Funktionentheorie

J.B. Cooper P. Müller

Inhaltsverzeichnis

0 Wiederholung aus Analysis II

$D \subseteq \mathbf{R}^2$ sei offen, zusammenhängend und stückweise glatt berandet mit Randkurve Γ. Γ wird stets so parametrisiert, daß D links von Γ liegt.

0.1 Harmonische Funktionen

Definition 0.1 *1. $u : D(\subseteq R^2) \to \mathbf{R}$ heißt harmonisch in $D \Leftrightarrow$*

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \in C(D)$$

und

$$\bigwedge_{z\in D} \frac{\partial^2}{\partial x^2}U(z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}U(z) = 0 \qquad \text{(Laplace Gleichung).}$$

2. u heißt harmonisch in $P \in \mathbf{R}^2 \Leftrightarrow$ eine Umgebung D von P existiert, sodaß $u : D \to \mathbf{R}$ harmonisch ist.

Bemerkung.

1. Seien u, v harmonisch in D, dann ist für alle $a, b, \in \mathbf{R}$ $au + bv$ harmonisch in D.
2. Sei $u : D \mapsto R$ harmonisch. Sei $\bar{D} := \{(x + a, y + b) : (x, y) \in D\}$, dann ist

   $$\bar{u} : \bar{D} \to \mathbf{R} \quad (x + a, y + b) \to u(x, y)$$

   harmonisch in $\bar{D}$.
3. Der Laplaceoperator in Polarkoordinaten lautet:

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta} = 0.$$

4. Sei $(0.\theta) \in D$. $u : D \to \mathbf{R}$ heißt radial, wenn für jedes $r > 0$, $re^{i\theta} \in D$, $re^{i\theta'} \in D$ impliziert

   $$u(re^{i\theta}) = u(re^{i\theta'}).$$

   Radiale Funktionen erfüllen offenbar:

   $$\bigwedge_{z\in D} \frac{\partial}{\partial \theta}u(z) = 0.$$

5. Radiale harmonische Funktionen erfüllen in D die gewöhnliche Differentialgleichung

   $$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr} = 0.$$

   Die "allgemeine Lösung" dieser gewöhnlichen DGL ist von der Gestalt $A \log r + B$, wobei $A, B \in \mathbf{R}$.

6. Konstruktion weiterer harmonischer Funktionen: Sei $(a,b) \in D$.

$$u(x,y) := \log \sqrt{(x-a)^2 + (x-b)^2}$$

ist harmonisch in $\mathbf{R}^2 \setminus \{a,b\}$; (a,b) heißt Singularität von u.

$$\frac{1}{(a_1 - a)} \log \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} + \log \sqrt{(x-a_1) + (y-b)^2}$$

ist harmonisch in $\mathbf{R}^2 \setminus \{(a,b),(a_1,b)\}$.

Betrachte den Grenzübergang $a_1 \to a$, so gilt

$$\frac{\partial \log r}{\partial a} := \frac{(x-a)}{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

ist harmonisch in $\mathbf{R}^2 \setminus \{(a,b)\}$.

0.2 Greensche Identitäten

Satz 0.2 (von Gauss): *Sei $\mathbf{D} \subset \mathbf{R}^2$ offen, stückweise glatt berandet. Sei Γ die Randkurve von D, und seien p,q stetig differenzierbar in $\bar{D}$. Dann gilt:*

$$\int\int_D p_x(x,y) + q_y(x,y) dxdy = \int_\Gamma [p(x,y)dy - q(x,y)dx].$$

Anwendung: Sei $n : \Gamma \to \mathbf{R}^2$ die äußere Normale an die Kurve Γ. Dann gilt für die Bogenlängenpametrisierung

$$\int\int_D u \Delta v dxdy + \int\int_D \nabla u \nabla v dxdy = \int_G u \frac{\partial v}{\partial u} ds, \qquad \text{(Erste Greensche Identität)}$$

$$\int\int_D (q\Delta v - v\Delta u) dxdy = \int_\Gamma \left\{ u\frac{\partial v}{\partial u} - v \frac{\partial u}{\partial u} \right\} ds. \qquad \text{(Zweite Greensche Identität)}$$

0.3 Anwendung der Greenschen Identitäten

1. Sei v in einer Umgebung von D harmonisch. Dann gilt:

$$\int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial n} ds = 0$$

   Dies folgt aus der 1. Greenschen Identität, indem man für u die konstante Funktion wählt.

2. Sei $r \in \mathbf{R}^+$, $r' > r$ und sei v harmonisch in

$$\{(x,y) : (x-a)^2 + (y-b)^2 < r'^2\}.$$

   Dann gilt:

$$v(a,b) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta) d\theta. \qquad \text{(Mittelwerteigenschaft)}$$

Beweis. Sei Γ die Randkurve von

$$\{(x-a)^2 + (y-b)^2 = \rho^2\} \text{ wobei } 0 \leq \rho \leq r.$$

Dann gilt:

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial \rho} \text{ und } ds = \rho d\theta.$$

Also

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \rho} v(a + \rho\cos\theta, b + \rho\sin\theta)d\theta = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \underbrace{\int_0^{2\pi} v(a + \rho\cos\theta), b + \rho\sin\theta)d\theta}_{I_\rho} = 0\,.$$

Also existiert $C \in \mathbf{R}$, sodaß für $0 \leq \rho \leq r$ gilt $I_\rho = C$.
Andererseits gilt:

$$\lim_{\rho \to 0} I_\rho = v(a,b).$$

■

0.4 Maximumprinzip harmonischer Funktionen

1. Sei v harmonisch in D. Falls $(x_0, y_0) \in D$ existiert, sodaß $v(x_0, y_0) = \min_{(x,y)\in D} v(x,y)$ (oder $(v(x_0, y_0) = \max_{(x,y)\in D} v(x,y))$. Dann existiert $C \in \mathbf{R}$, sodaß für alle $(x,y) \in D \quad v(x,y) = C$.

2. Sei v harmonisch in D (offen und beschränkt). Falls sich v stetig auf $\bar{D}$ fortsetzen läßt, so nimmt v sein Minimum und Maximum auf Γ an.

3. Seien u, v harmonisch in D und stetig fortsetzbar auf Γ. Falls

$$\left(\bigwedge_{z \in \Gamma} u(z) = v(z) \right)$$

dann gilt:

$$\left(\bigwedge_{z \in D} u(z) = v(z) \right).$$

Harmonische Funktionen sind also durch ihre Randwerte eindeutig bestimmt.

