

wobei λ das Lebesguemaß bezeichnet und $\omega \in C([0, \infty), \mathbb{R})$. Der Transformationssatz für Integrale und die Abschätzung (4.3) liefern nun

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int \int |x - y|^{-s} d\mu^\omega(x) d\mu^\omega(y) &= \int_0^1 \int_0^1 \mathbb{E}((|W(t) - W(u)|^2 + |t - u|^2)^{-s/2}) dt du \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 c_1 |t - u|^{1/2-s} dt du < \infty \end{aligned}$$

für $s < 1\frac{1}{2}$. Es folgt also schließlich wieder aus dem ersten Teil von Satz 2.41 die untere Abschätzung $\dim \text{gr } W([0, 1]) \geq 1\frac{1}{2}$ \mathbb{P} -fast sicher. \square

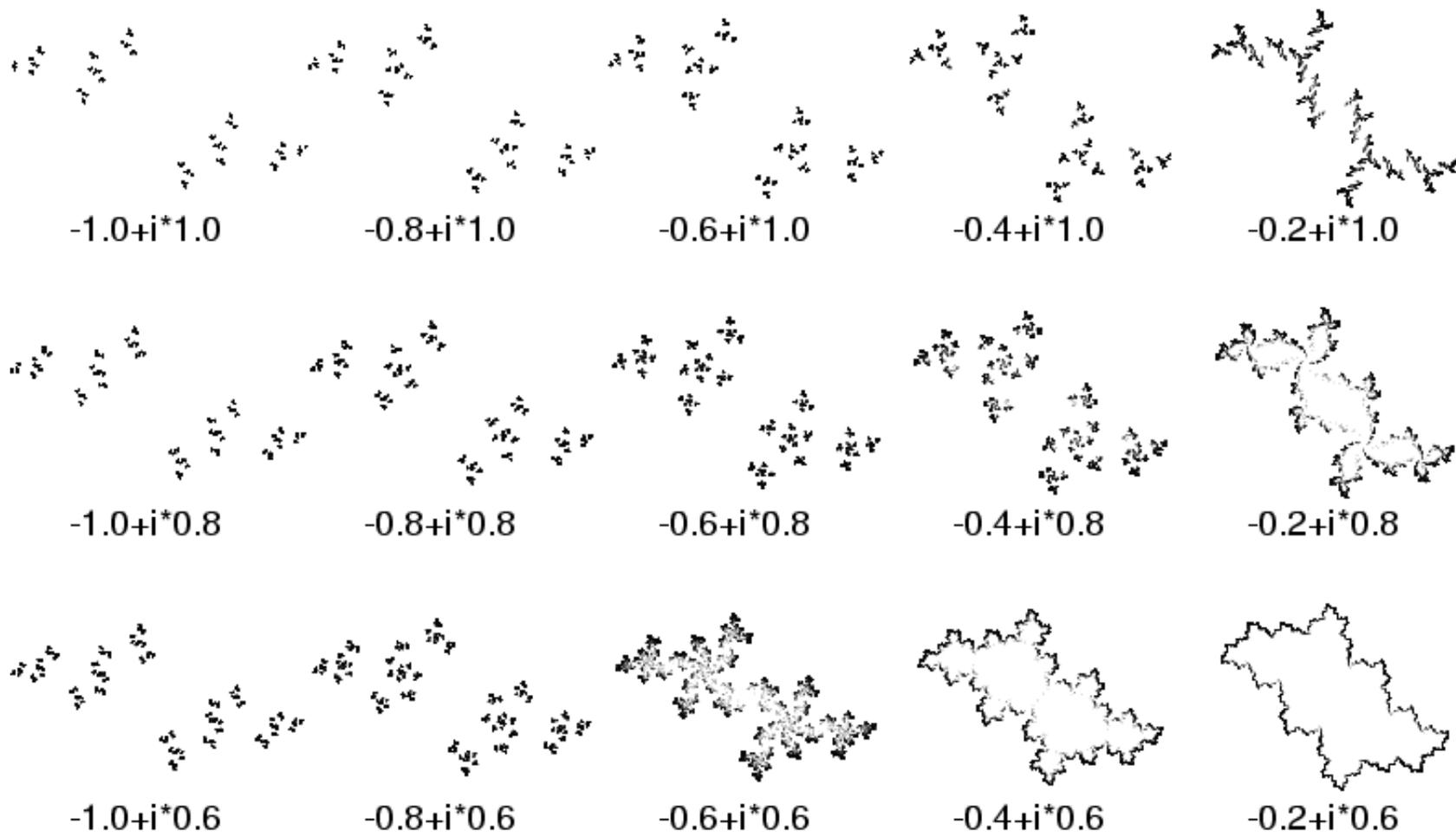
5 Julia-Mengen

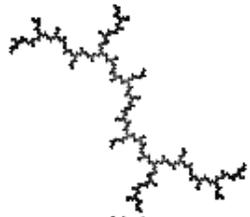
5.1 Definition und einfache Eigenschaften von ausgefüllten Juliamengen

Wir befassen uns in diesem Abschnitt mit der Iteration komplexwertiger Funktionen, insbesondere Polynomen. Basierend auf solchen Funktionen definieren wir in einfacher Weise Mengen, von denen sich herausstellt, dass sie meist fraktale Struktur besitzen.

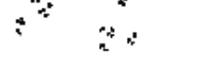
Definition 5.1 (Julia-Menge). *Sei f ein Polynom vom Grad ≥ 2 . Die Menge derjenigen Anfangswerte $z \in \mathbb{C}$, für die gilt, dass die Folge $(f^k(z))_k$ beschränkt ist, heißt ausgefüllte Julia-Menge $K(f)$ von f . Der Rand von $K(f)$ wird mit $J(f)$ bezeichnet und heißt Julia-Menge von f .*

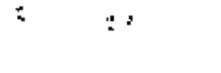
Auf den nächsten vier Seiten sehen wir Julia-Mengen $J(f_c)$ für $f_c(z) := z^2 + c$ für verschiedene, unter den Grafiken stehende, Parameter $c \in \mathbb{C}$.




 $0.0+i*1.0$

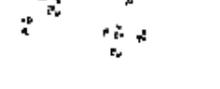
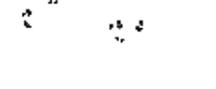
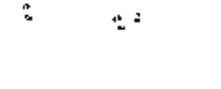
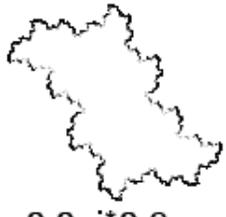
 $0.19+i*1.0$

 $0.39+i*1.0$

 $0.59+i*1.0$

 $0.79+i*1.0$

 $0.99+i*1.0$

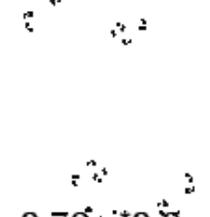
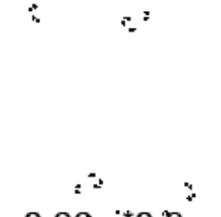
 $0.0+i*0.8$

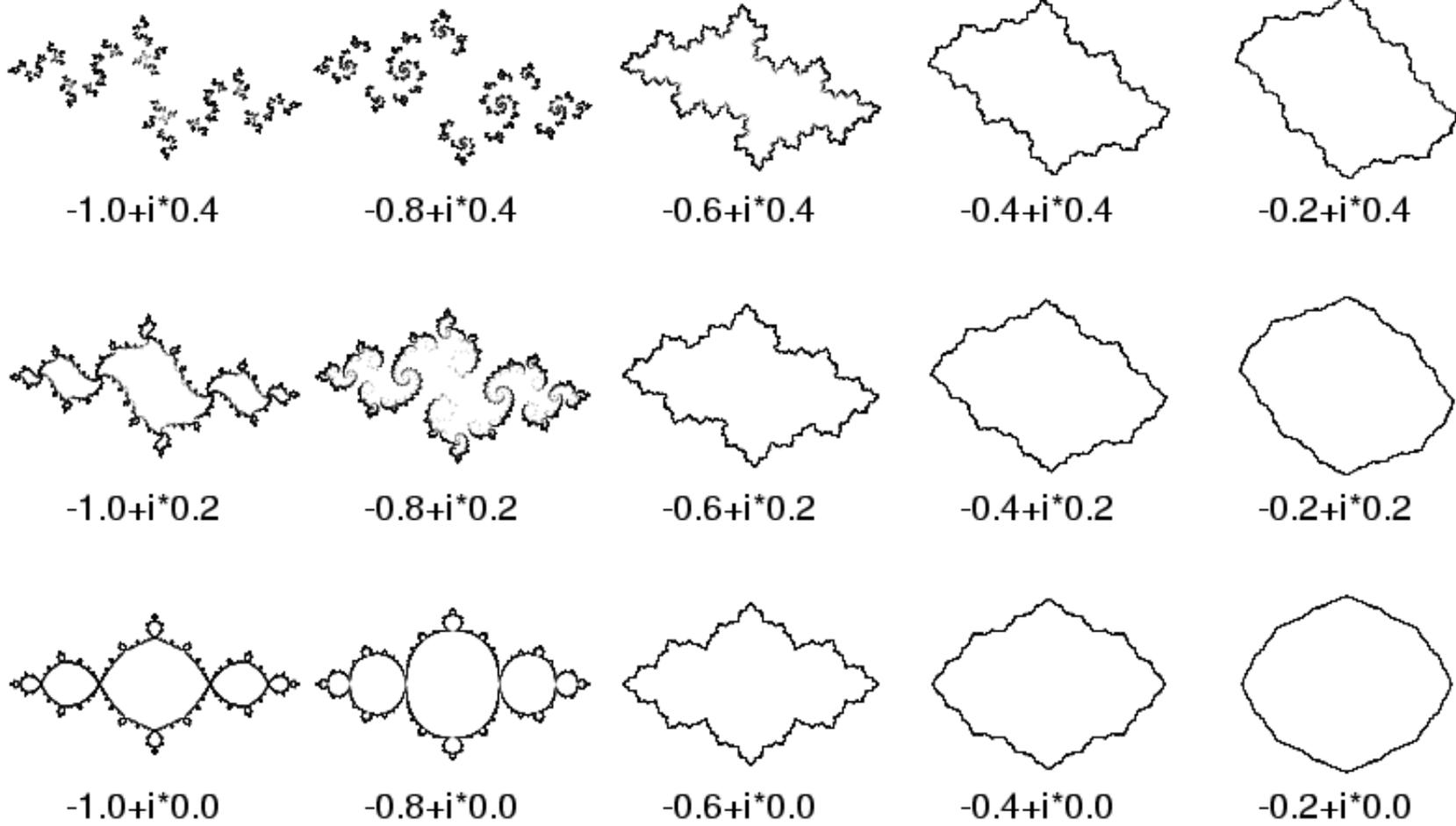
 $0.19+i*0.8$

 $0.39+i*0.8$

 $0.59+i*0.8$

 $0.79+i*0.8$

 $0.99+i*0.8$

 $0.0+i*0.6$

 $0.19+i*0.6$

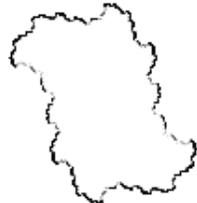
 $0.39+i*0.6$

 $0.59+i*0.6$

 $0.79+i*0.6$

 $0.99+i*0.6$





0.0+i*0.4



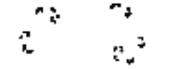
0.19+i*0.4



0.39+i*0.4



0.59+i*0.4



0.79+i*0.4



0.99+i*0.4



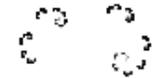
0.0+i*0.2



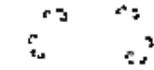
0.19+i*0.2



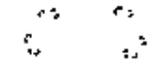
0.39+i*0.2



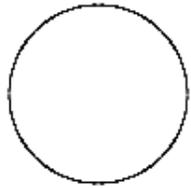
0.59+i*0.2



0.79+i*0.2



0.99+i*0.2



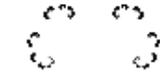
0.0+i*0.0



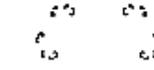
0.19+i*0.0



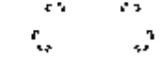
0.39+i*0.0



0.59+i*0.0



0.79+i*0.0



0.99+i*0.0

Proposition 5.2. *Ist f ein Polynom vom Grad 2, so ist $K(f)$ nichtleer.*

Beweis. Übung; Hinweis: Ein Fixpunkt von f ist in $K(f)$. □

Bemerkung 5.3. Wir nehmen in der Definition einer Julia-Menge den Polynomgrad 1 von f aus, da im Falle von $\deg f = 1$ die Julia-Menge einfach anzugeben ist. Ist $f(z) = az + b$ mit $a, b \in \mathbb{C}$, so gilt für $a = 1$, dass für $b = 0$ die ausgefüllte Julia-Menge $K(f) = \mathbb{C}$ ist. Für $a = 1$ und $b \neq 0$ ist $K(f) = \emptyset$. Im Falle $a \neq 1$ hat f einen Fixpunkt $\xi = \frac{b}{1-a}$ und f kann geschrieben werden als

