Anzahl der Einheitsschritte $|\mathcal{E}| = 2d$. Die Position des Teilchen zum Zeitpunkt n ist dann

$$s_n = e_1 + e_2 + \cdots + e_n.$$

Wir nehmen an, daß der „Schritt“ e_n statistisch unabhängig ist von den vorhergehenden Schritten $e_j : 1 \leq j \leq n-1$ und daß alle Schritte gleichwahrscheinlich sind, d.h. für die

Wahrscheinlichkeit, der Reihe nach die Schritte $e_1, e_2, \ldots, e_n$ zu machen, gilt

$$P(e_1, e_2, \ldots, e_n) = P(e_1)P(e_2)\cdots P(e_n) = \frac{1}{(2d)^n}.$$

Dies ist also das übliche Laplacesche W–Maß auf dem n–fachen kartesischen Produkt $\mathcal{E}^n = \mathcal{E} \times \cdots \times \mathcal{E}$.

Polya untersucht die Wahrscheinlichkeit $P(s_n = k)$, daß sich also das Teilchen nach n Schritten im Punkt $k \in \mathbf{Z}^d$ befindet und weiter das asymptotische Verhalten von s_n für $n \to \infty$. Das überraschende Ergebnis lautet:

SATZ 3.1 (Polya, 1921). *1.) Falls* $d = 1$ *oder* $d = 2$*, dann kehrt das Teilchen fast sicher (d.h. bei fast jeder Irrfahrt) unendlich oft zum 0–Punkt zurück.*
2.) Falls $d \geq 3$*, dann geht das Teilchen fast sicher gegen* ∞*, d.h.* $\lim_{n\to\infty} |s_n| = \infty$*, das Teilchen kehrt also fast sicher in keinen vorgegeben endlichen Bereich mehr zurück.*
3.) Im Falle $d = 3$ *beträgt die Wahrscheinlichkeit, wenigstens 1–mal zum 0–Punkt zurückzukehren, lediglich etwa* $0,34$

BEWEIS. Polya's Idee ist, die $P(s_n = k)$ als Fourier–Koeffizienten $\hat{f}(k)$ einer Funktion $f : \mathbf{T}^d \to \mathbf{C}$ aufzufassen. Da diese dann auf andere Art explizit berechnet werden kann, erhält man schließlich durch Berechnung der Fourier–Koeffizienten die gesuchten Wahrscheinlichkeiten. Es ist also eine Variante der *Methode der Erzeugenden Funktion.*

Wir setzen also für $x \in I^d$ und festes $n \in \mathbf{N}$

$$f(x) := \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} P(s_n = k)\, e^{i<k,x>}$$

und bemerken, daß dies der Erwartungswert ist von $e^{i<x,\cdot>}$ in $\mathbf{Z}^d$ bezüglich des W–Maßes $\mu(k) := P(e_1 + e_2 + \cdots + e_n = k)$ auf $\mathbf{Z}^d$. Dieses W–Maß ist aber nichts anderes, als das Bildmaß des obigen W–Maßes P auf $\mathcal{E}^n$ unter der Abbildung

$$\Omega := \mathcal{E}^n \ni (e_1, \ldots, e_n) \mapsto s_n = e_1 + \cdots + e_n \in \mathbf{Z}^d =: Z.$$

Wir können also unter Anwendung des allgemeinen Integraltransformations–Satzes

$$E(h \circ s) := \int_\Omega h \circ s(\omega) P(d\omega) = \int_Z h(z)(P \circ s^{-1})(dz)$$

diesen Erwartungswert auch in Ω berechnen und erhalten

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{(e_1,\ldots,e_n)\in\Omega} \frac{1}{(2d)^n} e^{i<x,e_1+\cdots+e_n>} \\ &= \Big(\sum_{e\in\mathcal{E}} \frac{1}{2d} e^{i<x,e>}\Big)^n \\ &= \Big(\frac{1}{d}(\cos x_1 + \cos x_2 + \cdots + \cos x_d)\Big)^n \\ &=: (f_d(x))^n. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Daraus ergibt sich nun

$$P(s_n = k) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{I^d} (f_d(x))^n e^{-i<x,k>} dx.$$

Insbesondere ergibt sich daraus der *Erwartungswert der Zahl der 0–Durchgänge*, also wie oft wir (unter Mitzählung des Startes) zum Ursprung zurückkehren, als

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(s_n = 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{I^d} (f_d(x))^n dx.$$

Eine formale Vertauschung von Summe und Integral (die Rechtfertigung folgt anschließend auf Grund der speziellen Art von f_d) liefert