0.5 Greensche Funktion und das Dirichletsche Randwertproblem

Satz 0.3 *Sei $(\xi, \eta) \in D$, $r(x,y) := \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$. Sei w harmonisch in D. Dann gilt:*

1. *$h(x,y) := -\log r(x,y) + w(x,y)$ ist harmonisch in $D \setminus (\xi, \eta)$.*

2. *Für jede Funktion u, die in D harmonisch ist, gilt:*

$$u(\xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \left(u\frac{\partial h}{\partial n} - h\frac{\partial u}{\partial n} \right) ds. \qquad \text{(Dritte Greensche Identität)}$$

Beweis. Aus der 2. Greenschen Identität folgt

$$\int_\Gamma \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = 0$$

falls u, v in einer Umgebung von D harmonisch sind.
Sei Γ_ϵ der Rand von $\{(x, y) \in D : (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 < \epsilon^2\}$.
Γ_ϵ ist **gegen** den Uhrzeigesinn parametrisiert. Dann gilt zunächst:

$$\int_\Gamma u\frac{\partial h}{\partial n} - h\frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_{\Gamma_\epsilon} \left(u\frac{\partial h}{\partial n} - h\frac{\partial u}{\partial n} \right) ds.$$

Auf Γ_ϵ gilt weiters:

$$ds = \epsilon d\theta, \quad \log r(x, y)|_{\Gamma_\epsilon} = \log \epsilon$$
$$\frac{\partial}{\partial n} \log r(x, y)|_{\Gamma_\epsilon} = -\frac{1}{\epsilon}.$$

Folglich erhält man

$$\int_{\Gamma_\epsilon} \left(u\frac{\partial h}{\partial n} - h\frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = \epsilon \int_0^{2\pi} u \left(-\frac{1}{\epsilon} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial u}{\partial r}(\log \epsilon - w) d\theta$$
$$= -\int_0^{2\pi} u d\theta + \epsilon \int_0^{2\pi} \left(u\frac{\partial w}{\partial r} - w\frac{\partial u}{\partial r} \right) d\theta + \epsilon \log \epsilon \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r} d\theta.$$

Aus der Mittelwerteingenschaft folgt

$$\int_0^{2\pi} u(\quad) d\theta = 2\pi u(\xi, \eta)$$

und somit gilt schließlich

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\Gamma_\epsilon} \left(u\frac{\partial h}{\partial n} - h\frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = -2\pi u(\xi, \eta).$$

■

Definition 0.4 Greensche Funktion *eines Grundbereichs D im Punkt* (ξ, η)*:*
Sei $g_1(x, y; \xi, \eta)$ *harmonisch in D, sodaß für* $r(x, y) := \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$

$$\lim_{(x,y) \to \Gamma} - \log r(x, y) + g_1(x, y; \xi, \eta) = 0.$$

Dann heißt

$$g(x, y; \xi, \eta) = - \log(r(x, y)) + g_1(x, y; \xi, \eta)$$

Greensche Funktion des BereichsD im Punkt (ξ, η).

Satz 0.5 *Sei u harmonisch in einer Umgebung von* $\bar{D}$*. Sei* $(\xi, \eta) \in D$ *und* $g(\cdot; \xi, \eta)$ *die Greensche Funktion des Bereichs D im Punkt* (ξ, η)*. Dann gilt*

$$u(\xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \int_\Gamma u(x, y) \frac{\partial g(x, y; \xi, \eta)}{\partial n} ds.$$

Bemerkung. Also man kann mit der Greenschen Funktion aus den Werten in Γ alle restlichen Werte von u rekonstruieren.

Eigenschaften Greenscher Funktionen

1. Für alle $(x,y) \in D$ gilt $g(x,y) \geq 0$.
2. Für alle $(x,y) \in D$, $(\xi,\eta) \in D$ gilt $g(x,y;\xi,\eta) = g(\xi,\eta;x,y)$.
3. Falls die Greensche Funktion existiert, ist sie eindeutig bestimmt.

Die Greensche Funktion des Gebiets C_R

Satz 0.6 *$C_R := \{(x,y) : x^2+y^2 < R^2\}$. Sei $\zeta = \rho e^{i\theta} \in C_R$. $z = re^{i\theta}$. Dann gilt*

$$g(z,\zeta) := \frac{1}{2}\log\frac{R^2 - 2\rho r\cos(\theta-\varphi) + \rho^2 r^2 R^{-2}}{r^2 - 2\rho r\cos(\theta-\varphi)+\rho^2}$$

ist die Greensche Funktion.

Beweis. $r_1(z) = |z_1 - \zeta| \quad r_2(z) = |z - R^2/\rho e^{i\varphi}|$. Dann gilt

$$r_1^2 = r^2 - 2\rho r\cos(\theta-\varphi)+\rho^2$$

$$r_2^2 = \frac{R^4}{\rho^2} - 2\frac{R^2 r}{\rho}\cos(\theta-\varphi)+r^2.$$

Folglich gilt mit dieser Notation

$$g(z,\zeta) = -\log r_1 + \log r_2 + \log\frac{\rho}{R}$$

und außerdem ist leicht zu sehen, daß

1. $\log r_2(x,y)$ ist harmonisch in C_R.
2. $\log\frac{\rho}{R} \xrightarrow{\rho\to R} 0$.
3. $\bigwedge_{z\in D}\lim_{|\zeta|\to 1}|r_2(z) - r_1(z)| = 0$.

Folglich erfüllt $g(z,\zeta)$ die definierenden Eigenschaften der Greenschen Funktion.

0.6 Die Poissonsche Formel

Satz 0.7 *Sei $R > 0$ und u in der Umgebung von C_R harmonisch. Dann gilt in Polarkoordinaten für jedes $\rho < R$ und $\varphi \in [0,2\pi]$:*

$$\bigwedge_{\rho<R}\bigwedge_{0\in[0,2\pi[} u(\rho,\varphi) = \frac{R^2-\rho^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u(R,\theta)}{R^2 - 2\rho R\cos(\theta\varphi)+\rho^2}.$$

Beweis. Parametrisiert man den Rand von C_R mit Polarkoordinaten, so gilt:

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial n}$$

$$\frac{\partial g}{\partial n} = \frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\rho^2 r R^{-2} - \rho\cos(\theta-\varphi)}{R^2 - 2\rho r\cos(\theta-\varphi)+\rho^2 r^2 R^{-2}} - \frac{r - \rho\cos(\theta-\varphi)}{r^2 - 2\rho r\cos(\theta-\varphi)+\rho^2}.$$

Somit erhalten wir:

$$\frac{\partial g}{\partial r}\Big|_{r=R} = \frac{1}{R}\frac{\rho^2 - R^2}{R^2 - 2\rho R\cos(\theta-\varphi)+\rho^2}.$$

■

Notation: Sei $\rho < R$ und $\varphi, \theta \in [0, 2\pi]$. Dann heißt

$$P(\rho, \varphi; R, \theta) := \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2\rho R \cos(\theta - \varphi) + \rho^2}$$

Poissonscher Kern des Kreises C_R im Punkt (ρ, φ).

Satz 0.8 *Sei $\rho < R$ und $\varphi, \theta \in [0, 2\pi]$, dann gilt folgende Reihendarstellung:*

$$P(\rho, \varphi; R, \theta) = 1 + 2 \sum_{u=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{\nu} (\cos(\nu\theta)\cos(\nu\varphi) + \sin(\nu\theta)\sin(\nu\varphi)).$$

Beweis. Der Beweis erfolgt in mehreren kleinen Schritten.