$$f(z) = \xi + a(z - \xi).$$

Aus dieser Darstellung folgt dann (Übung)

$$K(f) = \begin{cases} \mathbb{C}, & |a| \leq 1 \\ \{\xi\}, & |a| > 1. \end{cases}$$

Aus diesen Angaben für $K(f)$ folgen dann leicht die jeweiligen Formeln für $J(f) = \partial K(f)$.

Beispiel 5.4. Sei $f(z) = z^2$. Dann gilt $K(f) = B_1(0) := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, $J(f) = S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Wie wir in den Abbildungen auf den Seiten 56-59 sehen, ist das Aussehen der Julia-Mengen für $f(z) = z^2 + c$ für $c \neq 0$ meist erheblich komplizierter als in den bis jetzt betrachteten Fällen. Zumindest ist aber $K(f)$ für Polynome vom Grad ≥ 2 immer beschränkt. Dies ist eine Folgerung des anschließenden

Lemma 5.5 (Fluchtschranke). *Sei f ein Polynom vom Grad ≥ 2 . Dann gibt es eine Zahl $r > 0$ mit*

$$|f(z)| \geq 2|z| \quad \text{für } |z| \geq r.$$

Beweis. Sei $f(z) = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_0$ mit $a_k \neq 0$ und $k > 2$. Sei nun r_0 so groß, dass

$$|a_{k-1}| |z|^{k-1} + \dots + |a_0| \leq \frac{|a_k| |z|^k}{2}$$

für alle $|z| \geq r_0$. Dann gilt $|f(z)| \geq \frac{|a_k| |z|^k}{2}$ für $|z| \geq r_0$. Für $|z| \geq r_1 := \left(\frac{4}{|a_k|}\right)^{1/(k-1)}$ ist das wie gewünscht $\geq 2|z|$. Wählen wir nun r als das Maximum der beiden Radien, so folgt die Behauptung des Lemmas. □

Bemerkung 5.6. Sei $c \in \mathbb{C}$ beliebig. Ist $f(z) = z^2 + c$, so kann in vorigem Lemma $r := 2 + |c|$ gewählt werden. Denn dann gilt für $|z| > r = 2 + |c|$

$$|f(z)| = |z^2 + c| \geq |z|^2 - |c| \geq |z|(2 + |c|) - |c| = 2|z| + |c||z| - |c| \geq 2|z|.$$

Korollar 5.7. *Ist f ein Polynom vom Grad ≥ 2 , so ist die ausgefüllte Julia-Menge $K(f)$ von f beschränkt.*

Aus der Definition von $K = K(f)$ folgt die Invarianz von K unter f und f^{-1} :

$$f(K) \subseteq K, \quad f^{-1}(K) \subseteq K.$$

Daraus folgt sogar (Übung) $f(K) = K = f^{-1}(K)$.

5.2 Die Mandelbrot-Menge

In den Abbildungen auf den Seiten 56-59 sehen wir, dass vermutlich manche Julia-Mengen $K(f)$ zusammenhängend sind und manche nicht. Zunächst klären wir den Zusammenhangsbegriff.

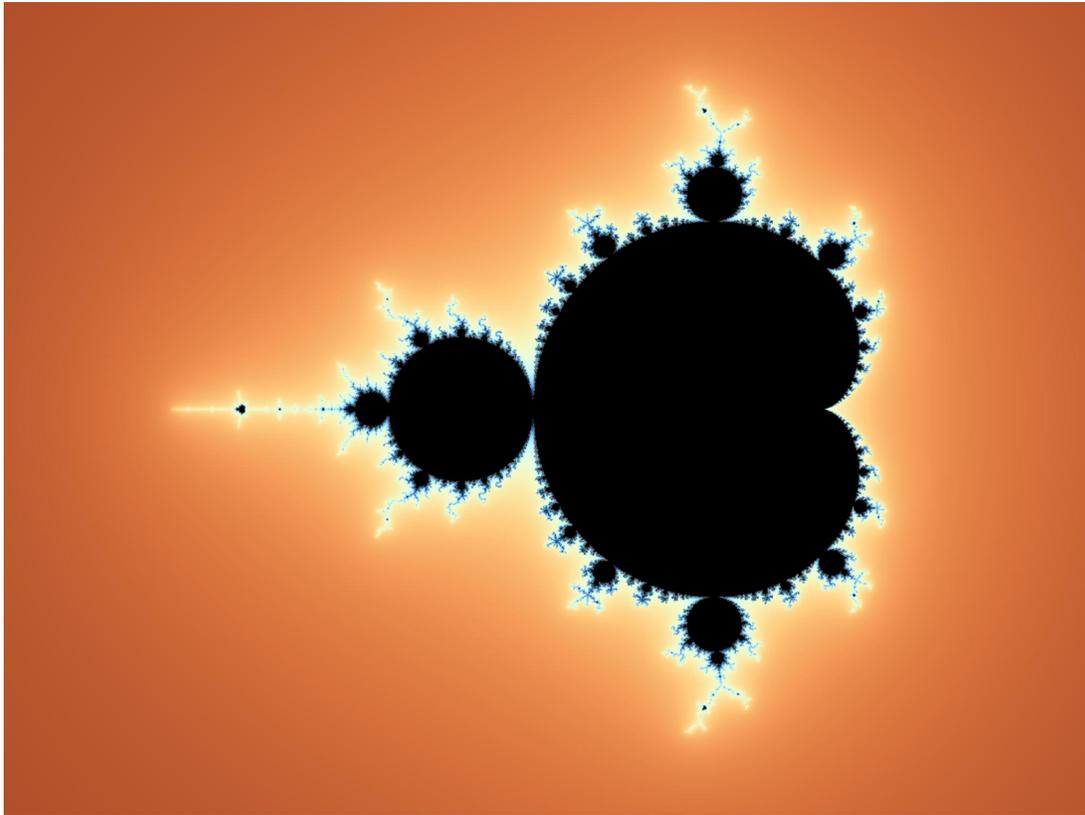


Abbildung 9: Mandelbrot-Menge

Definition 5.8. Sei X ein topologischer Raum (etwa $X \subset \mathbb{C}$ mit der euklidischen Topologie eingeschränkt auf X). X heißt zusammenhängend, falls X nicht in zwei disjunkte nichtleere offene Teilmengen zerlegt werden kann.

Es gilt, dass ein topologischer Raum X genau dann zusammenhängend ist, falls er nicht in zwei disjunkte, nichtleere, abgeschlossene Teilmengen zerlegt werden kann. (Übung)

Beispiel 5.9. Sei $X = [0, 1] \cup [3, 4]$, also disjunkte Vereinigung von zwei Intervallen. Eine Menge $U \subset X$ ist (definitionsgemäß) offen, falls es eine in \mathbb{R} offene Menge $O \subset \mathbb{R}$ gibt, sodass $U = X \cap O$. Daraus folgt, dass die Mengen $[0, 1]$ und $[3, 4]$ offen sind in X , da etwa $(-1, 2)$ offen ist in \mathbb{R} und $(-1, 2) \cap X = [0, 1]$. Das heißt also, dass X nicht zusammenhängend ist.

Als weitere Illustration für den Zusammenhangsbegriff beweisen wir

Lemma 5.10. (i) Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ zusammenhängend. Dann ist auch der Abschluss \bar{A} von A zusammenhängend.

(ii) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Seien die Mengen $K_k \subset X, 0 \leq k < \infty$ kompakt, zusammenhängend und fallend (d.h. $K_{k+1} \subseteq K_k$). Dann ist auch der Durchschnitt $\bigcap_{k=0}^{\infty} K_k$ zusammenhängend.

Beweis. (i) Ist \bar{A} nicht zusammenhängend, so gibt es offene Mengen $O_1, O_2 \subset X$ in X mit $(\bar{A} \cap O_1) \cup (\bar{A} \cap O_2) = \bar{A}$, sodass $(\bar{A} \cap O_1)$ und $(\bar{A} \cap O_2)$ disjunkt sind. Weiters sind $(\bar{A} \cap O_j), j = 1, 2$ nichtleer. Die Mengen $\widetilde{O}_j := O_j \cap A, j = 1, 2$ sind dann offen in A , disjunkt und es gilt $\widetilde{O}_1 \cup \widetilde{O}_2 = A$. Weiters gilt $\widetilde{O}_j \neq \emptyset$: In der Tat wissen wir, dass $\bar{A} \cap O_j \neq \emptyset$. Nach der Definition des Abschlusses ist $x \in \bar{A}$ genau dann wenn für alle Umgebungen U von x gilt, dass $U \cap A \neq \emptyset$. Wähle $x \in \bar{A} \cap O_j$ und $U = O_j$, dann folgt, dass $A \cap O_j \neq \emptyset$. \widetilde{O}_1 und \widetilde{O}_2 ist also eine Zerlegung von A in nichtleere, disjunkte, offene Teilmengen von A , sodass $\widetilde{O}_1 \cup \widetilde{O}_2 = A$, also ist A nicht zusammenhängend.

(ii) Sei $K = \bigcap_{k=0}^{\infty} K_k$ nicht zusammenhängend. Dann gibt es zwei nichtleere, disjunkte, abgeschlossene Mengen K_a, K_b mit $K = K_a \cup K_b$. Es folgt aus der Kompaktheit von K , dass $d(K_a, K_b) > 0$. Wir erhalten also die Existenz von offenen Umgebungen U_a, U_b von K_a, K_b mit $U_a \cap U_b = \emptyset$. Das heißt

$$K = \bigcap_{k=0}^{\infty} K_k = K_a \cup K_b \subseteq U_a \cup U_b =: U.$$

Daraus folgt nun, dass ein k_0 existiert sodass für alle $k \geq k_0$ gilt $K_k \subseteq U_a \cup U_b = U$. Nun ist $K_{k_0} = (K_{k_0} \cap U_a) \cup (K_{k_0} \cap U_b)$ eine Zerlegung von K_{k_0} in offene (in K_{k_0}), nichtleere und disjunkte Teilmengen, also ist K_{k_0} nicht zusammenhängend. \square

Wir betrachten in Zukunft meist quadratische Funktionen $f(z) = z^2 + c$ für $c \in \mathbb{C}$. Wir bezeichnen daher diese Funktion speziell als $f_c(z) := z^2 + c$.