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P(s_n = 0) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{I^d} \sum_{n=0}^{\infty} (f_d(x))^n dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{I^d} \frac{1}{1 - f_d(x)} dx. \end{aligned}$$

Der Integrand ist singulär an der Stelle $x = 0$ und es gilt:

$$\begin{aligned} 1 - f_d(x) &= 1 - \frac{1}{d}(\cos x_1 + \cos x_2 + \cdots + \cos x_d)\big) \\ &= \frac{1}{d}((1 - \cos x_1) + (1 - \cos x_2) + \cdots + (1 - \cos x_d)\big) \\ &= \frac{1}{2d}(\sin^2 \frac{x_1}{2} + \cdots + \sin^2 \frac{x_d}{2})\big) \\ &\sim \frac{1}{2d}\big((\frac{x_1}{2})^2 + \cdots + ((\frac{x_d}{2})^2\big). \end{aligned}$$

Letzteres für kleine x. In einer Kugel–Umgebung B_ϵ von 0 können wir das Integral daher leichter abschätzen durch Übergang zu Polarkoordinaten. Es ist

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{I^d} \frac{1}{1 - f_d(x)} dx = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{B_\epsilon} \frac{1}{1 - f_d(x)} dx + \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{I^d \setminus B_\epsilon} \frac{1}{1 - f_d(x)} dx. \end{aligned}$$

Beim zweiten Integral ist der Integrand beschränkt in $I^d \setminus B_\epsilon$ und wir erhalten

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{I^d} \frac{1}{1 - f_d(x)} dx \sim 4\omega_d \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{B_\epsilon} \frac{1}{r^2} r^{d-1} dr + K.$$

Dabei ist ω_d die Oberfläche der d–dimensionalen Einheitskugel und $0 < K < \infty$. Das letzte Integral divergiert aber für $d = 1, 2$ gegen ∞ und ist endlich für $d \geq 3$.

Daraus folgt zunächst der 2. Teil des Satzes von Polya: für den Erwartungswert der Anzahl der 0–Durchgänge bei einer Irrfahrt $\omega \in \mathcal{E}^\infty$ gilt

$$\begin{aligned} E\big(\sum_0^\infty 1_{\{0\}}(s_n(\omega))\big) &= \sum_0^\infty E\big(1_{\{0\}}(s_n(\omega))\big) \\ &= \sum_0^\infty P(s_n = 0) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{I^d} \frac{1}{1-f_d(x)}dx < \infty. \end{aligned}$$

Dies ist bei der nichtnegativen Zufallsvariablen $\sum_0^\infty 1_{\{0\}}(s_n(\omega))$ nur möglich, wenn diese und damit die tatsächliche Zahl der 0–Durchgänge fast sicher endlich ist. Dasselbe gilt dann auch für jeden anderen Punkt $k \in \mathbf{Z}^d$. Das bedeutet, daß für jedes $R < \infty$ das Teilchen fast sicher aufhört, die Kugel $|k| < R$ zu besuchen. Also gilt

$$P(\lim_{n\to\infty} |s_n| = \infty) = 1$$

Zum Beweis des 1. Teiles (also $d = 1, 2$) berechnen wir den Erwartungswert der Zahl der 0–Durchgänge auf andere Art: Sei dazu q die Wahrscheinlichkeit, mindestens 1–mal zum 0–Punkt zurückzukehren. Dann ist q auch gleich der bedingten Wahrscheinlichkeit einer Rückkehr zu einem späteren Zeitpunkt unter der Annahme, daß das Teilchen zu einem vohergehenden Zeitpunkt dort war und ebenso auch gleich der bedingten Wahrscheinlichkeit einer Rückkehr unter der Annahme, daß das Teilchen vorher endlich oft im 0–Punkt war. Dies ist intuitiv klar, eine genaue Begründung aus den Übergangswahrscheinlichkeiten der Einheitsschritte ergibt sich aus der Theorie der Markov–Ketten.

Schreiben wir kurz $P(s_{n_k} = \cdots = s_{n_1} = 0)$ für die Wahrscheinlichkeit von *mindestens* k 0–Durchgängen, so folgt aus dem Gesagten:

$$P(s_{n_2} = s_{n_1} = 0) = P(s_{n_2} = 0 | s_{n_1} = 0) \cdot P(s_{n_1} = 0) = q^2.$$