1. Durch einfaches Ausrechnen sieht man, daß

$$\left(1 + 2\sum_{v=1}^{n-1} v^{\nu} \cos \nu\psi\right)(1 - 2r\cos\psi + r^2) = 1 - r^2 - 2r^n[\cos n\psi - r\cos(n-1)\psi]$$

2.

$$(1 - r^2)/(1 - 2r\cos\psi + r^2) = 1 + 2\sum_{\nu=1}^{n-1} r^{\nu} \cos \nu\psi + \frac{2r^n[\cos n\psi - r\cos(n-1)\psi}{1 - 2r\cos\psi + r^2}$$

3. Der letzte Term läßt sich mit $2r^n(1+r)/(1-r)^{-2}$ abschätzen.

4. Für jedes $r < 1$ gilt

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\psi + r^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos r\psi.$$

   Die rechte Seite konvergiert gleichmäßig in $\psi \in [0, 2\pi[$ und absolut.

5. Ersetzt man r durch $\frac{\rho}{R}$ mit $\rho < R$, so gilt

$$\frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2\rho R\cos(\theta - \varphi) + \rho^2} = 1 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{\nu} \{\cos\nu\theta\cos\nu\varphi + \sin\nu\tau\sin\nu\varphi\}$$

   wobei die rechte Seite für $\rho < R$ gleichmäßig in θ und φ und absolut konvergiert.

■

Satz 0.9 (Die Poissonsche Formel *(Teil II))*

Sei u in einer Umgebung von C_R harmonisch, dann gilt für alle $\rho < R$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$ die folgende Reihenentwicklung:

$$u(\rho, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \rho^{\nu}(a_\nu \cos\nu\varphi + b_\nu \sin\nu\varphi)$$

wobei

$$a_\nu := \frac{1}{\pi R^\nu}\int_0^{2\pi} u(R, \theta)\cos(\nu(\theta))d\theta; \quad b_\nu := \frac{1}{\pi R^\nu}\int_0^{2\pi} u(R, \theta)\sin\nu\theta d\theta.$$

Beweis. Man verknüpft die erste Poissonsche Formel mit der obigen Reihenentwicklung von $P(\rho, \varphi; R, \theta)$ und vertausche Integration und Summation.

■

Das Dirichletsche Randwertproblem

Sei $D \subseteq \mathbf{R}^2$ glatt berandet.

Gegeben $q : \Gamma \to \mathbf{R}$.

Gesucht $u : D \to \mathbf{R}$ harmonisch, sodaß

$$\lim_{z \to \zeta} u(z) = q(\zeta).$$

Im Falle des Einheitsreises kann man das Dirichletsche Problem mit Hilfe des Poissonkernes vollständig lösen.
Im Verlauf dieser VL werden wir dann das DP für jedes beliebige einfachzusammenhängende Gebiet auf den Einheitskreis **konstruktiv** zurückführen können. Dieser Umstand illustriert die Bedeutung des folgenden Satzes.

Satz 0.10 *Sei $u(\theta)$ stückweise stetig auf $[0, 2\pi[$. Dann gilt*

1. *Die Gleichung*

$$u(\rho, \varphi) := \frac{R^2 - \rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(\theta)}{R^2 - 2r\rho\cos(\theta - \varphi) + \rho^2} d\theta.$$

   $\rho < R, \varphi \in [0, 2\pi[$ *definiert eine harmonische Funktion in C_R.*

2. *Falls U in θ stetig ist, gilt*

$$\lim_{(\rho,\varphi) \to (R,\theta} u(\rho, \varphi) = U(\theta).$$

3. *$u(\rho, \varphi)$ hat die Reihendarstellung*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \rho^\nu (a_\nu \cos \nu\varphi + b_n \sin \nu\varphi)$$

   mit

$$a_n = \frac{1}{\pi R^\nu} \int_0^{2\pi} U(\theta) \cos(\nu\theta) d\theta$$
$$b_\nu = \frac{1}{\pi R^\nu} \int_0^{\pi} U(\theta) \sin \nu\theta d\theta.$$

0.7 Neumannsches Randwertproblem – Die Neumansche Funktion

Im folgenden sei $D \subseteq R^2$ glatt berandet. Somit kann man in jedem Randpunkt die Normalenableitung bilden.

Satz 0.11 *Sei u harmonisch in D. Falls $\frac{\partial}{\partial n} u|_\Gamma = 0$ so gilt:*

$$\bigvee_{c \in \mathbf{R}} \bigwedge_{z \in D} u(z) = c.$$

Beweis. Die 1. Greensche Identität lautet:

$$\iint_D u\Delta u dxdy + \iint_D u_x u_x + u_y u_y dxdy = \int_\Gamma u \frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

Da $\Delta u = 0$, gilt weiters

$$\iint_D |\nabla u|^2 dxdy = \int_\Gamma u \frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

Laut Voraussetzung verschwindet die Normalenableitung am Rand. Somit gilt:

$$\iint_D |\nabla u|^2 dxdy = 0 \Rightarrow \bigwedge_{z\in D} |\nabla u|^2 = 0$$

somit ist u konstant.

■

Bemerkung. Seien u, v harmonisch in D und gilt

$$\bigwedge_{z\in\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n}(z) = \frac{\partial v}{\partial n}(z)$$

so besagt der obige Satz

$$\bigvee_{C\in\mathbf{R}} \bigwedge_{z\in D} u(z) = v(z) + c.$$

Also ist eine harmonische Funktion bis auf eine Konstante durch die Normalenableitung am Rande eindeutig bestimmt.

Definition 0.12 Neumannsche Funktion *Sei $r(x, y) = |(x, y) - (\xi, \eta)|$. Die Funktion N_1 : $(x, y) \to N_1(x, y; \xi, \eta)$ sei harmonisch in D.*

$$N(x, y; \xi, \eta) := -\log r(x, y) + N_1(x, y; \xi, \eta)$$

heißt Neumannsche Funktion des Bereiches D in (ξ, η), falls

1. *ein $c \in \mathbf{R}$ existiert, sodaß $\bigwedge_{z\in\Gamma} \frac{\partial N}{\partial n}(z; \xi, \eta) = c$.*
2. *$\int_\Gamma N(z; \xi, \eta) ds = 0$.*

Bemerkung. Die Konstante c in der obigen Definition unterliegt weiteren Einschränkungen:

$$c \int_\Gamma ds = \int_\Gamma \frac{\partial N}{\partial n}(\cdot, \zeta) ds = -\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n} \log r(x, y) ds + \int_\Gamma \frac{\partial_{N_1}(\cdot, \zeta)}{\partial n} ds = 0.$$

Wählt man in der 3. Greenschen Identität $w = 0$ und $u = 1$, so folgt

$$\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n} \log r(\cdot) ds = +2\pi.$$