Definition 5.11 (Mandelbrot-Menge). *Die Menge M der Parameterwerte c , für die die ausgefüllte Julia-Menge $K(f_c)$ zusammenhängend ist, heißt die Mandelbrot-Menge, also*

$$M = \{c \in \mathbb{C} : K(f_c) \text{ ist zusammenhängend}\}.$$

Die Mandelbrot-Menge M ist in Abbildung 9 dargestellt. Wir werden im folgenden eine alternative Charakterisierung der Mandelbrot-Menge beweisen. Dazu wiederholen wir:

Definition 5.12. *Eine Jordankurve Γ in der Ebene ist das Bild einer stetigen Abbildung $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, sodass $\varphi(0) = \varphi(1)$ und die Restriktion $\varphi|_{[0,1]}$ injektiv ist. Γ heißt zusätzlich differenzierbar, falls φ differenzierbar ist, $\varphi'(0) = \varphi'(1)$ und $\varphi'(t) \neq 0$ für alle t .*

Anschaulich gesprochen ist eine Jordankurve eine stetige, geschlossene Kurve ohne Selbstüberschneidungen.

Für Jordankurven in der Ebene gilt der Jordansche Kurvensatz:

Satz 5.13 (Jordanscher Kurvensatz). *Sei Γ eine Jordankurve in der Ebene. Dann besteht das Komplement $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ aus genau zwei Zusammenhangskomponenten. Eine dieser Komponenten ist beschränkt und wird das Innere von Γ genannt. Die zweite ist unbeschränkt und heißt das Äußere von Γ .*

Dabei ist eine Zusammenhangskomponente eines topologischen Raums X eine maximale zusammenhängende Teilmenge von X .

Beispiel 5.14. Die Zusammenhangskomponenten von $[0, 1] \cup [3, 4]$ sind die Intervalle $[0, 1]$ und $[3, 4]$.

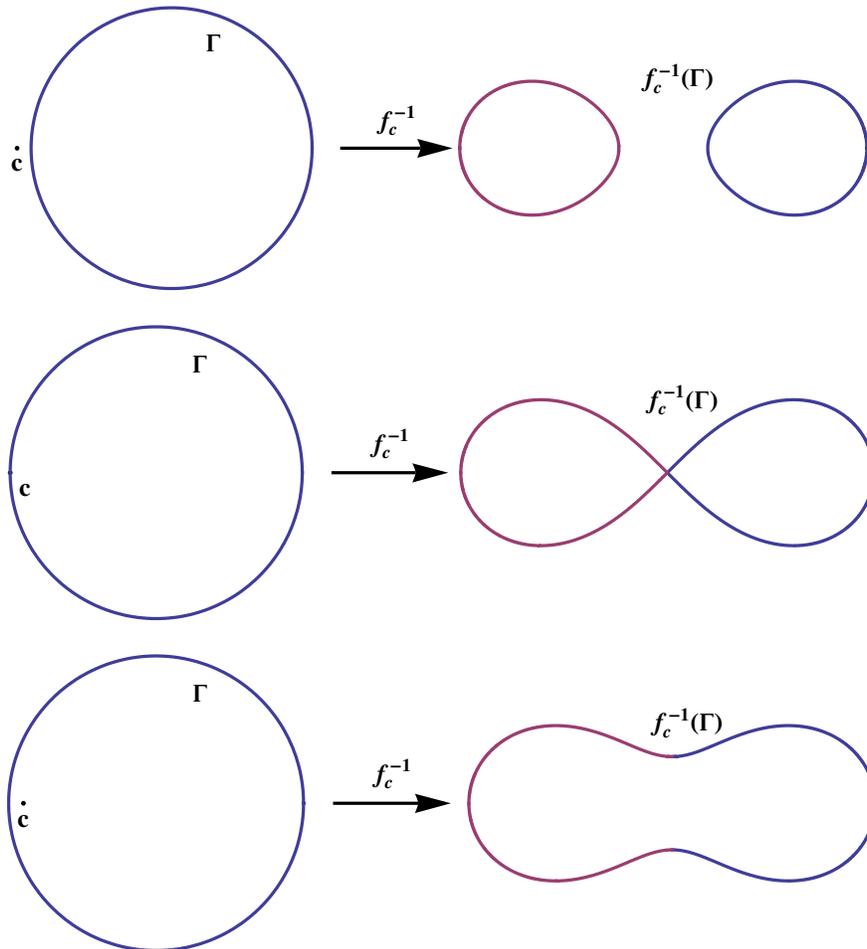


Abbildung 10: Situation in den drei Fällen von Lemma 5.15.

Lemma 5.15. Sei Γ eine differenzierbare Jordankurve und $f_c(z) = z^2 + c$. Dann gelten

- (i) Ist der Punkt $c \in \mathbb{C}$ außerhalb von Γ , so besteht $f_c^{-1}(\Gamma)$ aus zwei disjunkten, zu 0 punktsymmetrischen differenzierbaren Jordankurven, wobei das Urbild des Inneren von Γ aus den Innengebieten dieser beiden Jordankurven besteht.
- (ii) Liegt $c \in \mathbb{C}$ auf Γ , so besteht $f_c^{-1}(\Gamma)$ aus zwei Jordankurven. Diese haben genau den Nullpunkt gemeinsam, liegen zu ihm symmetrisch und besitzen in ihm einen rechtwinkligen Knick (sie bilden also eine Acht). Das Urbild des Inneren von Γ besteht aus den Innengebieten dieser beiden Jordankurven.

(iii) Liegt $c \in \mathbb{C}$ innerhalb von Γ , so ist $f^{-1}(\Gamma)$ eine zu 0 punktsymmetrische differenzierbare Jordankurve, wobei das Urbild des Inneren von Γ mit dem Inneren von $f^{-1}(\Gamma)$ übereinstimmt.

Beweis. Zunächst einige Vorbemerkungen. Es bezeichne $S_c := \{c + x : x \leq 0\}$. Dann wird $\mathbb{C} \setminus S_c$ durch die Umkehrfunktionen

$$z = f_{\pm}^{-1}(w) = \pm \sqrt{w - c}$$

analytisch auf die rechte (bzw. linke) Halbebene $H_+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ (bzw. $H_- := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$) abgebildet. Dabei bezeichnet $\sqrt{w - c}$ diejenige komplexe Wurzel u von $w - c$, für die $\operatorname{Re} u > 0$. Weiters sei $w(t)$ eine differenzierbare Parameterdarstellung der Kurve Γ . In der Funktionentheorie beweist man den *Satz von der Gebietstreue*: Sei f eine analytische Funktion und $U \subset \mathbb{C}$ eine offene, zusammenhängende Menge (ein Gebiet). Dann ist $f(U)$ wieder offen und zusammenhängend (ein Gebiet). Ist $z = re^{i\varphi}$ mit $-\pi < \varphi \leq \pi$, so heißt φ das Argument $\arg z$ von z .

(i) c außerhalb von Γ (Abbildung 10, 1. Bild):

Wir nehmen an, dass die Halbgerade S_c die Jordankurve Γ nicht schneidet, also ganz in deren Außengebiet liegt. Dann gilt $\Gamma \subseteq \mathbb{C} \setminus S_c$ und $f_+^{-1}(\Gamma) \subseteq H_+$. Da f_+^{-1} injektiv ist, folgt aus $f_+^{-1}(w(t_1)) = f_+^{-1}(w(t_2))$, dass $w(t_1) = w(t_2)$ und somit sofort $t_1 = t_2$ oder $t_1 = 0$ und $t_2 = 1$. Mit Γ ist deshalb auch $f_+^{-1}(\Gamma)$ eine Jordankurve. Da c nicht auf Γ liegt, gilt weiters $w(t) \neq c$ für alle t , daher also wegen $w'(t) \neq 0$

$$f_+^{-1}(w(t))' = (f_+^{-1})'(w(t))w'(t) = \frac{w'(t)}{2\sqrt{w(t) - c}} \neq 0.$$

f_+^{-1} ist also eine differenzierbare Jordankurve. Als analytische Funktion ist nun $f(z) = z^2 + c$ gebietstreu; wegen $f(f_+^{-1}(\Gamma)) = \Gamma$ bildet also f das Innere bzw. Äußere von $f_+^{-1}(\Gamma)$ auf das Innere G_i bzw. Äußere G_a von Γ ab. $f_+^{-1}(G_i)$ stimmt deshalb mit dem Inneren von $f_+^{-1}(\Gamma)$ überein.

Die gleichen Argumente liefern nun die Behauptungen für $f_-^{-1}(\Gamma)$. Wird Γ von S_c geschnitten, so gelten die gleichen Überlegungen, falls S_c durch eine Γ nicht schneidende Halbgerade mit Ausgangspunkt c ersetzt wird.

(ii) c auf Γ (Abbildung 10, 2. Bild):

Wir nehmen zunächst wieder an, dass alle Punkte der Halbgeraden $S_c = \{c + x : x \leq 0\}$ mit Ausnahme ihres Anfangspunktes c im Außengebiet von Γ liegen und es sei $w(t) = c + r(t)e^{i\psi(t)}$ eine Parameterdarstellung von Γ mit $c = w(0) = w(1)$, also $r(0) = r(1) = 0$. In der Zerlegung $f^{-1}(\Gamma) = f^{-1}(\Gamma \setminus \{c\}) \cup f^{-1}(c)$ besteht dann $f^{-1}(\Gamma \setminus \{c\})$ aus den injektiven, differenzierbaren und offenen Kurven

$$f_{\pm}^{-1}(w(t)) = \pm \sqrt{w(t) - c} = \pm \sqrt{r(t)}e^{i\psi(t)/2} \quad 0 < t < 1$$

in H_{\pm} . Diese lassen sich wegen

$$f_{\pm}^{-1}(w(t)) = \pm \sqrt{r(t)}e^{i\psi(t)/2} \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow 0 \text{ und } t \rightarrow 1$$

in $t = 0$ und $t = 1$ durch $f_{\pm}^{-1}(c) := 0$ stetig zu den Jordankurven $f_{\pm}^{-1}(\Gamma)$ ergänzen, also $f^{-1}(\Gamma) = f_+^{-1}(\Gamma) \cup f_-^{-1}(\Gamma)$. Wie unter 1. folgt nun, dass das Innere von Γ durch f_{\pm}^{-1} auf das Innere von $f_{\pm}^{-1}(\Gamma)$ abgebildet wird.

Zum Nachweis des rechtwinkligen Schnitts von $f_+^{-1}(\Gamma)$ und $f_-^{-1}(\Gamma)$ in 0 bezeichne $\psi_0 = \arg(w'(0))$ das Argument des Tangentenvektors $w'(0)$ an Γ im Punkt $c = w(0)$ in Richtung wachsender t -Werte. Es gilt

$$\psi(t) = \arg(w(t) - c) \rightarrow \begin{cases} \psi_0, & \text{für } t \rightarrow 0, t > 0 \\ \psi_0 + \pi & \text{für } t \rightarrow 1, t < 1. \end{cases}$$

Für das Argument von $f_+^{-1}(w(t)) = +\sqrt{w(t) - c} = \sqrt{r(t)}e^{i\psi(t)/2}$ folgt damit

$$\frac{\psi(t)}{2} = \arg(f_+^{-1}(w(t))) \rightarrow \begin{cases} \psi_0/2, & \text{für } t \rightarrow 0, t > 0 \\ \psi_0/2 + \pi/2 & \text{für } t \rightarrow 1, t < 1. \end{cases}$$

Die Jordankurve $f_+^{-1}(\Gamma)$ besitzt also in 0 einen rechtwinkligen Knick. Wegen der Punktsymmetrie zu 0 treffen $f_+^{-1}(\Gamma)$ und $f_-^{-1}(\Gamma)$ in 0 rechtwinklig aufeinander. Von der Annahme über die Lage von S_c kann man sich nun wie unter 1. befreien.