Durch Induktion erhalten wir für die Wahrscheinlichkeit von mindestens m–maliger Rückkehr in den 0–Punkt:

$$\begin{aligned} &P(s_{n_m} = \cdots = s_{n_1} = 0) = \\ &P(s_{n_m} = 0 | s_{n_{m-1}} = \cdots = s_{n_1} = 0) \cdot P(s_{n_{m-1}} = \cdots = s_{n_1}) = 0) = qq^{m-1} = q^m. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Wahrscheinlichkeit von *genau* m 0–Durchgängen (unter Mitzählung des Startes) zu $q^{m-1} - q^m$ und daher der Erwartungswert der 0–Durchgänge nach oben zu

$$\sum_0^\infty P(s_n = 0) = \sum_1^\infty m\,(q^{m-1} - q^m) = \sum_1^\infty m\,q^{m-1}(1-q) = \frac{1}{1-q} = \infty.$$

Daraus folgt $q = 1$, also auch $\lim_{m\to\infty} q^m = 1$ und dies ergibt den 1. Teil des Satzes.

Es bleibt noch, die obige Vertauschung von Summe und Integral zu rechtfertigen. Zunächst gilt jedenfalls $|f_d(x)| \leq 1$ und daher ist für $0 < \epsilon < 1$ die folgende Reihe gleichmäßig konvergent und somit

$$\int_{I^d} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n (f_d(x))^n dx = \int_{I^d} \frac{1}{1-\epsilon f_d(x)} dx = \sum_0^{\infty} \epsilon^n \int_{I^d} (f_d(x))^n dx = \sum_0^{\infty} \epsilon^n P(s_n = 0).$$

Wegen $P(s_n = 0) \geq 0$ gilt, auch im Falle eines unendlichen Grenzwertes

$$\lim_{\epsilon \to 1} \sum_0^{\infty} \epsilon^n P(s_n = 0) = \sum_0^{\infty} P(s_n = 0).$$

Es ist

$$\int_{I^d} \frac{1}{1-\epsilon f_d(x)} dx = \int_{-1 \leq f_d(x) < 0} \frac{1}{1-\epsilon f_d(x)} dx + \int_{0 \leq f_d(x) \leq 1} \frac{1}{1-\epsilon f_d(x)} dx,$$

und weil die Integranden rechts nichtnegativ und ab– bzw. zunehmend sind, können wir den Satz über monotone Konvergenz anwenden und erhalten

$$\lim_{\epsilon \to 1} \int_{I^d} \frac{1}{1-\epsilon f_d(x)} dx = \int_{I^d} \frac{1}{1-f_d(x)} dx.$$

Die letzte Behauptung ergibt sich aus

$$\frac{1}{1-q} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{I^3} \frac{1}{1-f_3(x)} dx = \frac{12}{\pi^3} \iiint_0^{\pi/2} \frac{dx\,dy\,dz}{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z} \sim 1.5163$$

$\square$

KAPITEL 6

Übungen

(1) Verifizieren Sie die Umrechnungsformeln zwischen *reeller, komplexer, physikaler* Darstellung einer trigonometrischen Reihe. (vgl. Skriptum Seite 1,2)

(2) (Zygmund I, S 9 ff)

a) Sei $\Phi(x) = (\pi - x)/2$ für $0 < x < 2\pi$, $\Phi(0) = \Phi(2\pi) = 0$. Zeigen Sie:

$$\Phi(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{1}{2} \sum_{0 \neq n = -\infty}^{\infty} \frac{e^{inx}}{in}.$$

b) Sei $s(x) = +1$ für $0 < x < pi$, $s(x) = -1$ für $-\pi < x < 0$. Zeigen Sie:

$$s(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

c) Sei $\chi(x)$ die Indikatorfunktion von $[-h, h]$ für $0 < h < \pi$. Zeigen Sie:

$$\chi(x) \sim \frac{2h}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nh}{nh} \cos nx\right] = \frac{h}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin nh}{nh} e^{inx}.$$

Hier ist $\sin nh/nh = 1$ gesetzt für $n = 0$.

(3) Zeigen Sie:

a) Kein trigonometrisches Polynom vom Grad n kann mehr als $2n$ Nullstellen haben.

b) Finden Sie ein trigonometrischen Polynom vom Grad n mit $2n$ Nullstellen.

(4) Sei $f \in L^1(\mathbf{T})$, $\quad P(t) = \sum_{-N}^{N} a_n e^{int}$. Berechnen Sie die Fourier–Koeffizienten von $f \cdot P$.

(5) Sei $f \in L^1(\mathbf{T})$, $\quad m \in \mathbf{N}$ und $f_{(m)}(t) := f(m \cdot t)$. Zeigen Sie:

$$\hat{f}_{(m)}(n) = \hat{f}(m/n), \quad \text{falls} \quad m|n \quad \text{und} \quad = 0 \quad \text{sonst.}$$

(6) Sei $B \subset L^1(\mathbf{T})$ ein Banach–Raum, der (H1) erfüllt (vgl. Def. des *homogenen Raumes*). Sei B_c die Menge aller $f \in B$, für die $\tau \mapsto f_\tau(t) = f(t - \tau)$ eine stetige B–wertige Abbildung ist. Dann ist B_c abgeschlossener Teilraum von B.