Da weiters

$$\int_\Gamma \frac{\partial N_1(\cdot, \varphi)}{\partial n} ds = 0$$

folgt

$$c_0 \int_\Gamma ds = -2\pi \Rightarrow c_0 = -\text{ Länge } (\Gamma)^{-1} 2\pi.$$

Satz 0.13 *Sei u in $\bar{D}$ harmonisch mit*

$$\int_\Gamma u(z)ds = 0.$$

Sei $N(x,y;\xi,\eta)$ die Neumannsche Funktion von D im Punkt $(\xi,\eta) =: \zeta$. Dann gilt

$$u(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma N(z,\zeta)\frac{\partial u(z)}{\partial n}ds.$$

BEWEIS. Die Neumannsche Funktion $N(z,\zeta)$ ist von der Form $-\log r(z) + N_1(z,\zeta)$. Die 3. Greensche Identität besagt nun

$$u(\zeta) = -\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \left\{u(z)\frac{\partial N}{\partial n}(z,\zeta) - N(z,\zeta)\frac{\partial u(z)}{\partial n}\right\} ds.$$

Da

$$\int_\Gamma u(z)\frac{\partial N(z,\zeta)}{\partial n}ds = -\frac{2\pi}{L}\int_\Gamma u(z)ds = 0,$$

folgt

$$u(\zeta) = +\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma N(z,\zeta)\frac{\partial u(z)}{\partial n}ds.$$

■

BEMERKUNG. Wie die Greensche Funktion ist auch die Neumannsche Funktion symmetrisch, daß heißt:

$$\bigwedge_{z,\zeta\in D} N(z,\zeta) = N(\zeta,z).$$

0.8 Die Neumannfunktion der Kreisscheiben C_R

Satz 0.14 *Sei $R > 0$, $\rho < R$, $\zeta = \rho e^{i\vartheta}$, $z = re^{i\theta}$. Dann ist die Neumannfunktion der Kreisscheiben C_R im Punkt ζ gegeben durch*

$$\begin{aligned} N(z,\zeta) \quad &:= \quad -\log(r^2 - 2\rho r\cos(\theta-\vartheta) + \rho^2) \\ &\qquad -\log\left(\frac{R^4}{\rho^2} - 2\frac{R^2 r}{\rho}\cos(\theta-\vartheta) + r^2\right) + 2\log R/\rho \end{aligned}$$

BEWEIS. $r_1(z) := |z-\zeta|$; $r_2(z) := |z - R^2/\rho e^{i\vartheta}|$
$R^2/\rho^{i\vartheta}$ ist die Spiegelung von $\rho e^{i\theta}$ am Kreisrand ∂C_R. Dann gilt

$$N(z,\zeta) = -\log r_1(z) - \log r_2(z) + 2\log\frac{R}{\rho}.$$

Darüberhinaus gelten folgende Aussagen:

1. $-\log r_2(z)$ ist harmonisch in $\mathbf{C}_R$
2. $\frac{\partial N}{\partial r}(z,\zeta)|_{r=R} = -\frac{1}{R}$
3. $\int_\Gamma N(z,\zeta)ds = 0$

Die Funktion $N(z,\zeta)$ erfüllt also die definitorischen Eigenschaften der Neumannschen Funktion. Da diese eindeutig bestimmt ist, muß sie mit der obigen Funktion übereinstimmen.

■

Das Neumannsche Problem

Sei $D \in \mathbf{R}^2$ glatt berandet.

Gegeben $p : \Gamma \to \mathbf{R}$, sodaß $\int_\Gamma p(z)ds = 0$.

Gesucht $u : D \to \mathbf{R}$ harmonisch, sodaß

$$\bigwedge_{z\in\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n}(z) = p(z).$$

Im nächsten Schritt wird das Neumannsche Problem auf ein äquivalentes Dirichlet Problem zurückgeführt. Das entscheidende Hilfsmittel dazu ist die sogenannte "konjungiert harmonische" Funktion.

0.9 Konjungiert harmonische Funktion

Definition 0.15 *Sei $D \subseteq \mathbf{R}^2$ einfach zusammenhängend.*
Sei $u : D \to \mathbf{R}$ harmonisch. $v : D \to \mathbf{R}$ heißt die zu u konjungiert harmonische Funktion falls in D die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gelten:

$$\left[\begin{array}{rcr} \dfrac{\partial u}{\partial x}(z) & = & \dfrac{\partial v}{\partial y}(z) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(z) & = & -\dfrac{\partial v}{\partial x}(z) \end{array}\right.$$

BEMERKUNG.

1. $v : D \to \mathbf{R}$ ist (automatisch) harmonisch.

2. v ist bis auf eine Konstante bestimmt.

3. Die konjungiert harmonische Funktion v läßt sich durch Kurvenintegrale bestimmen. Man setzt:
$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dx$$
oder
$$v(x, y) - v(x_0, y_0) = \int_C -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy,$$
wobei C eine Kurve in D ist, die (x, y) als Endpunkt und (x_0, y_0) als Anfangspunkt besitzt.

   In Analysis II wurde gezeigt, daß v unabhängig von der Wahl der Kurve festgelegt ist, falls
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$
was in unserem Falle gilt, weil u harmonisch ist.

4. Falls v konjungiert harmonisch zu u, ist so $-u$ die konjungiert harmonisch zu v.

0.10 Die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen im orthogonalen Koordinatensystem

Sei Γ eine Randkurve von D. Sei n die äußere Normale an Γ und s die normalisierte Tangentialrichtung an Γ. u und v genügen den Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen.
Dann gilt

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(x,n) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(y,n),$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial x}\cos(x,s) + \frac{\partial v}{\partial y}\cos(y,s).$$

wobei $(x,n),(y,n)$ die Winkel zwischen n und der x Achse bzw. n und der y Achse bezeichnen.
Weiters gilt: $(x,n) = (y,s)$ und $(x,s)+(y,n) = \pi$.
Folglich

$$\frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{\partial v}{\partial x}\cos(y,s) + \frac{\partial v}{\partial y}\cos(x,s)$$

oder

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial y}\cos(y,n) + \frac{\partial n}{\partial x}\cos(x,n).$$

Die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen im lokalen Koordinatensystem (n,s) lauten daher:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial s}$$

und

$$\frac{\partial u}{\partial s} = -\frac{\partial v}{\partial n}.$$

Satz 0.16 *Seien (x,y), $(x_0,y_0) \in D$ und C eine Kurve mit Endpunkt (x,y) und Anfangspunkt (x_0,y_0). Dann gilt:*

$$v(x,y) - v(x_0,y_0) = \int_{s_0}^{s} \frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

Beweis. Es gilt zunächst für Kurvenintegrale:

$$v(x_0,y_0) - v(x_0,y_0) = \int_{s_0}^{s} \frac{\partial v}{\partial s} ds.$$

Setzt man nun die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial n}$$

ein, so folgt Behauptung.