(iii) c innerhalb von Γ (Abbildung 10, 3. Bild):

Wir nehmen wieder ohne Einschränkung der Allgemeinheit an, dass $S_c = \{c + x : x \leq 0\}$ und Γ genau einen Punkt w_0 gemeinsam haben. Sei $w(t)$, $0 \leq t \leq 1$ eine Parameterdarstellung von Γ mit $w(0) = w(1) = w_0$. In der Zerlegung $f^{-1}(\Gamma) = f^{-1}(\Gamma \setminus \{w_0\}) \cup f^{-1}(w_0)$ besteht dann die Menge $f^{-1}(\Gamma \setminus \{w_0\})$ aus den injektiven, differenzierbaren und offenen Kurven $f_{\pm}^{-1}(w(t)) = \pm\sqrt{w(t) - c}$, $0 < t < 1$ in H_{\pm} . Diese lassen sich durch die beiden Punkte $\pm i\sqrt{|w_0 - c|}$ von $f^{-1}(w_0)$ zur Jordankurve $f^{-1}(\Gamma)$ ergänzen. Wie unter 1. folgt nun, dass das Urbild des Inneren von Γ mit dem Inneren von $f^{-1}(\Gamma)$ übereinstimmt. \square

Dieses Lemma benutzen wir nun, um eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür herzuleiten, dass $K(f_c)$ zusammenhängend ist:

Satz 5.16. *Für $c \in \mathbb{C}$ gilt*

$$K(f_c) \text{ ist zusammenhängend} \iff c \in K(f_c).$$

Bevor wir diesen Satz beweisen, bemerken wir, dass daraus folgt

$$\begin{aligned} c \in M &\iff K(f_c) \text{ ist zusammenhängend} \\ &\iff \text{Die Folge } (f_c^k(c))_k \text{ ist beschränkt} \\ &\iff \text{Die Folge } (f_c^k(0))_k \text{ ist beschränkt.} \end{aligned}$$

Dies ist die angekündigte äquivalente Charakterisierung von M .

Bemerkung 5.17 (Riemannsche Zahlenkugel). Wir definieren zunächst die *stereographische Projektion*. Sei S^2 die Oberfläche der Einheitskugel in \mathbb{R}^3 und $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ die Einbettung von \mathbb{C} in \mathbb{R}^3 . Der Nordpol N von S^2 hat die Koordinaten $(0, 0, 1)$. Wir definieren nun eine Abbildung $P : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$. Sei $x \in S^2$. Dann definieren wir $P(x)$ als den eindeutigen Punkt $z \in \mathbb{C}$ (wie gesagt entspricht hier \mathbb{C} dem Unterraum $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ von \mathbb{R}^3), der auf der Geraden durch den Nordpol und x liegt. P heißt dann die stereographische Projektion. Wir erweitern nun die komplexe Ebene \mathbb{C} dadurch, dass wir einen formalen Punkt ∞ einführen

und setzen $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. \mathbb{C}_∞ heißt dann *Riemannsche Zahlenkugel*. Dann erweitern wir die Abbildung P auf ganz S^2 , indem wir $P(N) = \infty$ setzen und P als Abbildung zwischen S^2 und \mathbb{C}_∞ auffassen. Weiters definieren wir eine Metrik auf \mathbb{C}_∞ durch

$$d(z_1, z_2) := |P^{-1}(z_1) - P^{-1}(z_2)|.$$

Somit erhalten wir für eine Folge (z_n) in \mathbb{C} , dass $z_n \rightarrow \infty$ genau dann wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein N gibt, sodass für alle $n \geq N$ gilt: $|z_n| \geq 1/\varepsilon$. Dies motiviert die Definition von Umgebungen des Punktes ∞ durch $U_{1/r}(\infty) := \{z : |z| > r\}$.

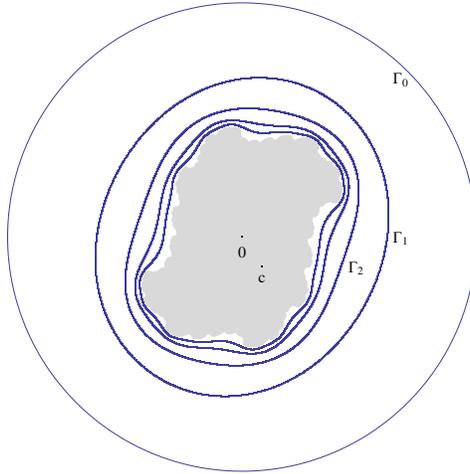


Abbildung 11: $K(f_c)$ mit $\Gamma_k = f_c^{-k}(\Gamma_0)$ für $c = 0.2 - 0.3i \in K(f_c)$.

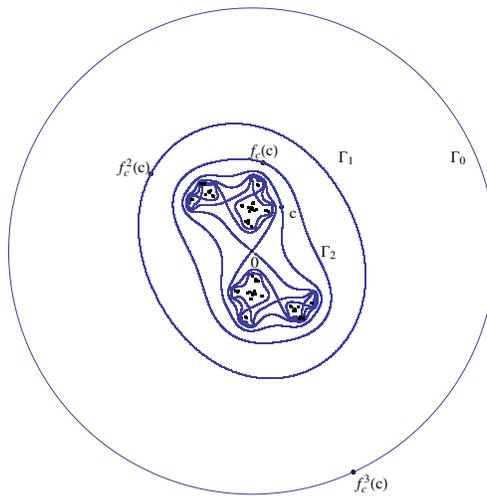


Abbildung 12: $K(f_c)$ mit $\Gamma_k = f_c^{-k}(\Gamma_0)$ für $c = 0.5 + 0.75i \notin K(f_c)$.

Beweis von Satz 5.16. Seien $r \geq 2 + |c|$ (vgl. Bemerkung 5.6) und $U = U_{1/r}(\infty) = \{z : |z| > r\}$. Dann setzen wir $K_k = \mathbb{C} \setminus f_c^{-k}(U)$ und $\Gamma_k = \{z : |f^k(z)| = r\}$.

\Leftarrow : Sei $c \in K(f_c)$, das heißt, dass die Folge $(f_c^k(c))_k$ beschränkt ist. Wir zeigen nun mittels Induktion: Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ ist Γ_k eine Jordankurve, wobei c und $f_c^{-1}(\Gamma_k) = \Gamma_{k+1}$ im Innengebiet von Γ_k liegen (Abbildung 11). Für $k = 0$ ist Γ_0 ein Kreis und damit klarerweise eine Jordankurve, wobei wegen $r \geq 2 + |c|$ sowohl c als auch $f_c^{-1}(\Gamma_0) = \Gamma_1$ im Innengebiet von Γ_0 liegen. Ist nun Γ_k eine Jordankurve mit c und Γ_{k+1} im Inneren, so ist wegen Lemma 5.15,3. auch $f_c^{-1}(\Gamma_k) = \Gamma_{k+1}$ Jordankurve mit $f_c^{-1}(\Gamma_{k+1}) = \Gamma_{k+2}$ im Inneren. Dabei liegt auch c im Inneren von Γ_{k+1} , denn falls c auf/außerhalb von Γ_{k+1} liegt, so liegt $f_c^{k+1}(c)$ auf/außerhalb von Γ_0 und somit $c \notin K(f_c)$ im Widerspruch zur Annahme. Die Kurven Γ_k sind also ineinanderliegende Jordankurven mit c im Inneren. Die Innengebiete I_k von Γ_k sind also zusammenhängend und damit auch die Mengen $K_k = \Gamma_k \cup I_k$ (nach Lemma 5.10,1.). Deshalb ist $K(f_c)$ als Durchschnitt der kompakten, zusammenhängenden und fallenden Mengen K_k ebenfalls zusammenhängend (Lemma 5.10,2.).

\Rightarrow : Sei $c \notin K(f_c)$, das heißt, dass die Folge $(f_c^k(c))_k$ unbeschränkt ist. Dann gibt es ein k_0 mit $|f_c^{k_0}(c)| \geq 2 + |c|$. Sei Γ_0 der Kreis um 0 mit Radius $r := |f_c^{k_0}(c)|$, also $r \geq 2 + |c|$ und $f_c^{k_0}(c) \in \Gamma_0$. Wie im Fall „ \Leftarrow “ liegt c innerhalb von Γ_0 und wie dort erhalten wir ineinanderliegende Jordankurven $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{k_0}$. Wegen $f_c^{k_0}(c) \in \Gamma_0$ gilt jedoch $c \in f_c^{-k_0}(\Gamma_0) = \Gamma_{k_0}$. $f_c^{-1}(\Gamma_{k_0}) = \Gamma_{k_0+1}$ ist deshalb eine im Inneren von Γ_{k_0} gelegene Acht (Lemma 5.15,2.) aus zwei sich in 0 treffenden Jordankurven γ_1 und γ_2 (siehe Abbildung 12). Die Juliamenge liegt ganz in den Innengebieten von γ_1 und γ_2 . Da $K(f_c)$ punktsymmetrisch und nichtleer ist, liegen in jedem dieser Innengebiete Punkte von $K(f_c)$, also ist $K(f_c)$ nicht zusammenhängend. \square

Wir beweisen nun einige weitere Eigenschaften der Mandelbröt-Menge M . Dazu benötigen wir die Tatsache (Übung), dass aus $|z| \geq |c|$ und $|z| > 2$ folgt, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} f_c^k(z) = \infty$.

Proposition 5.18. (i) $M \subseteq \overline{B_2(0)} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\}$,

(ii) $M \cap \mathbb{R} = [-2, 1/4]$,

(iii) $z \in M \Leftrightarrow \bar{z} \in M$,

(iv) M ist abgeschlossen,

(v) M ist zusammenhängend.

Beweis. (i) Sei $|c| > 2$ und der Anfangswert $z = c$ gegeben. Dann gelten $|z| \geq |c|$ und $|z| > 2$, also nach der oben erwähnten Tatsache, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} f_c^k(c) = \infty$. Damit erhalten wir also für $|c| > 2$ nach Definition, dass $c \notin M$.

(ii) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $c = 1/4 + \varepsilon$. Dann gilt

$$f_c(z) = z^2 + \frac{1}{4} + \varepsilon = \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + z + \varepsilon \geq z + \varepsilon.$$

Also folgt $f_c^k(0) \geq k\varepsilon \rightarrow \infty$ für $k \rightarrow \infty$ und somit $c \notin M$. Sei also nun $c \in [-2, 1/4]$. f_c besitzt zwei Fixpunkte. Einer davon ist $\xi := \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - c}$. Wir zeigen, dass $f_c([- \xi, \xi]) \subseteq [- \xi, \xi]$ ist. Nach einer leichten Rechnung erhalten wir, dass $- \xi \leq c$ und somit folgt aus $- \xi \leq z \leq \xi$, dass

$$- \xi \leq c \leq z^2 + c = f_c(z) \leq \xi^2 + c = \xi,$$

also die Behauptung, dass die Folge $(f_c^k(c))$ beschränkt ist.

(iii) folgt aus $f_c^k(0) = \overline{f_c^k(0)}$.