(7) Zeigen Sie, daß in den folgenden Beispielen (H1) erfüllt ist, nicht aber (H2) (vgl. Def. des *homogenen Raumes*) :

a) $L^\infty(\mathbf{T})$ der Raum der wesentlich beschränkten Funktionen in $L^1(\mathbf{T})$ mit der Norm

$$||f||_\infty = \text{ess sup}_t |f(t).$$

b) $Lip_\alpha(\mathbf{T})$ der Raum der Funktionen $f \in L^1(\mathbf{T})$ mit

$$||f||_\alpha = ||f||_\infty + \sup_{t,0\neq h}\left|\frac{f(t+h)-f(t)}{|h|^\alpha}\right| < \infty.$$

(8) Sei $B \subset L^1(\mathbf{T})$ ein Banach–Raum, der (H1) erfüllt. Zeigen Sie:
B_c ist der Abschluß der Menge der in B enthaltenen trigonometrischen Polynome.

(9) Zeigen Sie: Für $B = L^\infty(\mathbf{T})$ gilt $B_c = C(\mathbf{T})$.

(10) Sei $Lip_1(\mathbf{T}) = B$ der Raum der Funktionen $f \in L^1(\mathbf{T})$ mit

$$||f|| = ||f||_\infty + \sup_{t,0\neq h}\left|\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right| < \infty.$$

Zeigen Sie: $B_c = C^1(\mathbf{T})$.

(11) Für $0 < \alpha \leq 1$ sei $Lip_\alpha(\mathbf{T}) = B$ der Raum der Funktionen $f \in L^1(\mathbf{T})$ mit

$$||f|| = ||f||_\infty + \sup_{t,0\neq h}\left|\frac{f(t+h)-f(t)}{|h|^\alpha}\right| < \infty.$$

Zeigen Sie für $0 < \alpha < 1$:

$$B_c = lip_\alpha(\mathbf{T}) = \left\{f : \lim_{h\to 0}\sup_t\left|\frac{f(t+h)-f(t)}{|h|^\alpha}\right| = 0\right\}$$

.

(12) Zeigen Sie für die trigonometrische Reihe $\sum_{n=0}^\infty 2^{-n}\cos n^2 t$:
a) Dies ist die Fourier–Reihe einer Funktion $f \in C^\infty(\mathbf{T})$ (d.h. f ist unendlich oft differenzierbar auf $\mathbf{T}$).
b) Die Taylor–Entwicklung von f in $t_0 = 0$ konvergiert für kein $t \neq t_0$.
c) Was gilt bezüglich a), b) für die Reihe $\sum_{n=0}^\infty 3^{-n}\cos n^2 t$?
d) Zur Erinnerung: Was gilt für die Taylor–Entwicklung im 0–Punkt der Funktion $f(t) = e^{-1/t^2}$ (mit der Setzung $f(0) = 0$)?

(13) Sei $p > 1, \quad b_i > 0, \quad a_1 \geq 0$. Zeigen Sie:

$$\sum_{i=1}^n a_i^p \frac{1}{b_i^{p-1}} > \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^p}{\left(\sum_{i=1}^n b_i\right)^{p-1}}.$$

Gleichheit gilt nur im Falle der Proportionalität der a_i und b_i. Hinweis: Hölder–UGL.

(14) Sei $f \in L^\infty(\mathbf{T}), \quad |\hat{f}(n)| \leq K \cdot \frac{1}{|n|}$. Zeigen Sie: Für alle n und t gilt

$$\left|S_n(f,t)\right| \leq ||f||_\infty + 2K.$$

(15) Für alle n, t gilt

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \sin jt\right| \leq \frac{1}{2}\pi + 1.$$

(16) Sei $f \in L^1(-\pi, \pi)$ und

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)x^N dx = 0 \qquad (N = 0, 1, 2, \dots)$$

Dann ist $f = 0$ fast überall.

(17) (Lemma von FEJER)
Sei $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p, g \in L^{p'}$, mit $1/p + 1/p' = 1$. Zeigen Sie:

$$\lim_{|n| \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int f(t)g(nt)dt = \hat{f}(0)\hat{g}(0).$$

(18) Zeigen Sie: Jedes nichtnegative trigonometrische Polynom $f(t) = \sum_{-N}^{N} c_n e^{int}$ läßt sich darstellen in der Form $f(t) = |g(t)|^2$ mit einem geeigneten trigonometrischen Polynom $g(t)$.