∎

0.11 Reihendarstellung der konjungiert harmonischen Funktionen in C_R

Die C–R Differentialgleichungen in Polarkoordinaten lauten:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\partial v}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\rho\frac{\partial v}{\partial \rho}.$$

Somit gilt:

Harmonische Funktionen	Konjungiert harmonische
$r^n \cos n\theta$	$r^n \sin n\theta$
$r^n \sin n\theta$	$-r^n \cos n\theta$

Sei $u(r,\theta)$ harmonisch in $\mathbf{C}_R$ und habe die Reihendarstellung

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} r^\nu (a_\nu \cos \nu\theta + b_\nu \sin \nu\theta),$$

dann ist die zu u konjungiert harmonische Funktion gegeben durch die Reihendarstellung

$$v(r,\theta) := \sum_{v=1}^{\infty} r^\nu (a_\nu \sin \nu\theta - b_\nu \cos \nu\theta).$$

0.12 Lösung des Neumannproblems mittels konjungiert harmonischen Funktionen

Sei $p : \Gamma \to \mathbf{R}$, $\int p ds = 0$ gegeben. Man definiert zunächst die Randwertfunktion $q(s) := \int_{s_0}^{s} p(s')ds'$.

Löst man nun das Dirichletsche Randwertproblem für die stetige Randwertfunktion $-q : \Gamma \to \mathbf{R}$, so erhält man $u : D \to R$, harmonisch, sodaß

$$\bigwedge_{z(s)\in\Gamma} u(z(s)) = -q(s).$$

Folglich

$$\frac{\partial u}{\partial s} = -p(s).$$

Bestimmt man nun z.B. durch Kurvenintegrale die zu u harmonisch konjungierte Funktion v, so folgt aus den C–R Differentialgleichungen

$$\frac{\partial v}{\partial n} = -\frac{\partial u}{\partial s} = +p(s).$$

Also löst v das Neumannproblem.

1 Komplexe Zahlen

Betrachte die folgende Hierarchie von algebraischen Gleichungen:

$$\begin{aligned} x+3 &= 7 \\ x+7 &= 3 \\ 6x &= 2 \\ x^2 &= 2 \\ x^2 &= -1. \end{aligned}$$

Während die erste Gleichung innerhalb des einfachen Zahlensystems $\mathbf{N}$ (der natürlichen Zahlen) lösbar ist, ist die zweite nur im Rahmen des erweiterten Systems $\mathbf{Z}$ (der ganzen Zahlen) lösbar. Um die weiteren Gleichungen behandeln zu können, muß man das Zahlensystem auf $\mathbf{Q}$ (die rationalen Zahlen) bzw. $\mathbf{R}$ (die reellen Zahlen) bzw. $\mathbf{C}$ (die komplexen Zahlen) erweitern. Streng mathematisch wird das wie folgt gemacht:
Das Zahlensystem $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ wird durch folgende sogenannte **Peano'schen Axiome** charakterisiert:

a) es existiert ein Element $1 \in \mathbf{N}$;

b) jede Zahl n hat einen Nachfolger n';

c) jede Zahl (mit Ausnahme von 1) ist der Nachfolger von einer Zahl;

d) zwei Zahlen mit dem gleichen Nachfolger stimmen überein;

e) falls eine Teilmenge A von $\mathbf{N}$ die Zahl 1 enthält, sowie den Nachfolger n' von jedem n aus A, dann gilt: $A = \mathbf{N}$.

Mit Hilfe dieser Axiome kann man $\mathbf{N}$ mit einer algebraischen Struktur (Multiplikation und Addition) versehen.
Addition: Für $m \in \mathbf{N}$ definiert man

$$\begin{aligned} m+1 &= m' \\ m+n' &= (m+n)' \ (n \in \mathbf{N}). \end{aligned}$$

Es folgt aus e), daß $m+n$ für jedes Paar $m, n \in \mathbf{N}$ definiert ist. (Betrachte die Menge aller n für die $m+n$ definiert ist). Man zeigt, daß die bekannten Eigenschaften gelten, etwa

$$\begin{aligned} m+n &= n+m \\ m+(n+p) &= (m+n)+p \ \text{ usw.} \end{aligned}$$

Multiplikation: Für $m \in \mathbf{N}$ definiert man

$$\begin{aligned} m \cdot 1 &= m \\ m \cdot n' &= mn+m \quad (n \in \mathbf{N}). \end{aligned}$$

Das Produkt ist wiederum wohl definiert. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} m \cdot n &= n \cdot m \\ m(np) &= (mn)p \\ m(n+p) &= mn+mp \ \text{ usw.} \end{aligned}$$

Das Zahlensystem **Z**: Auf der Menge $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ betrachtet man die Äquivalenzrelation $\sim$ wobei

$$(m, n) \sim (m', n') \Leftrightarrow m + n' = m' + n$$

Z ist die Quotientenmenge $\mathbf{N} \times \mathbf{N}|_{\sim}$. Auf **Z** definiert man
Addition: $\big[(m,n)\big] + \big[(m',n')\big] = \big[(m+m', n+n')\big]$
Multiplikation: $\big[(m,n)\big]\big[(m',n')\big] = \big[(mm'+nn', mn'+m'n)\big]$
Der Nachweis, daß diese Operationen wohldefiniert sind und $(\mathbf{Z}, +, .)$ einen Ring bildet, ist langwierig aber nicht schwierig.

Die Konstruktion von Q: Auf $\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} \setminus \{0\})$ definiert man die Äquivalenzrelation:

$$(m, n) \sim (m', n') \Leftrightarrow mn' = m'n$$

Algebraische Struktur:

$$\begin{aligned} \big[(m,n)\big] + \big[(m',n')\big] &= \big[(mn'+m'n, nn')\big] \\ \big[(m,n)\big] \cdot \big[(m',n')\big] &= \big[(mm', nn')\big] \end{aligned}$$

$(\mathbf{Q}, +, .)$ ist ein Körper.
Die reellen Zahlen **R** lassen sich aus **Q** auf verschiedene Arten konstruieren:

a) mit Hilfe der sogenannten Dedekind-Schnitte, die die Ordnungs-Struktur von **Q** benutzen.

b) als die Vervollständigung von **Q** bzgl. der Metrik

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Wir zeigen jetzt, wie man in diesem Geist das Zahlensystem **C** aus **R** konstruiert. Ursprünglich führte man das Symbol i für eine Zahl, deren Quadrat -1 war, ein. Man rechnete dann formal mit Zahlen der Gestalt $x + iy$, als ob die bekannten Rechenregeln weiterhin gültig wären, etwa

$$(6 + 3i)(2 - i) = 12 + 6i - 6i - 3i^2 = 12 + 3 = 15.$$

Allgemein gilt: Falls $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$,

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\ z_1 \cdot z_2 &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \end{aligned}$$