(iv) Es ist eine einfache Folgerung von 1., dass

$$c \in M \Leftrightarrow |f_c^k(0)| \leq 2 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Wir erhalten also mit $M_k := \{c \in \mathbb{C} : |f_c^k(0)| \leq 2\}$, dass $M = \bigcap_{k=1}^{\infty} M_k$. Da M_k abgeschlossen ist für alle k , ist auch deren Durchschnitt M abgeschlossen. Mit 1. erhalten wir also die Kompaktheit von M .

(v) ohne Beweis! (man muss zeigen, dass die gerade definierten M_k zusammenhängend sind; dann folgt die Behauptung aus Lemma 5.10,2.) \square

5.3 Fixpunkte

Sei f eine analytische Funktion und ξ ein Fixpunkt von f . Dann erhalten wir die lineare Approximation

$$f(\xi + h) = f(\xi) + hf'(\xi) + o(|h|) = \xi + hf'(\xi) + o(|h|).$$

Wir sehen also, dass für $|f'(\xi)| < 1$ dieser Fixpunkt anziehend ist (es existiert also eine Umgebung U von ξ , sodass für alle $z \in U$ gilt: $\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(z) = \xi$). Motiviert dadurch definieren wir

Definition 5.19. Ein Fixpunkt $\xi \in \mathbb{C}$ einer analytischen Funktion f heißt

- anziehend, falls $|f'(\xi)| < 1$,
- abstoßend, falls $|f'(\xi)| > 1$,
- indifferent, falls $|f'(\xi)| = 1$.

Ist ξ ein anziehender Fixpunkt von f , so ist der Einzugsbereich $A_f(\xi)$ definiert als die Menge der Punkte z mit $\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(z) = \xi$.

Bemerkung 5.20. Wir fassen ∞ als anziehenden Fixpunkt von Polynomfunktionen f auf, da nach Lemma 5.5 der Einzugsbereich $A_f(\infty)$ von ∞ nicht leer ist. Ist nun r eine Fluchtschranke wie in Lemma 5.5, so liegt die Umgebung $U = U_{1/r}(\infty)$ ganz im Einzugsbereich $A_f(\infty)$ von ∞ . Es folgt dann, dass $U \subseteq f^{-1}(U)$ und $f^{-1}(U)$ liegt natürlich auch in $A_f(\infty)$. Wiederholte Anwendung von f^{-1} liefert dann

$$U \subseteq f^{-1}(U) \subseteq f^{-2}(U) \subseteq \dots \subseteq f^{-k}(U) \subseteq \dots \subseteq A_f(\infty).$$

Ist umgekehrt z ein Element von $A_f(\infty)$, so gibt es ein k_0 mit $|f^{k_0}(z)| > r$, also $f^{k_0}(z) \in U$ oder $z \in f^{-k_0}(U)$ und damit: $A_f(\infty) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(U)$, also folgt insgesamt

$$A_f(\infty) = \bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(U).$$

Da $A_f(\infty) = \mathbb{C} \setminus K(f)$, erhalten wir nun als Korollar dieser Bemerkung

Korollar 5.21. *Sei f ein Polynom vom Grad ≥ 2 . Dann ist die ausgefüllte Julia-Menge $K(f)$ abgeschlossen.*

Beispiel 5.22 (Fixpunkte quadratischer Funktionen). Sei wie oben $f_c(z) = z^2 + c$. Dann sind die beiden Fixpunkte von f_c gegeben durch $\xi_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - c}$, wobei hier wieder mit $\sqrt{\cdot}$ die Wurzel mit positivem Realteil gemeint ist. Wir beantworten nun die Frage, unter welchen Bedingungen diese Fixpunkte anziehend bzw. abstoßend sind.

- Ist $c = 1/4$, so ist $\xi = \xi_{\pm} = 1/2$ und $f'_c(1/2) = 1$. ξ ist also indifferent.
- Ist $c \neq 1/4$, ist ξ_- für $|\xi_-| > 1/2$ wegen $|f'_c(\xi_-)| = 2|\xi_-| > 1$ abstoßend. Ist $|\xi_-| \leq 1/2$, so folgt, dass $\xi_+ > 1/2$ (mache eine Skizze!) und somit ξ_+ abstoßend ist.

Weiters betrachten wir noch $|c| < 1/4$. Als Lösung von $z^2 - c + c = 0$ gilt für ξ_{\pm} , dass $\xi_+ \xi_- = c$, also $|\xi_+||\xi_-| < 1/4$. Daraus folgt wiederum, dass $|\xi_-| < 1/2$ oder $|\xi_+| < 1/2$, also ist einer der Fixpunkte anziehend.

Wir fassen also zusammen: Für die beiden Fixpunkte ξ_{\pm} von f_c gilt: Im Fall $c = 1/4$ ist der Fixpunkt ξ_{\pm} indifferent, im Fall $c \neq 1/4$ ist mindestens einer der Fixpunkte abstoßend. Weiters ist für $|c| < 1/4$ mindestens einer der Fixpunkte von f_c anziehend.

Proposition 5.23. *Sei $\xi \in \mathbb{C}$ ein anziehender Fixpunkt einer analytischen Funktion f , das heißt, dass $|f'(\xi)| < 1$. Dann existiert ein $\delta > 0$, sodass $U_{\delta}(\xi) = \{z : |\xi - z| < \delta\} \subseteq A_f(\xi)$ und $f(U_{\delta}(\xi)) \subseteq U_{\delta}(\xi)$.*

Beweis. Übung. □

Bemerkung 5.24. Sei $\xi \in \mathbb{C}$ ein anziehender Fixpunkt von f . Wähle $U_{\delta}(\xi)$ gemäß der letzten Proposition. Dann folgt daraus

$$U_{\delta}(\xi) \subseteq f^{-1}(U_{\delta}(\xi)) \subseteq \cdots \subseteq f^{-k}(U_{\delta}(\xi)) \subseteq \cdots \subseteq A_f(\xi) = \bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(U_{\delta}(\xi)).$$

$A_f(\xi)$ ist also als Vereinigung offener Mengen wieder offen. Da klarerweise $A_f(\xi) \subseteq K(f)$, ist damit auch $A_f(\xi)$ Teilmenge des Inneren von $K(f)$.

5.4 Periodische Punkte und Zyklen

Beispiel 5.25. Wir betrachten $f_c(z) = z^2 + c$ für reelle Parameter c zwischen 0 und -1 . Wir beschränken uns dabei auf reelle z (Abbildung 13) und untersuchen den Fixpunkt $\xi = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - c}$ in Abhängigkeit von c . ξ bewegt sich von 0 ($c = 0$) bis $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ ($c = -1$). Weiters gilt

$$|f'_c(\xi)| = 2|\xi| = |1 - \sqrt{1 - 4c}|.$$

Es folgt also

$$|f'_c(\xi)| = \begin{cases} 0, & c = 0 \\ \sim 0.732, & c = -1/2 \\ 1, & c = -3/4 \\ \sim 1.236, & c = -1. \end{cases}$$

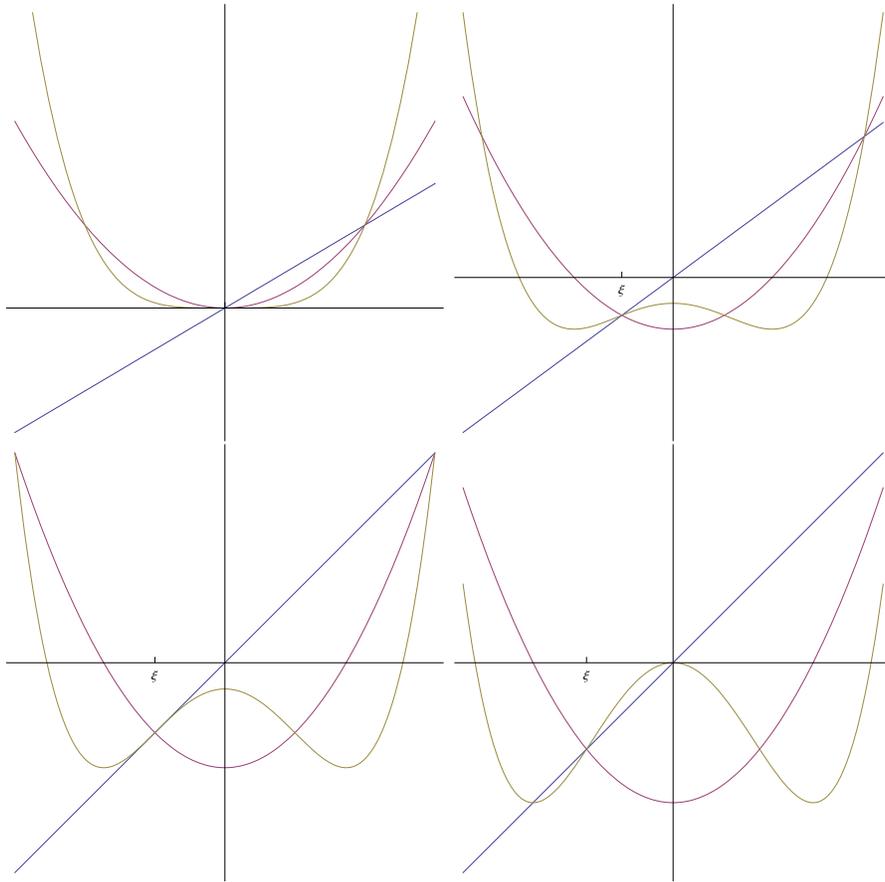


Abbildung 13: Die Funktionen $z \mapsto z$, f_c und f_c^2 für $c = 0, -0.5, -0.75, -1$ in dieser Reihenfolge.

Für die Parameterwerte $c = 0$ und $c = -1/2$ ist der Fixpunkt also anziehend, für $c = -3/4$ indifferent und für $c = -1$ abstoßend. Man sieht auch, dass beim Durchgang von c durch $-3/4$ der anziehende Fixpunkt ξ zu einem abstoßenden wird. Gleichzeitig (siehe Abbildung 13) entstehen aus ξ zwei anziehende Fixpunkte von f_c^2 . Dieses Verhalten (Aufspaltung eines anziehenden Fixpunktes in einen abstoßenden und Entstehen eines anziehenden 2-Zyklus) nennt man *Bifurkation* (vgl. logistische Abbildung $f(x) = rx(1-x)$; Dynamische Systeme).

Definition 5.26. ξ heißt periodischer Punkt von $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, falls es einen Index $m \geq 1$ gibt mit $f^m(\xi) = \xi$. Ist $m \geq 1$ minimal mit dieser Eigenschaft, so heißt m die Periode von ξ . $Z = \{\xi, f(\xi), \dots, f^{m-1}(\xi)\}$ heißt der m -Zyklus von f .

Als Übungsbeispiel kann man beweisen, dass alle Elemente eines Zyklus verschieden sind.

Beispiel 5.27 (Punkte der Periode 2 von f_c). Wir suchen die Lösungen der Gleichung $f_c^2(z) - z = 0$. Zu den Lösungen dieser Gleichung gehören die Fixpunkte ξ_{\pm} von f_c , also folgt

$$f_c^2(z) - z = (z^2 + c)^2 + c - z = (z - \xi_-)(z - \xi_+)(z^2 + z + c + 1).$$

Die Lösungen der Gleichung $z^2 + z + c + 1 = 0$ sind

$$\xi_0 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{4} - c}, \quad \xi_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{4} - c},$$

wobei $f(\xi_0) = \xi_1$ und $f(\xi_1) = \xi_0$, $\{\xi_0, \xi_1\}$ ist also ein 2-Zyklus. Im Falle $c = -3/4$ ist $\xi_0 = \xi_1 = \xi_- = -1/2$ und $\xi_+ = 3/2$. Der Zyklus $\{\xi_0, \xi_1\}$ „kollabiert“ also beim Durchgang von c durch $-3/4$.