Hinweis: Zeigen Sie dies zuerst unter Annahme $f(t) > 0 \quad (t \in \mathbf{T})$. Für $P(z) := z^N \sum_{-N}^{N} c_n z^n$ gilt die Identität $z^{2N} P(1/\overline{z}) = P(z)$ Betrachten Sie dann im Falle $f \geq 0$ die Folge $f_k(t) := f(t) + 1/k$ und verwenden Sie ein Stetigkeitsargument.

(19) Zeigen Sie: Für $f \in L^1(\mathbf{T})$ ist die Abbildung $L^1(\mathbf{T}) \to L^1(\mathbf{T})$ definiert durch $g \mapsto f * g$ eine stetige lineare Abbildung mit Norm $||f||_1$.

Hinweis: $||K_n||_1 = 1, \quad ||K_n * f||_1 \to ||f||_1$

(20) Zeigen Sie: die WEIERSTRASS Funktion f_α ist aus $Lip_\alpha(\mathbf{T})$ für $0 < \alpha < 1$, jedoch nicht aus $lip_\alpha(\mathbf{T})$.

$$f_\alpha(t) := \sum_{1}^{\infty} b^{-n\alpha} \cos b^n t, \quad \mathbf{N} \ni b > 1$$

Hinweis: vgl. A. Zygmund, TS Bd I, p 47

(21) Sei $f \in L^1(\mathbf{T})$ und $a_n, n = 1, 2, \dots$ eine Folge komplexer Zahlen mit einem endlichen Häufungspunkt. Falls

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ia_n t} dt = 0, \quad (n = 1, 2, \dots),$$

dann ist $f = 0$ fast überall.

Hinweis o.B.d.A. sei $a_n \neq 0, \quad a_n \to 0$. Betrachten Sie $\int f(t)e^{izt}dt$ als eine Funktion der komplexen Variablen z.

(22) Geben Sie eine $L^1(\mathbf{T})$–Funktion, für die die Fejer–Bedingung in keinem einzigen Punkt erfüllt ist.

(23) Seien $f, g \in L^2(\mathbf{T})$. Zeigen Sie: $f * g \in A(\mathbf{T})$.

(24) Sei f absolut stetig auf $\mathbf{T}$ mit $f' \in L^2(\mathbf{T})$. Zeigen Sie: Die Fourier–Reihe von f ist absolut konvergent, genauer:

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} |\hat{f}(n)| \leq |\hat{f}(0)| + \left(\sum_{n\neq 0} \frac{1}{|n|^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(|\hat{g}(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

(25) Zeigen Sie die folgende Ungleichung: Für alle Folgen $(a_n) \in l^2(\mathbf{Z})$ gilt

$$\sum_m \left|\sum_{n\neq m} \frac{a_n}{m-n}\right|^2 \leq \pi^2 \sum_n |a_n|^2.$$

Zeigen Sie weiter, daß π^2 nicht durch eine kleinere Konstante ersetzt werden kann.
Hinweis: $\pi - t \sim \sum_{n\neq 0} e^{int}/(in)$

(26) Zeigen Sie: Jede kompakte Untergruppe der multiplikativen Gruppe der komplexen Zahlen ist Untergruppe von $\mathbf{T}$.

(27) Sei G kompakte Untergruppe von $\mathbf{T}$. Zeigen Sie: G ist endlich und bestimmen Sie die Struktur von G.

(28) Zeigen Sie: Jede unendliche Untergruppe G von $\mathbf{T}$ ist dicht in $\mathbf{T}$.
Hinweis: Der Abschluß von G ist kompakt.

(29) Sei a ein irrationales Vielfaches von 2π. Zeigen Sie: die Menge $\{na (\bmod\ 2\pi) : n \in \mathbf{Z}\}$ ist dicht in $\mathbf{T}$.

(30) Zeigen Sie: zu jeder Folge positiver Zahlen (ω_n) mit $\omega_n \to 0$ für $|n| \to \infty$ gibt es eine Folge (a_n) mit $a_n = a_{-n} > 0$ und

$$a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n \geq 0 \quad (n > 0),$$

sodaß für alle n gilt: $a_n > \omega_n$.