Daher die formale Definition: **C** ist die Menge $\mathbf{R}^2$ aller geordneten Paare von reellen Zahlen, versehen mit der Operationen

$$\begin{aligned} (x, y) + (x_1, y_1) &= (x + x_1, y + y_1) \\ (x, y)(x_1, y_1) &= (xx_1 - yy_1, xy_1 + x_1y). \end{aligned}$$

Notation. Komplexe Zahlen werden mit Buchstaben wie z, w, ω, ζ usw. bezeichnet. Wir schreiben i für die Zahl $(0, 1)$. Außerdem identifizieren wir die komplexe Zahl $(x, 0)$ mit der reellen Zahl x. Die Zahl (x, y) läßt sich dann als $x + iy$ schreiben, wobei $x, y \in \mathbf{R}$. Es gilt $i^2 = -1$, da $(0, 1).(0, 1) = (-1, 0)$. Die Darstellung $x + iy$ ist eindeutig und x (bzw. y) heißt **der Realteil** von z (bzw. **der Imaginärteil**) von z — geschrieben $\Re(z)$ bzw. $\Im(z)$. Falls $z = x + iy$, dann ist $\overline{z} = x - iy$ die **komplex-konjugierte** Zahl zu z (d.h. die Spiegelung an der x-Achse). Es gilt dann:

$$\begin{aligned} \overline{z + z_1} &= \overline{z} + \overline{z_1} \\ \overline{zz_1} &= \overline{z}.\overline{z_1} \\ \Re(z) &= \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \\ \Im(z) &= \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) \\ z.\overline{z} &= |z|^2, \end{aligned}$$

wobei $|z| = (x^2 + y^2)^{1/2}$, der **Absolutbetrag** oder **Modulus** von z ist (d.h. die Länge des entsprechenden 2-Vektors). Außerdem gilt, wie man leicht nachrechnet:

$$|z.z_1| = |z||z_1|.$$

$(\mathbf{C}, +, .)$ ist dann ein Körper. Die Inverse des Elements $z \neq 0$ ist

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Wir können daher viele der Begriffe und Eigenschaften des reellen Körpers $\mathbf{R}$ auf $\mathbf{C}$ übertragen (ausgenommen sind diejenigen, die die Ordnungsstruktur von $\mathbf{R}$ verwenden), z.B. komplexe Polynome, komplexe lineare Gleichungssysteme, komplexe Matrizen (und Determinanten), usw.

Die Polardarstellung: Jedes $z (\neq 0)$ aus $\mathbf{C}$ hat eine eindeutige Darstellung der Gestalt

$$\rho(\cos\ \theta + i\ \sin\theta)$$

wobei $\rho > 0$ und $\theta \in [0, 2\pi[$. Dabei ist $\rho = |z|$ und θ ist die eindeutig bestimmte reelle Zahl in $[0, 2\pi[$, sodaß $\cos\theta = \frac{x}{\rho}$, $\sin\theta = \frac{y}{\rho}$. θ heißt das **Argument** von z.
In der Polardarstellung wird die Wirkung von Multiplikation besonders transparent. Es gilt nämlich

$$\rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \rho_1\rho_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$

wie man leicht mit Hilfe der Additionsformeln für cos und sin ausrechnen kann. Daraus sieht man, daß Multiplikation mit z eine Drehstreckung im Raum bewirkt (vgl. Bild 1).
Daraus folgt leicht die Beziehung

$$z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta),$$

wobei $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ und $n \in \mathbf{N}$. Für den Fall $z = \cos\theta + i\sin\theta$ bekommt man die sogenannte **Formel von de Moivre**

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta. \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Bilden wir davon die komplexkonjugierte, so bekommen wir das gleiche Ergebnis für negative n.

Die n-te Wurzel von 1. Insbesonders sind die Zahlen

$$z_k = (\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}) \quad (k = 0, \ldots, n-1)$$

die sogenannten n-ten Wurzeln von 1, d.h. die Lösungen der Gleichung $z^n = 1$. Wir nennen $\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ die **primitive n-te Wurzel** (es gilt dann: $z_k = \omega^k$).

Polynome: Wir haben den Körper $\mathbf{C}$ eingeführt, um das Spektrum von lösbaren Polynomialgleichungen zu erweitern. Es stellt sich heraus, daß man damit **alle** solchen Gleichungen lösen kann. Es gilt nämlich der berühmte **Fundamentalsatz der Algebra**: Sei

$$p(z) = a_0 + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n$$

ein komplexes Polynom (mit $n \geq 1$). Dann existieren komplexe Zahlen $z_1, \ldots, z_n$, sodaß

$$p(z) = (z - z_1) \ldots (z - z_n)$$

(Beweis später.)
Daraus folgt, daß man jede rationale Funktion $\frac{p}{q}$ (wobei p und q Polynome mit grad $p <$ grad q) als Linearkombination (über den Skalaren $\mathbf{C}$) von Funktionen der Form

$$\frac{1}{(z-a)^r} \quad (a \in \mathbf{C}, r \in \mathbf{N})$$

darstellen kann (Bruchzerlegung).

Der Divisionsalgorithmus für Polynome: Seien p, q Polynome (wobei $q \neq 0$). Dann existieren Polynome b und r, sodaß

$$p = q.b + r$$

wobei grad $r <$ grad q. Dabei sind b und r eindeutig bestimmt.

Die erweiterte komplexe Ebene und die Riemannsche Zahlenkugel: Es ist oft zweckmäßig, die sogenannte erweiterte komplexe Ebene $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ zu betrachten. Ein geeignetes Modell dafür ist die Riemannsche Zahlenkugel. Bekanntlich bestimmt eine stereographische Projektion (siehe Bild 2) eine Bijektion zwischen $\mathbf{C}$ und der punktierten Sphäre $S^2 \setminus \{N\}$, wobei N den "Nordpol" $(0, 0, 1)$ bezeichnet. Wir erweitern dies zu einer Bijektion zwischen $\overline{\mathbf{C}}$ und S^2. Einfache analytische Geometrie zeigt, daß die Bijektion wie folgt bestimmt wird:

$$z = (x + iy) \mapsto P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

wobei $z = \frac{\xi_1 + i\xi_2}{1 - \xi_3}$ und

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{z + \overline{z}}{1 + |z|^2} \\ \xi_2 &= \frac{z - \overline{z}}{i(1 + |z|^2)} \\ \xi_3 &= \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \end{aligned}$$

Möbius Transformationen: Eine wichtige Rolle in der Funktionentheorie spielen die Möbius-Transformationen. Das sind Transformationen der Gestalt

$$T_{[abcd]}: z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

wobei a, b, c, d komplexe Zahlen sind, mit $ad - bc \neq 0$.
Es ist sinnvoll, diese als Abbildungen auf $\overline{\mathbf{C}}$ (oder der Zahlenkugel) zu betrachten (wobei $-\frac{d}{c} \to \infty$ und $\infty \to \frac{a}{c}$, falls $c \neq 0$, sonst $\infty \to \infty$). T wird durch die Matrix A bestimmt, wobei

$$A = [abcd]$$

Wir schreiben daher T_A für obige Abbildung. Zwei Matrizen A und B induzieren dieselbe Transformation, falls A ein komplexes Vielfaches von B ist, d.h. $A = lB$ ($l \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$).
Wichtige Sonderfälle sind:

- $z \mapsto 1/z$ (Inversion im Einheitskreis + Spiegelung an der X-Achse), $T_{[0110]}$;
- $z \mapsto z + a$ (Verschiebung), $T_{[1a01]}$;
- $z \mapsto az$ ($|a| = 1$) (Drehung), $T_{[a001]}$;
- $z \mapsto az$ ($a > 0$) (Streckung), $T_{[a001]}$.