Definition 5.28. Ist $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch, so heißt ein Punkt ξ der Periode m anziehend, abstoßend, indifferent, falls der Fixpunkt ξ von f^m anziehend, abstoßend, indifferent ist.

Mit der Kettenregel ergibt sich nun für einen Punkt ξ

$$(f^m)'(\xi) = f'(f^{m-1}(\xi)) \cdot f'(f^{m-2}(\xi)) \cdots f'(f(\xi)) \cdot f'(\xi).$$

Ist ξ ein Punkt der Periode m , so folgt daraus unter Beachtung von $f^m(\xi) = \xi$, dass

$$(f^m)'(\xi) = (f^m)'(f(\xi)) = \cdots = (f^m)'(f^{m-1}(\xi)).$$

Die Ableitungen von f^m in den Punkten des m -Zyklus $Z = \{\xi, f(\xi), \dots, f^{m-1}(\xi)\}$ stimmen also überein und sie sind gleich dem Produkt der Ableitungen von f in den m Zyklenelementen. Mit ξ sind somit alle Zyklenelemente $f^k(\xi)$, $0 \leq k \leq m-1$ anziehende (abstoßende, indifferente) Fixpunkte von f^m . Man sagt dann, dass der m -Zyklus anziehend (abstoßend, indifferent) ist.

Beispiel 5.29. Sei $f(z) = z^2$. Die periodischen Punkte ergeben sich mit $f^m(z) = z^{2^m}$ als Lösungen von $z^{2^m} = z$, bzw. $(z^{2^m-1} - 1)z = 0$. 0 ist ein anziehender Fixpunkt der Periode 1 und die $(2^m - 1)$ -ten Einheitswurzeln $z_k = e^{2\pi i \frac{k}{2^m-1}}$ für $0 \leq k \leq 2^m - 2$ sind abstoßende periodische Punkte der Periode m . Die abstoßenden periodischen Punkte liegen also dicht in S^1 . Dies ist ein erstes Indiz für chaotisches Verhalten von f auf S^1 .

Definition 5.30. Wir definieren den Einzugsbereich eines anziehenden Zyklus

$$Z = \{\xi, f(\xi), \dots, f^{m-1}(\xi)\}$$

der Periode m als

$$A(Z) = \bigcup_{k=0}^{m-1} A_{f^m}(f^k(\xi))$$

Es gilt dann auch, dass $A(Z) = \bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(U)$ mit einer Umgebung U wie in Proposition 5.23 (angewandt auf f^m).

5.5 Julia-Mengen $J(f)$

Wir werden in diesem Abschnitt noch einige Eigenschaften der Julia-Mengen $J(f)$ herleiten und erinnern zunächst an deren Definition. $J(f)$ ist der Rand der ausgefüllten Julia-Menge $K(f)$ und $K(f) = \{z \in \mathbb{C} : (f^k(z))_k \text{ beschränkt}\}$. Wir beginnen wieder mit einem Beispiel

Beispiel 5.31. Sei $f(z) = z^2$. Dann ist $K(f) = \{z : |z| \leq 1\}$ und $J(f) = S^1 = \{z : |z| = 1\}$. Das Innere von $K(f)$ ist der Einzugsbereich $A_f(0)$ des Fixpunktes 0. Sei $B = (\alpha, \beta) = \{e^{i\varphi} : \alpha < \varphi < \beta\}$ ein beliebiger offener Bogen in S^1 . Dann gibt es ein k , sodass $f^k(B) = S^1$. Die Funktion $f : S^1 \rightarrow S^1$ hängt also im folgenden Sinn sensitiv von den Anfangswerten ab.

Definition 5.32. Eine Funktion $f : A \rightarrow A$ ($A \subseteq \mathbb{C}$) heißt sensitiv abhängig von den Anfangswerten, wenn es eine Zahl $\sigma > 0$ gibt, sodass zu jedem $z_0 \in A$ und jeder Umgebung $U_\varepsilon(z_0)$ ein $z \in A \cap U_\varepsilon(z_0)$ und ein Index k_0 existieren mit $|f^{k_0}(z_0) - f^{k_0}(z)| > \sigma$.

Vergleicht man die Dynamik von $f(z) = z^2$ in den invarianten Bereichen $A_f(\infty) = \{z : |z| > 1\}$, S^1 und $A_f(0) = \{z : |z| < 1\}$, so ist sie auf der Julia-Menge S^1 am kompliziertesten. Wir werden im Laufe dieses Abschnitts noch sehen, dass dies allgemein der Fall ist. Neben der Dichtheit der periodischen Punkte (Beispiel 5.29) ist die sensitive Abhängigkeit von den Anfangswerten ein weiteres Indiz für das „chaotische Verhalten“ der Funktion $f(z) = z^2$ auf S^1 . Wir kommen am Schluss dieses Abschnitts noch darauf zurück.

Bezüglich der Eigenschaften von $J(f)$ für allgemeine Polynome f , haben wir zunächst

Satz 5.33. Sei f ein Polynom vom Grad ≥ 2 . Dann gelten

- (i) $J(f)$ ist kompakt und nichtleer,
- (ii) $J(f)$ ist invariant bzgl. f , das heißt

$$f(J(f)) \subseteq J(f) \quad \text{und} \quad f^{-1}(J(f)) \subseteq J(f).$$

Beweis. (i) $J(f)$ ist beschränkt, da $K(f)$ beschränkt ist. Sei I das Innere von $K(f)$. Dann ist $J(f) = \overline{K(f)} \cap \mathbb{C} \setminus I$ als Durchschnitt zweier abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen. Wäre $J(f)$ leer, so wäre $K(f)$ offen und abgeschlossen in \mathbb{C} und somit entweder leer oder ganz \mathbb{C} . Da wir aber schon gesehen haben, dass $K(f)$ nichtleer und beschränkt ist, kann $J(f)$ nicht leer sein.

- (ii) Wir zeigen zunächst $f(J(f)) \subseteq J(f)$. Dazu sei $f(z) \notin J(f)$. Daraus folgt entweder $f(z) \in A_f(\infty)$ oder $f(z)$ ist innerer Punkt von $K(f)$. Im Falle $f(z) \in A_f(\infty)$ folgt sofort $z \in A_f(\infty)$ und somit $z \notin J(f)$. Ist $f(z)$ innerer Punkt von $K(f)$, so gibt es eine Umgebung $U_\delta(z)$ von z , die in $K(f)$ abgebildet wird (f ist stetig). Es folgt

$$U_\delta(z) \subseteq K(f) \Rightarrow z \notin \partial K(f) = J(f).$$

Damit erhalten wir die Behauptung $f(J(f)) \subseteq J(f)$.

Nun zeigen wir $f^{-1}(J(f)) \subseteq J(f)$. Sei dazu $z \in J(f)$ und $w \in f^{-1}(z)$. Dann gilt $w \in K(f)$, also entweder $w \in J(f)$ oder w ist innerer Punkt von $K(f)$. Angenommen w ist innerer Punkt von $K(f)$. Ist dann $U_\delta(w)$ eine in $K(f)$ enthaltene Umgebung von w , so ist $f(U_\delta(w))$ ebenfalls offen (Satz von der Gebietstreue; siehe die Vorbemerkungen im Beweis von Lemma 5.15). $f(w) = z$ ist dann also innerer Punkt von $K(f)$. Dies ist aber nicht möglich, da $z \in J(f)$. Es folgt also die Behauptung $f^{-1}(J(f)) \subseteq J(f)$. \square

Analog zu den ähnlichen Resultaten für $K(f)$ folgt nun auch mit $J = J(f)$

$$f(J) = J = f^{-1}(J).$$

Lage der periodischen Punkte Wir haben schon gesehen (Bemerkung 5.24), dass anziehende Fixpunkte $\xi \in \mathbb{C}$ im Inneren von $K(f)$ liegen. Ist ξ ein anziehender periodischer Punkt der Periode m , so ist ξ ein anziehender Fixpunkt von f^m . Nun gilt aber $K(f^m) = K(f)$, also ist ξ auch innerer Punkt von $K(f)$. Wir fassen zusammen

Satz 5.34. *Sei f ein Polynom vom Grad ≥ 2 . Dann liegen anziehende Fixpunkte und anziehende periodische Punkte aus \mathbb{C} im Inneren von $K(f)$.*

Wir haben in Beispiel 5.29 gesehen, dass alle abstoßenden periodischen Punkte von $f(z) = z^2$ in $J(f)$ liegen. Dies gilt allgemein:

Satz 5.35. *Sei f ein Polynom vom Grad ≥ 2 . Dann liegen die abstoßenden Fixpunkte und die abstoßenden periodischen Punkte von f in der Julia-Menge $J(f)$.*

Beweis. Sei ξ zunächst ein abstoßender Fixpunkt von f , also gilt $|f'(\xi)| > 1$. Dann liegt ξ in $K(f)$. Wir werden nun zeigen, dass ξ nicht im Inneren von $K(f)$ liegen kann. In diesem Fall würde es nämlich eine Kreisscheibe $\{z : |z - \xi| \leq \delta\}$ geben, die ganz in $K(f)$ liegt. Für jeden Anfangswert z mit $|z - \xi| = \delta$ gilt dann $f^k(z) \in K(f)$, bzw. $|f^k(z)| \leq r$ für eine Fluchtschranke r (vgl. Lemma 5.5). Es folgt dann mit der Cauchyschen Integralformel

$$(f^k)'(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\xi|=\delta} \frac{f^k(z)}{(z-\xi)^2} dz,$$

und somit

$$|(f^k)'(\xi)| \leq \frac{r}{\delta}$$

mit der Standardabschätzung für Kurvenintegrale. Da für einen Fixpunkt ξ von f gilt, dass $(f^k)'(\xi) = f'(\xi)^k$, erhalten wir

$$|f'(\xi)|^k \leq \frac{r}{\delta} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Dies steht aber mit $|f'(\xi)| > 1$ im Widerspruch. Ein abstoßender Fixpunkt ξ von f liegt deshalb stets auf dem Rand von $K(f)$. Ist $\xi \in \mathbb{C}$ ein abstoßender periodischer Punkt der Periode m von f , so folgt mit $J(f^m) = J(f)$ die Behauptung für periodische Punkte. \square

Bilder unter f von Umgebungen der Punkte in der Julia-Menge von f

Beispiel 5.36. Sei nun wieder $f(z) = z^2$. Dann gilt für einen beliebigen Punkt $z_0 \in J(f) = S^1$ und eine beliebige Umgebung U von z_0 in \mathbb{C} mit $0 \notin U$, dass die Bilder der Iterierten $f^k(U)$ die gesamte Ebene \mathbb{C} mit Ausnahme des Nullpunktes überdecken, es gilt also

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U) = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Dieses Verhalten gilt allgemein; ohne Beweis formulieren wir den dazugehörigen

Satz 5.37. *Sei f ein Polynom vom Grad ≥ 2 . Ist dann z_0 ein Punkt der Juliamenge $J(f)$ und U eine beliebige Umgebung von z_0 , so überdecken die Bilder $f^k(U)$ ($k \in \mathbb{N}$) ganz \mathbb{C} mit Ausnahme höchstens eines Punktes a , das heißt es gilt*

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U) = \mathbb{C} \quad \text{oder} \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U) = \mathbb{C} \setminus \{a\}$$

Bemerkung 5.38. Ist a ein Ausnahmepunkt in vorigen Satz, dann gibt es einen Punkt z_0 in $J(f)$ und eine Umgebung U von z_0 , sodass $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U) = \mathbb{C} \setminus \{a\}$. Ein solcher Punkt a hat kein von a verschiedenes Urbild. Die Gleichung $f(z) = a$ besitzt also höchstens die Lösung $z = a$. Da das Polynom $f(z) - a$ nach dem Fundamentalsatz der Algebra mindestens eine Nullstelle besitzt, ist $z = a$ eindeutig bestimmte Lösung von $f(z) = a$. Es gilt somit $f^{-1}(a) = \{a\}$. Daraus folgt weiter $f(z) - a = C(z - a)^n$ mit einer Konstanten C . Da $n \geq 2$, erhalten wir $f'(a) = 0$. a ist also ein anziehender Fixpunkt von f und damit kein Element der Julia-Menge $J(f)$ (Satz 5.35).