(31) a) Leiten Sie aus der Beziehung $\log \frac{1}{1-z} = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \cdots$ mit der Setzung $z = re^{ix}$, $(0 \leq r < 1)$ die folgenden Formeln ab:

$$\sum_1^\infty \frac{\cos nx}{n} r^n = \frac{1}{2} \log \frac{1}{1 - 2r\cos x + r^2}, \qquad \sum_1^\infty \frac{\sin nx}{n} r^n = \arctan \frac{r \sin x}{1 - r\cos x}.$$

b) Zeigen Sie (z.B. unter Verwendung der Sätze 1.43, 1.18) für $0 < x < 2\pi$

$$\sum_1^\infty \frac{\cos nx}{n} = \log \frac{1}{|2\sin \frac{1}{2}x|}$$

$$\sum_1^\infty \frac{\sin nx}{n} = \frac{1}{2}(\pi - x).$$

(32) Sei $1 \leq p \leq \infty$ und p' der konjugierte Exponent. Zeigen Sie:
Für alle $f \in L^p(\mathbf{T}), g \in L^{p'}(\mathbf{T})$ ist $f * g$ überall definiert, stetig und es gilt

$$||f * g||_\infty \leq ||f||_p \cdot ||g||_{p'}.$$

Hinweis: Hölder UGL.

(33) 1) Sei $f \in L^1(\mathbf{R})$ mit der Eigenschaft $f * f = f$. Zeigen Sie: $f = 0$ fast überall.

2) Bestimmen Sie alle Funktionen $f \in L^1(\mathbf{T})$, sodaß $f * f = f$.

(34) Zu $f \in L^1(\mathbf{T})$ sei $\operatorname{supp} f$ die kleinste abgeschlossene Menge, außerhalb der f *überall* 0 ist (dies ist der sg. *Träger* von f).

a) Zeigen Sie: für alle $f, g \in L^1(\mathbf{T})$ gilt

$$\operatorname{supp} f * g \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g.$$

b) Gilt dies auch, wenn in der Definition *überall* durch *fast überall* ersetzt wird?

c) Diskutieren Sie die Behauptung anhand der Indikatorfunktionen $1_A, 1_B$ zweier Intervalle A, B, mit und ohne *Korona* (Anhängsel vom Maß 0). Was ist jeweils $\operatorname{supp} 1_A * 1_B$?

(35) Für $n \in \mathbf{N}$ seien k_n nichtnegative, unendlich oft differenzierbare Funktionen auf $\mathbf{T}$ mit den Eigenschaften 1) $1/2\pi \int k_n = 1$, 2) $k_n(t) = 0$ für $|t| > 1/n$. Zeigen Sie:

a) $\{k_n\}$ ist ein Summationskern.

b) Falls B ein homogener Banach–Raum auf $\mathbf{T}$ ist, dann kann jedes f in der B–Norm durch C^∞–Funktionen approximiert werden, deren Träger dem Träger von f beliebig nahe kommen.

c) Finden Sie solche k_n.

(36) (Bernstein's Ungleichung)

Sei P ein trigonometrisches Polynom vom Grade n. Zeigen Sie

$$\sup_t |P'(t)| \leq 2n \sup_t |P(t)|.$$

Hinweis: Zeigen Sie: $P'(t) = -P * 2n\,\mathbf{K}_{n-1}(t) \sin nt$ und $||2n\,\mathbf{K}_{n-1}(t) \sin nt||_1 < 2n$.

(37) Sei $0 < \alpha \leq 1$ und $f \in \mathbf{T}$. Falls f in $t_0 \in \mathbf{T}$ eine Lipschitz–Bedingung der Ordnung α erfüllt (d.h $\sup_\tau |f(t_0 + \tau) - f(t_0)| \leq K|\tau|^\alpha$), dann gilt

$$\text{für} \quad \alpha < 1: \qquad |\sigma_n(f, t_0) - f(t_0)| \leq \frac{\pi + 1}{1 - \alpha} K n^{-\alpha}.$$

$$\text{für} \quad \alpha = 1: \qquad |\sigma_n(f, t_0) - f(t_0)| \leq 2\pi K \frac{\log n}{n}.$$

Hinweis: Benützen Sie die Formel für $\sigma_n(f, t_0) - f(t_0)$ im Beweis des Satzes von Fejer mit $\theta = 1/n$.

(38) Wenn $f \in \mathrm{Lip}_\alpha(\mathbf{T})$, $0 < \alpha \leq 1$, dann gilt:

$$\text{für} \quad \alpha < 1: \qquad ||\sigma_n(f, t_0) - f(t_0)||_\infty \leq Const ||f||_{\mathrm{Lip}_\alpha} n^{-\alpha}$$

$$\text{für} \quad \alpha = 1: \qquad ||\sigma_n(f, t_0) - f(t_0)||_\infty \leq Const ||f||_{\mathrm{Lip}_\alpha} \frac{\log n}{n}.$$

(39) Zeigen Sie: In C^1 gibt es keine Norm–Konvergenz.