Zusammensetzung: Es folgt leicht, daß die Zusammensetzung $T_A \circ T_B$ von der Matrix $C = AB$ erzeugt wird, d.h.

$$T_A \circ T_B = T_{AB}.$$

Insbesonders: Die Inverse von $T_{[abcd]}$ wird von der Matrix

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}[d - b - ca].$$

induziert (oder einfach von der Matrix

$$[d - b - ca]).$$

Satz 1.1 *Jede Möbius-Transformation läßt sich als Produkt von Transformationen der Gestalt*

$$\begin{aligned} z &\mapsto z + b \\ z &\mapsto \frac{1}{z} \\ z &\mapsto az \end{aligned}$$

schreiben, wobei $a, b \in \mathbf{C}$.

Beweis. Sei
$$T = T_{[abcd]}$$

Fall 1: $c = 0$. Dann gilt $d \neq 0$ und daher $T_A(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$, d.h. T ist die Zusammensetzung von $z \mapsto \frac{a}{d}z$ und $z \mapsto z + \frac{b}{d}$, mit anderen Worten:

$$\left[1\frac{b}{d}01\right] \cdot \left[\frac{a}{d}001\right] = \left[\frac{a}{d}\frac{b}{d}01\right]$$

und diese Matrix induziert dieselbe Transformation wie $[ab0d]$.

Fall 2: $c \neq 0$. Dann gilt
$$T_A(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2}\frac{1}{z + \frac{d}{c}}$$

d.h. T ist die Zusammensetzung von

$$\begin{aligned} z &\mapsto z + \frac{d}{c} \\ z &\mapsto \frac{1}{z} \\ z &\mapsto \frac{bc - ad}{c^2}z \\ z &\mapsto z + \frac{a}{c}. \end{aligned}$$

Möbiustransformationen respektieren Doppelverhältnisse: Falls z_1, z_2, z_3, z_4 verschiedene komplexe Zahlen sind, dann ist

$$(z_1, z_2; z_3, z_4) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \div \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$$

das **Doppelverhältnis** von z_1, z_2, z_3, z_4. Für jede Möbius-Transformation T und alle $z_1, z_2, z_3, z_4 \in$ **C** (verschieden) gilt:
$$(Tz_1, Tz_2; Tz_3, Tz_4) = (z_1, z_2; z_3, z_4)$$

■

Beweis. **Beweisskizze:** Es genügt, dies für die Spezialfälle $T_{[1b01]}, T_{[a001]}, T_{[0110]}$ zu beweisen.

■

$(z_1, z_2; z_3, z_4)$ ist das Bild von z_1 bzgl. der Möbius-Transformation, die z_2 in 0, z_3 in 1 und z_4 in ∞ abbildet. Wir bemerken weiter, daß das Bild eines Kreises oder einer Geraden unter einer Möbius-Transformation wieder ein Kreis oder eine Gerade ist. (Wiederum genügt es, dies für die drei Spezialfälle oben nachzuweisen). Aus diesen Tatsachen folgt leicht: die Punkte z_1, z_2, z_3, z_4 liegen auf einem Kreis oder auf einer Geraden genau dann, wenn $(z_1, z_2; z_3, z_4)$ reell ist.

2 Die Topologie von C und Funktionen auf C

Die Abbildung

$$(z_1, z_2) \to |z_1 - z_2|$$

ist eine Metrik auf $\mathbf{C}$ (die gewöhnliche euklidische Metrik der Ebene). Damit kann man in $\mathbf{C}$ von

Konvergenz von Folgen;

Stetigkeit von Funktionen (etwa von $\mathbf{C}$ in $\mathbf{C}$);

Kompaktheit von Teilmengen;

Lipschitz-Stetigkeit von Funktionen;

Cauchy-Folgen; Vollständigkeit

usw. reden. Außerdem hat auch die Zahlenkugel eine natürliche metrische Struktur, etwa die des geodätischen Abstands oder die von $\mathbf{R}^3$ induzierte Metrik. Diese beiden Metriken sind für $\mathbf{C}$ bzw. $S^2 \setminus \{N\}$ (topologisch) äquivalent.
Es ist klar, daß eine Folge z_n in $\mathbf{C}$ genau dann gegen z konvergiert, wenn gilt:

$$ox\Re\, z_n \to ox\Re\, z, \quad ox\Im\, z_n \to oxIm\, z.$$

Sei $f : z \to f(z)$ eine Funktion von einer Teilmenge A (von $\mathbf{C}$) nach $\mathbf{C}$. Dann existieren reelle Funktionen u und v von A (als Teilmengen von $\mathbf{R}^2$) in $\mathbf{R}$, sodaß

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Es gilt: f ist genau dann stetig, wenn u und v stetig sind.

Beispiele.

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2,\ u(x,y) = x^2 - y^2,\ v(x,y) = 2xy, \\ f(z) &= z^3,\ u(x,y) = x^3 - 3xy^2,\ v(x,y) = 3x^2y - y^3. \end{aligned}$$

Die folgenden Tatsachen über $\mathbf{C}$ folgen aus allgemeinen Ergebnissen der Topologie:

a) eine offene Teilmenge U von $\mathbf{C}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn sie wegzusammenhängend ist, d.h. für $z_0, z_1 \in U$ existiert eine stetige Abbildung c von einem kompakten Intervall $[a, b] \subset \mathbf{R}$ nach U, sodaß $c(a) = z_0$, $c(b) = z_1$ (Bild 3).

   Wir verwenden den Namen **Gebiet** für eine offene, zusammenhängende Teilmenge in $\mathbf{C}$. Jede offene Teilmenge von $\mathbf{C}$ ist eine disjunkte abzählbare Vereinigung von Gebieten.

b) Eine Teilmenge K von $\mathbf{C}$ ist genau dann kompakt, wenn sie folgenkompakt ist bzw. wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

   In $\overline{\mathbf{C}}$ ist die Situation noch einfacher: Da $\overline{\mathbf{C}}$ selber kompakt ist, ist eine Teilmenge von $\overline{\mathbf{C}}$ genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen ist.

c) Eine stetige Funktion $f : K \to \mathbf{C}$, wobei $K \subseteq \mathbf{C}$ kompakt ist, ist gleichmäßig stetig.