Aus dieser Bemerkung und der Tatsache, dass $J(f)$ kompakt ist, erhalten wir

Korollar 5.39. Sei f ein Polynom vom Grad ≥ 2 . Ist dann z_0 ein Punkt der Julia-Menge $J(f)$ und U eine Umgebung von z_0 , so existiert ein Index m mit

$$J(f) \subseteq \bigcup_{k=1}^m f^k(U).$$

Dichtheit der Urbilder

Beispiel 5.40. Sei $f(z) = z^2$, $z^* = 1 \in S^1$. Dann gilt $f^{-k}(1) = \{z : z^{2^k} = 1\}$. $f^{-k}(1)$ besteht also aus den 2^k -ten Einheitswurzeln. Daraus folgt, dass $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(1)$ dicht in S^1 liegt. Entsprechendes gilt für jeden anderen Punkt $z^* = e^{i\varphi}$ von $J(f) = S^1$.

Wir verallgemeinern dieses Beispiel wieder mit einem Satz

Satz 5.41. Sei f ein Polynom vom Grad ≥ 2 und z^* ein beliebiger Punkt von $J(f)$. Dann liegt die Menge der Urbilder von z^* dicht in $J(f)$, es gilt also

$$J(f) = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z^*)}.$$

Beweis. Sei z^* ein Punkt der Julia-Menge $J(f)$.

- (i) $J(f) \supseteq \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z^*)}$: Mit z^* liegen wegen der Invarianz von $J(f)$ auch die Urbilder $f^{-1}(z^*)$, $f^{-2}(z^*)$, ... in $J(f)$. Wegen der Abgeschlossenheit von $J(f)$ folgt damit die erste Teilmengenrelation.
- (ii) $J(f) \subseteq \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z^*)}$: Sei $z \in J(f)$. Wir zeigen, dass in jeder Umgebung U von z ein Element u^* einer gewissen Urbildmenge $f^{-k_0}(z^*)$ liegt. Nach Satz 5.37 gibt es ein k_0 mit $z^* \in f^{k_0}(U)$. Deshalb existiert ein $u^* \in U$ mit $z^* = f^{k_0}(u^*)$ bzw. $u^* \in f^{-k_0}(z^*)$. \square

Gelegentliche Surjektivität Wir haben das Verhalten der Funktion $f(z) = z^2$ auf ihrer Julia-Menge S^1 betrachtet und gezeigt, dass für einen beliebig kleinen Kreisbogen B der Bildbogen $f^{k_0}(B)$ für hinreichend große k_0 die gesamte Julia-Menge überdeckt. Dies kann nun folgendermaßen verallgemeinert werden.

Satz 5.42. *Wir betrachten die quadratische Familie $f(z) = z^2 + c$. Ist z_0 ein beliebiger Punkt der Julia-Menge $J = J(f)$ und U eine Umgebung von z_0 , so gibt es einen Index m mit*

$$f^m(J \cap U) = J.$$

Beweis. Wir betrachten $f(z) = z^2 + c$ zunächst für Parameterwerte $c \neq 1/4$; dann besitzt $f(z) = z^2 + c$ einen abstoßenden Fixpunkt ξ in $J = J(f)$ (siehe Beispiel 5.22). Sei nun z_0 ein beliebiger Punkt der Julia-Menge und U eine Umgebung von z_0 ; wir unterscheiden zwei Fälle.

- (i) $z_0 = \xi$. Da ξ ein abstoßender Fixpunkt ist, gibt es eine Umgebung V von ξ mit $V \subseteq U$ und $V \subseteq f(V)$, also

$$V \subseteq f(V) \subseteq f^2(V) \subseteq \cdots \subseteq f^k(V) \subseteq \cdots.$$

Wegen Korollar 5.39 existiert somit ein Index m mit $J(f) \subseteq \bigcup_{k=1}^m f^k(V)$ und somit $J \subseteq f^m(V) \subseteq f^m(U)$. Die Invarianz von J liefert nun die Behauptung $J = f^m(J \cap U)$.

- (ii) $z_0 \neq \xi$. Sei U' eine in U enthaltene offene Umgebung von z_0 . Dann gibt es ein k mit $\xi \in f^k(U')$, wobei $f^k(U')$ eine Umgebung von ξ ist. Wählen wir nun eine in $f^k(U')$ enthaltene Umgebung V von ξ mit $V \subset f(V)$, so folgt wie im Fall 1. für ein gewisses m^* , dass $J \subseteq f^{m^*}(V) \subseteq f^{m^*+k}(U') \subseteq f^{m^*+k}(U)$ und damit $J = f^{m^*+k}(J \cap U)$.

Im Fall $c = 1/4$ besitzt $f(z) = z^2 + c$ zwar keinen abstoßenden Fixpunkt, jedoch den abstoßenden 2-Zyklus $\xi_0 = -1/2 - i, \xi_1 = -1/2 + i$. Die Zyklenelemente ξ_0, ξ_1 sind somit abstoßende Fixpunkte von f^2 . Ersetzen wir oben ξ durch ξ_0 und f durch f^2 , so folgt $(f^2)^m(J(f^2) \cap U) = J(f^2)$ für ein gewisses m , also mit $J(f^2) = J(f) = J$ die Behauptung $f^{2m}(J \cap U) = J$. \square

Bemerkung 5.43. Der Beweis zeigt, dass die Einschränkung auf die quadratische Familie nur gemacht worden ist, um die Existenz eines periodischen Punktes zu gewährleisten. Es kann aber gezeigt werden, dass ein beliebiges Polynom f vom Grad ≥ 2 stets einen abstoßenden periodischen Punkt besitzt (sogar, dass die abstoßenden periodischen Punkte in $J(f)$ dicht liegen). Obiger Satz ist also für beliebige Polynome vom Grad ≥ 2 gültig.

Aus Satz 5.42 folgt nun, dass ein beliebiges Polynom f vom Grad ≥ 2 auf seiner Julia-Menge sensitiv von seinen Anfangswerten abhängt. Satz 5.42 erlaubt weiter die folgende geometrische Interpretation: Ist $J \cap U$ ein beliebig kleines „Stück“ der Julia-Menge $J = J(f)$, so ist die gesamte Julia-Menge das Bild dieses Ausschnitts unter einer gewissen Iterierten f^m . In jedem noch so kleinen Teil der Julia-Menge ist also bereits die Komplexität der gesamten Julia-Menge enthalten. Julia-Mengen sind deshalb in einem verallgemeinerten Sinn selbstähnlich. Die zugrundeliegende Transformation ist dabei allerdings keine Ähnlichkeitstransformation, sondern eine analytische Abbildung vom Typ eines Polynoms.

Chaos Sei f ein Polynom vom Grad ≥ 2 mit der Julia-Menge J . Wie wir oben sahen, hängt $f : J \rightarrow J$ sensitiv von den Anfangswerten ab. Weiter folgt unmittelbar aus Satz 5.42, dass f topologisch transitiv ist gemäß folgender Definition

Definition 5.44. Eine Funktion $f : A \rightarrow A$ ($A \subseteq \mathbb{C}$) heißt topologisch transitiv, wenn es zu je zwei offenen Mengen $U, V \subseteq \mathbb{C}$ ($U \cap A, V \cap A \neq \emptyset$) ein m gibt mit $(U \cap A) \cap f^m(V \cap A) \neq \emptyset$.

Eine topologisch transitive Funktion wird auch *mischend* genannt, da sie ihren Definitionsbereich „gut durchmischt“. Wie klein die Teilmengen $U \cap A$ und $V \cap A$ auch sind, nach einer gewissen Zahl von Iterationen fällt ein Element von $V \cap A$ in die Menge $U \cap A$. Wie wir in Bemerkung 5.43 erwähnten, liegen die abstoßenden periodischen Punkte eines Polynoms dicht in $J(f)$. Damit erhalten wir

Satz 5.45. Sei f ein Polynom vom Grad ≥ 2 mit der Julia-Menge J . Dann ist f auf J chaotisch, das heißt es gilt

- (i) $f : J \rightarrow J$ ist sensitiv abhängig von den Anfangswerten,
- (ii) $f : J \rightarrow J$ ist topologisch transitiv,
- (iii) die abstoßenden periodischen Punkte von f liegen dicht in J .

5.6 Weitere Eigenschaften von Julia-Mengen und der Mandelbrot-Menge

In diesem abschließenden Abschnitt sammeln wir ohne Beweise noch weitere Tatsachen über diese beiden Fraktale. Sei f im folgenden immer ein Polynom vom Grad ≥ 2 . Da der Einzugsbereich $A_f(\infty)$ von ∞ mit dem Komplement der ausgefüllten Julia-Menge $K(f)$ übereinstimmt, ist der Rand von $A_f(\infty)$ gleich der Julia-Menge $J(f)$. Dies gilt sogar in folgender Allgemeinheit.

Satz 5.46. Ist ξ ein anziehender Fixpunkt von f , so gilt

$$\partial A_f(\xi) = J(f).$$

Eine weitere Eigenschaft der Julia-Menge ist

Satz 5.47. Die Julia-Menge $J(f)$ besitzt keine isolierten Punkte.

Man kann zeigen, dass aus diesem Satz insbesondere folgt, dass die Julia-Menge $J(f)$ überabzählbar ist.

Über den Einzugsbereich von Zyklen und kritische Punkte können wir folgendes aussagen:

Satz 5.48. Ist ξ anziehender Punkt der Periode m von f , so enthält der Einzugsbereich des Zyklus $\{\xi, f(\xi), \dots, f^{m-1}(\xi)\}$ einen kritischen Punkt z_0 von f (das heißt einen Punkt z_0 mit $f'(z_0) = 0$).

Bemerkung 5.49. Die quadratische Familie $f_c(z) = z^2 + c$ besitzt wegen $f'_c(z) = 2z$ nur den kritischen Punkt 0 und damit höchstens einen anziehenden Zyklus in \mathbb{C} . Falls f_c einen anziehenden Zyklus besitzt, so liegt der kritische Punkt 0 in dessen Einzugsbereich.

Betrachten wir nun die Menge M' aller Punkte c , für die ein anziehender Zyklus tatsächlich existiert:

$$M' = \{c \in \mathbb{C} : f_c \text{ besitzt einen anziehenden Zyklus}\}.$$

Ist $c \in M'$, so hat f_c einen anziehenden Zyklus und aus der obigen Bemerkung folgt, dass dieser Zyklus den Punkt 0 anzieht. Die Folge $(f_c^k(0))_k$ ist also beschränkt und somit ist $c \in M$, es gilt also

$$M' \subseteq M.$$

Der Hauptkörper W_0 der Mandelbrot-Menge M Wir betrachten nun die Menge W_0 aller Parameter c , für die ein anziehender Fixpunkt existiert, das heißt es gibt ein z mit $f_c(z) = z^2 + c = z$ und $|f'_c(z)| = 2|z| < 1$. Wir erhalten

$$W_0 := \{c \in \mathbb{C} : c = z - z^2 \text{ mit } |z| < 1/2\}.$$

Dies ist eine Kardioide (siehe Abbildung 14).