Hinweis: S_n kommutiert mit der Ableitung.

(40) Zeigen Sie: Wenn die Folge $\{N_j\}$ schnell genug gegen unendlich geht, dann konvergiert die Fourier–Reihe der Funktion

$$f(t) = \sum_1^\infty 2^{-j} \mathbf{K}_{N_j}(t)$$

nicht in $L^1(\mathbf{T})$.

(41) Sei a_n eine gerade Folge positiver reller Zahlen, konvex auf $[0, \infty[$ und in ∞ verschwindend. Zeigen Sie:

a) Die Partialsummen von $\sum a_n e^{int}$ sind beschränkt in $L^1(\mathbf{T})$ genau dann, wenn $a_n \log n = O(1)$.

b) $\sum a_n e^{int}$ konvergiert in $L^1(\mathbf{T})$ genau dann, wenn $a_n \log n = o(1)$.

(42) Sei $0 < a \leq \pi$ und $\Delta_a(t)$ definiert durch

$$\Delta_a(t) = \begin{cases} 1 - a^{-1}|t| & (|t| \leq a) \\ 0 & (a \leq |t| \leq \pi. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

$\Delta_a \in A(\mathbf{T})$ und $||\Delta_a||_{A(\mathbf{T})} = 1$.

(43) (Rudin, Shapiro) Der Satz von Bernstein ist scharf: Es folgt die Konstruktion einer Funktion in $\mathrm{Lip}_{1/2}(\mathbf{T})$, deren Fourier–Reihe nicht absolut konvergiert. Definiere trigonometrische Polynome P_m und Q_m induktiv durch $P_0 = Q_0 = 1$ und

$$P_{m+1}(t) = P_m(t) + e^{i2^m t} Q_m(t)$$
$$Q_{m+1}(t) = P_m(t) - e^{i2^m t} Q_m(t).$$

a) Zeigen Sie

$$|P_{m+1}(t)|^2 + |Q_{m+1}(t)|^2 = 2\big(|P_m(t)|^2 + |Q_m(t)|^2\big)$$

und daher

$$|P_m(t)|^2 + |Q_m(t)|^2 = 2^{m+1}$$

und

$$||P_m||_\infty \leq 2^{(m+1)/2}.$$

b) Für $|n| < 2^m$ gilt $\hat{P}_{m+1}(n) = \hat{P}_m(n)$ und daher existiert eine Folge $\{\varepsilon_n = \pm 1\}_{n=0}^\infty$, sodaß

$$P_m(t) = \sum_0^{2m-1} \varepsilon_n e^{int}.$$

c) Sei $f_m := P_m - P_{m-1} (= e^{i2^{m-1}t} Q_{m-1})$ und $f = \sum_1^\infty 2^{-m} f_m$. Zeigen Sie: $f \in \mathrm{Lip}_{1/2}$ und $f \notin A(\mathbf{T})$

Hinweis: Für $2^{-k} < h \leq 2^{1-k}$ sei

$$f(t+h) - f(t) = \left(\sum_1^k + \sum_{k+1}^\infty\right) 2^{-m} f_m(t+h) - f_m(t).$$

Nach Teil a) ist die Summe $\sum_{k+1}^{\infty}$ beschränkt durch $2\sum_{k+1}^{\infty} 2^{-m}2^{m/2} < 5h^{1/2}$. Wieder mit Teil a), Aufgabe 35 und der Tatsache, daß f_m ein trigonometrisches Polynom der Ordnung $2^m - 1$ ist, erhält man eine ähnliche Abschätzung für $\sum_1^k$.

(44) Zeigen Sie folgende Zusammenhänge zwischen der konjugierten Funktion und den Partialsummen der Fourierreihe der Funktion f:

$$S_n f(t) = -\sin nt\big(f\cos nt\big)^{\sim} + \cos nt\big(f\sin nt\big)^{\sim} + \frac{1}{\pi}\int f(t)\cos(\tau - t)dt$$

$$S_n f(t) = \frac{i}{2}\Big\{e^{-int}\big(fe^{int}\big)^{\sim} - e^{int}\big(fe^{-int}\big)^{\sim}\Big\} + \frac{1}{2\pi}\int f(t)\cos(\tau - t)dt.$$

(45) Zeigen Sie: Es existiert ein $A > 0$, sodaß für alle $f \in C(\mathbf{T})$ mit $||f||_\infty \leq 1$ und alle $\lambda > 0$ und alle n gilt

$$\big|E\big(|S_n f| > \lambda\big)\big| \leq Ae^{-\lambda}.$$

(46) Zeigen Sie für $1 \leq p < \infty$: Es existiert ein $A_p > 0$, sodaß für alle $f \in L^p(\mathbf{T})$ mit $||f||_p \leq 1$ und alle $\lambda > 0$ und alle n gilt

$$\big|E\big(|S_n f| > \lambda\big)\big| \leq A_p\frac{1}{\lambda^p}.$$

(47) Sei $1 < p < \infty$ und $1/p + 1/q = 1$. Zeigen Sie: Für $f \in L^p(\mathbf{T})$, $g \in L^q(\mathbf{T})$ konvergiert die Reihe $\sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}$.

(48) Das System der RADEMACHER–Funktionen $\big\{\Phi_n : [0,1[\to \mathbf{R}\big\}$ wird folgendermaßen induktiv definiert

$$\begin{aligned} &\Phi_0(t) = 1 \quad 0 \leq t < 1/2, \qquad \Phi_0(t) \;\; = -1 \quad 1/2 \leq t < 1 \\ &\Phi_0(t+1) = \Phi_0(t) \\ &\Phi_n(t) = \Phi_0\big(2^n t\big), \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Damit definiert man das System der WALSH–Funktionen folgendermaßen: $\psi_0(t) = 1$ und falls $n \in \mathbf{N}$ die *dyadische Darstellung* hat $n = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \cdots + 2^{n_\nu}$, dann sei

$$\psi_n(t) = \Phi_{n_1}(t)\Phi_{n_2}(t)\cdots\Phi_{n_\nu}(t).$$

a) Zeichnen Sie $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$.
b) Zeichnen Sie $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_7$.
c) Zeigen Sie: $\{\psi_n\}$ ist ein ON–System über $[0,1[$, d.h.

$$\int_0^1 \psi_m(t)\psi_n(t)dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

(49) Zeigen Sie: Die Funktionen ψ_m $(0 \leq m \leq 2^n - 1)$ sind konstant in den sg. *dyadischen* Intervallen

$$I_n^{(\nu)} = \big[(\nu - 1)2^{-n}, \nu 2^{-n}\big[, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, 2^n$$

(50) Zeigen Sie: Das System der Walsh–Funktionen ist *vollständig*, d.h. falls für $f \in L^1[0,1[$ gilt

$$\int_0^1 f(t)\psi_m(t)dt = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

dann ist $f(t) = 0$ fast überall.

(51) Alle Walsh–Fourierkoeffizienten von e^x sind ungleich 0 (B. Roider 1969). Hinweis: Indirekt. e ist nicht algebraisch.

Literaturverzeichnis

[Ash] J.M. Ash,ed. *Studies in Harmonic Ananlysis*, MAA Studies in Mathematics, Vol 13, 1967

[Ed] R. E. Edwards *Fourier Series, A Modern Introduction, Vol. 1, Vol. 2*, Rinehart and Winston, New York, 1967

[Bl] W. Blaschke Kreis und Kugel, Verlag von Veit& Comp, Leipzig 1916

[HS] E. Hewitt, K. Sromberg *Real and Abstact Analysis*, Spriger, Berlin etc., 1965

[HR] E. Hewitt, K.A. Ross *Abstact Harmonic Analysis I, II*, Spriger, Berlin etc., 1963

[HLP] G.H.Hardy, J.E.Littelewood, G.Polya *Inequalities*, Cambridge Univ. Press, 1967

[Ka] Y. Katznelson *An Intoduction to Harmonic Analysis*, Wiley, New York etc., 1968

[KG] K.I. Gross *On the evolution of noncommutative harmonic analysis*, American Mathematical Monthly, 525–548, 1978

[DK] H. Dym, H.P. MacKean *Fourier Series and Integrals*, Academic Press, New York, London, 1972

[E] F. Erwe, *Differential– und Integralrechnung* I, II, BI Taschenbücher, 1962

[Ko] T.W. Körner *Fourier Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, N.Y., 1988

[Ma1] G. W. Mackey *Harmonic Analysis as the exploitation of Symmetry – A historical survey*, Rice University Studies.

[Ma2] G. W. Mackey *Unitary Group Representations in Physics, Probability, and Number Theory*, Mathematics Lecture Note Series, Benjamin, 1978

[Os] R. Ossermann *The isoperimetric inequality*, BAMS, Vol.84, No.6 (1978), 1182–1238

[SD] W. Schemp, B. Dreseler *Einführung in die harmonische Analyse*, Teubner, Stuttgart, 1980

[Zy] A. Zygmund *Trigonometric Series I, II*, Cambridge at the University Press, London, New York,1968