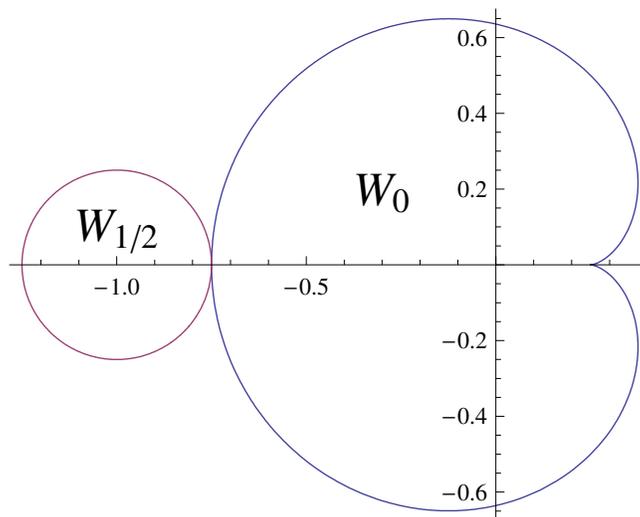


Abbildung 14: Haupt- und Nebenkörper W_0 und $W_{1/2}$ der Mandelbrot-Menge.

Für Parameterwerte $c \in W_0$ kann man über die Gestalt der dazugehörigen Julia-Menge $J(f_c)$ noch folgendes aussagen:

Satz 5.50. *Für $c \in W_0$ ist $J(f_c)$ eine Jordankurve.*

Es stellt sich aber heraus, dass diese Jordankurve meist unendliche Länge besitzt, man kann sogar die Hausdorffdimension abschätzen, es gilt für c nahe bei 0

$$\dim(J(f_c)) = 1 + \frac{|c|^2}{4 \log 2} + o(|c|^2).$$

Der Nebenkörper $W_{1/2}$ der Mandelbrot-Menge M In Beispiel 5.27 haben wir gesehen, dass die Punkte ξ_0, ξ_1 der Periode 2 von f_c die Gleichung

$$z^2 + z + c + 1 = 0$$

erfüllen. Dieser 2-Zyklus ist anziehend, falls $|(f^2)'(\xi_k)| < 1$ für $k = 0, 1$. Es gilt aber

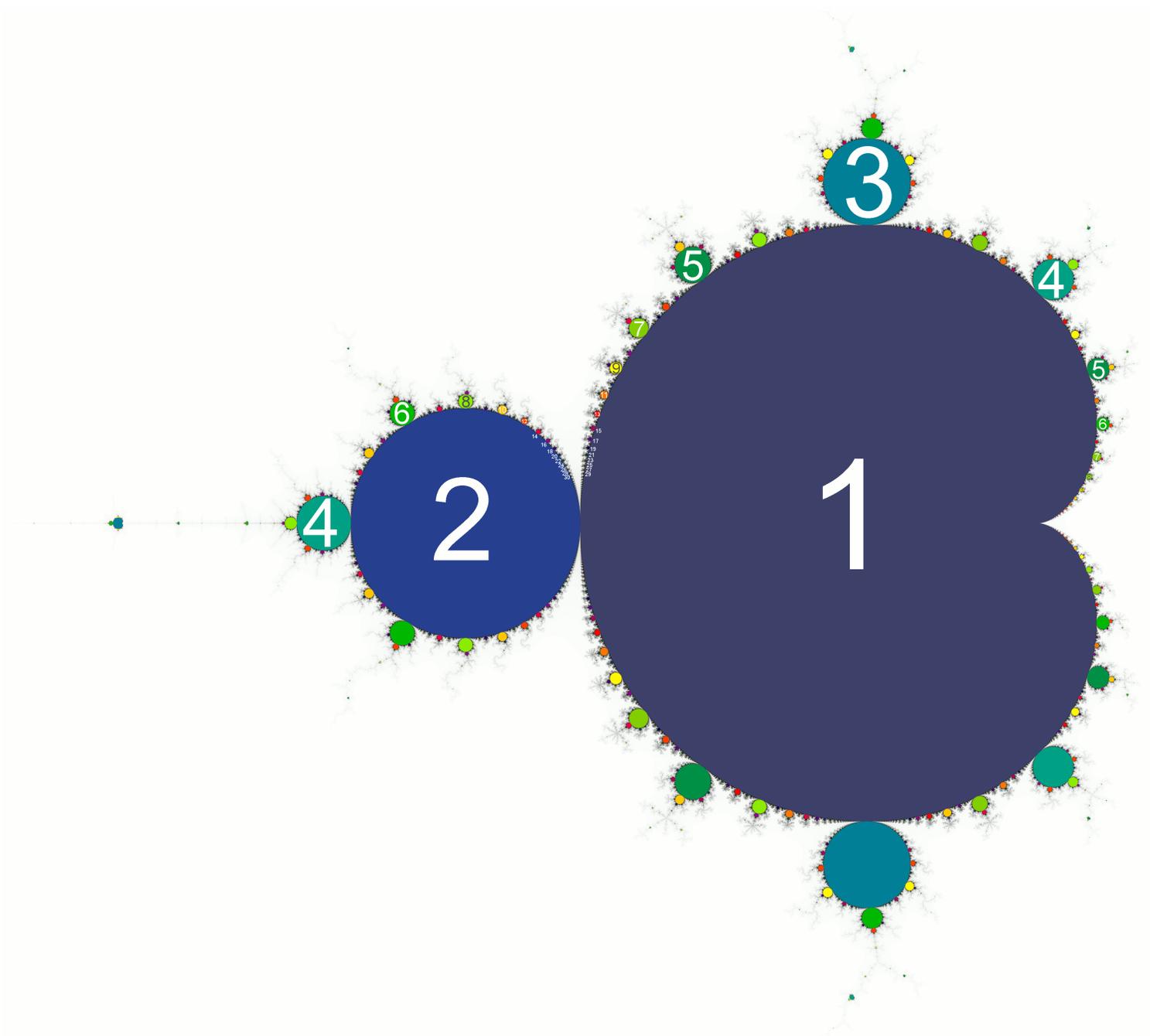
$$(f_c^2)'(\xi_k) = f_c'(f_c(\xi_k))f_c'(\xi_k) = f_c'(\xi_0)f_c'(\xi_1) = 4\xi_1\xi_0 = c + 1.$$

Dies wird betragsmäßig durch 1 majorisiert, falls $|c + 1| < 1/4$. Deshalb besitzt f_c genau dann einen anziehenden 2-Zyklus, falls $|c + 1| < 1/4$. Wir definieren also den kreisförmigen Nebenkörper

$$W_{1/2} := \{c : f_c \text{ besitzt einen anziehenden 2-Zyklus}\} = \{c : |c + 1| < 1/4\}.$$

Siehe dazu Abbildung 14.

Tatsächlich gilt allgemeiner: f_c besitzt in jeder Zusammenhangskomponente W von M' einen anziehenden Zyklus einer festen Länge m . Eine solche Komponente bezeichnen wir als *Komponente der Periode m von M'* . Die Abbildung auf der nächsten Seite bildet genau diese Zusammenhangskomponenten ab, wobei die Zahlen innerhalb dieser Komponenten deren Perioden m bezeichnen.



Literatur

- [Ahl66] Lars V. Ahlfors. *Complex analysis: An introduction of the theory of analytic functions of one complex variable*. Second edition. McGraw-Hill Book Co., New York, 1966.
- [Bar88] Michael Barnsley. *Fractals everywhere*. Academic Press Inc., Boston, MA, 1988.
- [DRU98] J. Dufner, A. Roser, and F. Unseld. *Fraktale und Julia-Mengen*. Verlag Harri Deutsch, Thun, 1998. With 1 CD-ROM (Windows).
- [Elt87] John H. Elton. An ergodic theorem for iterated maps. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 7(4):481–488, 1987.
- [Fal86] K. J. Falconer. *The geometry of fractal sets*, volume 85 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [Fal90] Kenneth Falconer. *Fractal geometry*. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1990. Mathematical foundations and applications.
- [Fal97] Kenneth Falconer. *Techniques in fractal geometry*. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1997.
- [Fol99] Gerald B. Folland. *Real analysis*. Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons Inc., New York, second edition, 1999. Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication.
- [Hut81] John E. Hutchinson. Fractals and self-similarity. *Indiana Univ. Math. J.*, 30(5):713–747, 1981.
- [Par67] K. R. Parthasarathy. *Probability measures on metric spaces*. Probability and Mathematical Statistics, No. 3. Academic Press Inc., New York, 1967.
- [wika] <http://de.wikipedia.org/wiki/Fraktal>.
- [wikb] <http://de.wikipedia.org/wiki/Julia-Menge>.
- [wikc] <http://de.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot-Menge>.

Index

- $\mathcal{K}(X)$, 5
- Ähnlichkeit, 27
- Überdeckungslemma, 23
- Übergangswahrscheinlichkeit, 36

- absolute Stetigkeit
 - einer Funktion, 4
 - eines Maßes, 15
- Attraktor eines IFS, 9

- Banachscher Fixpunktsatz, 8
- bedingte Erwartung, 30
- bedingte Wahrscheinlichkeit, 32
- beschränkt, 6
- Birkhoffscher Ergodensatz, 40
- Borelsche σ -Algebra, 14
- Brownsche Bewegung, 49

- Cantor-Funktion, 4
- Cantormenge, 3
- chaotisch, 74

- Dimensionsfunktion, 22
- Durchmesser einer Menge, 17

- ergodisch, 39

- Fixpunkt
 - abstoßender, 66
 - anziehender, 66
 - Einzugsbereich von einem, 66
 - indifferent, 66

- Hausdorff-Metrik, 5
- Hausdorffdimension, 22
- Hausdorffmaß, 17

- invariant, 39
- invariante Anfangsverteilung, 40
- invariantes Maß
 - bzgl. IFS, 26
- iteriertes Funktionensystem (IFS), 8
 - mit Kondensation, 11

- Jordankurve, 60
- Jordanscher Kurvensatz, 60
- Julia-Menge, 53
 - ausgefüllte, 53

- Kochsche Schneeflocke, 10
- Kontraktion, 7

- Lipschitzkonstante, 7

- Maß
 - σ -endliches, 15
 - äußeres, 13
 - metrisches, äußeres, 14
 - vollständiges, 14
- maßtreu, 39
- Mandelbrot-Menge, 60
 - Hauptkörper der, 75
 - Nebenkörper der, 76
- Markovkette, 35
- Messbarkeit, 14

- normal zur Basis b , 47
- Null-Eins-Gesetz
 - von Kolmogorov, 45

- open set condition, 28

- periodischer Punkt, 68
- Potential, 25
- präkompakt, 6
- Pythagoras-Baum, 11

- Riemannsches Zahlenkugel, 63
- Rieszscher Darstellungssatz, 15

- Satz von
 - Carathéodory, 14
 - der Gebietstreue, 61
 - Elton, 43
 - Radon-Nikodym, 15
- selbstähnlich, 28
- sensitiv abhängig, 69
- Sierpinski-Dreieck, 9
- Sierpinski-Teppich, 10
- starkes Gesetz der großen Zahlen, 46
- stationär, 38
- stereographische Projektion, 63

- terminale σ -Algebra, 45

topologisch transitiv, 74

Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n , 19

Wiener-Maß, 49

Wiener-Raum, 49

zusammenhängend, 59

Zyklus, 68