Wir werden diesen Satz hauptsächlich für Kurven verwenden. Sei etwa $c : [a, b] \to U \subseteq \mathbf{C}$ eine stetige Kurve, $\{U_\alpha\}$ eine offene Überdeckung von U. Dann existiert eine Partition

$$t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b$$

von $[a, b]$, sodaß das Bild jedes Teilintervalls $[t_i, t_{i+1}]$ innerhalb einer Menge der Überdeckung liegt.

Beweis. $\left\{c^{-1}(U_\alpha) : \alpha \in A\right\}$ ist eine offene Überdeckung von I. Wähle eine Lebesgue-Zahl η für diese Überdeckung bzw. eine Partition, sodaß die Länge jedes Teilintervalls höchstens η ist. (Für den Begriff einer Lebesgue-Zahl siehe die Vorlesung "Elementare Topologie".)
Ebenso wie in der reellen Analysis zeigt man:
Sei $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ eine Folge von stetigen Funktionen von A ($\subseteq \mathbf{C}$) nach $\mathbf{C}$, die fast gleichmäßig gegen f konvergieren. Dann ist auch f stetig. (Fast gleichmäßige Konvergenz bedeutet gleichmäßige Konvergenz auf kompakten Teilmengen von A).

■

Potenzreihen: Das sind Reihen der Gestalt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

wobei (a_n) eine komplexe Folge ist.

Satz 2.1 von Cauchy-Hadamard: *Sei* $R = 1/\left(\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}\right)$.

Falls $R = \infty$, *dann konvergiert* $\sum a_n z^n$ *für jedes* z *in* $\mathbf{C}$. *Außerdem ist die Konvergenz fast gleichmäßig und die Grenzfunktion*

$$f : z \to \sum a_n z^n$$

stetig.

Falls $R = 0$, *dann konvergiert die Reihe nur für* $z = 0$.

Falls $0 < R < \infty$, *dann konvergiert die Reihe fast gleichmäßig für* $|z| < R$ *und divergiert für* $|z| > R$ *(keine allgemeine Aussage für* $|z| = R$*). Die Funktion*

$$f : z \to \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

ist dann stetig auf $U_R = \left\{z \in \mathbf{C} : |z| < R\right\}$.

Außerdem ist die Konvergenz für $|z| < R$ *absolut (d.h.* $\sum |a_n||z|^n < \infty$*).*

Beweis. Anwendung des Wurzelkriteriums.

■

Das Cauchy'sche Produkt: Falls $\sum a_n$ bzw. $\sum b_n$ absolut-konvergente Reihen sind, dann auch $\sum c_n$ und es gilt:

$$\sum c_n = \left(\sum a_n\right)\left(\sum b_n\right)$$

wobei

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k.$$

Der Weierstraß'sche M-Test: Falls (M_n) eine Folge von positiven Zahlen mit $\sum M_n < \infty$ bzw. (f_n) eine Folge von Funktionen von $A (\subseteq \mathbf{C})$ nach $\mathbf{C}$, sodaß

$$\bigwedge_n \bigwedge_{z \in A} |f_n(z)| < M_n$$

dann konvergiert $\sum f_n$ gleichmäßig und absolut gegen eine Funktion von A nach $\mathbf{C}$. Somit ist f stetig, falls jedes f_n stetig ist.

Mit Hilfe der Potenzreihen kann man viele der klassischen Spezialfunktionen als Funktionen auf $\mathbf{C}$ (oder Teilmengen davon) definieren:

Beispiel.

$$\begin{aligned}
\exp z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (z \in \mathbf{C}) \\
\sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \ (z \in \mathbf{C}) \\
\cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \ (z \in \mathbf{C}) \\
\ln(1+z) &= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots \ (|z| < 1).
\end{aligned}$$

Die Tatsache, daß die Konvergenz absolut ist, erlaubt es, Standardmanipulationen mit Reihen auszuführen. Als Beispiel kann man leicht die Multiplikativitätseigenschaft $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ der Funktion exp ableiten.

Die Logarithmusfunktion: Falls $w \neq 0$, dann existieren unendlich viele z, sodaß $w = \exp z$, (nämlich die Zahlen

$$z = \ln \rho + i\vartheta + 2\pi i n \quad (n \in \mathbf{Z})$$

wobei $\rho = |w|$, $\vartheta = \arg w$). Dies folgt aus der Tatsache, daß

$$e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i \sin\vartheta \qquad (\vartheta \in \mathbf{R}).$$

Denn

$$\begin{aligned}
e^{i\vartheta} &= 1 + i\vartheta + \frac{(i\vartheta)^2}{2!} + \frac{(i\vartheta)^2}{3!} + \dots \\
&= \left(1 - \frac{\vartheta^2}{2!} + \frac{\vartheta^4}{4!} \dots\right) + i\left(\vartheta - \frac{\vartheta^3}{3!} + \frac{\vartheta^5}{5!} - \dots\right) \\
&= \cos\vartheta + i \sin\vartheta.
\end{aligned}$$

Daher gilt:

$$e^z = e^{\ln\rho} e^{i\vartheta} . e^{2\pi i n} = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = w.$$

Definition 2.2 Zweig der Logarithmusfunktion *ist eine stetige Funktion f auf einem Gebiet U, sodaß*

$$z = \exp\ f(z) \qquad (z \in U).$$

Die obige Überlegung zeigt, daß sich eine solche Funktion auf Mengen mit einer stetigen Winkelmessung definieren läßt. Das sind Mengen $U \subseteq \mathbf{C} \setminus \{0\}$, auf denen eine stetige Funktion $\vartheta : U \to R$ existiert, sodaß

$$\frac{z}{|z|} = e^{i\vartheta(z)} \qquad (z \in U).$$

Die Funktion $f(z) = \ln|z| + i\vartheta(z)$ ist daann ein geeigneter Zweig der Logarithmusfunktion. Beispiele von solchen Gebieten sind

$$\begin{aligned} U_+ &= \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_- \\ U_- &= \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_+ \end{aligned}$$

Kurven in der Ebene: Wir verwenden die komplexe Schreibweise, um Kurven in $\mathbf{R}^2$ zu beschreiben. Eine **glatte Kurve** in **C** ist daher eine glatte Funktion $t \mapsto c(t)$ von I (einem Intervall in **R**) nach **C**. Z. B. ist $c(t) = z_0 + re^{it}$ $\big(t \in [0, 2\pi]\big)$ der Kreis mit Mittelpunkt z_0 und Radius r. (Glatt bedeutet, daß die Ableitung $c'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{c(t+h)-c(t)}{h}$ existiert und stetig ist). Eine Kurve $c : I \to \mathbf{C}$ heißt **stückweise glatt**, falls c stetig ist und bis auf endlich viele Punkte glatt ist.

Beispiel. Sei A, B, C ein Dreieck mit Eckpunkten A, B, C (wobei diese die komplexen Koordinaten z_0, z_1, z_2 besitzen). Dann ist der **Rand** von ABC die stückweise glatte Kurve mit Parametrisierung

$$c(t) = (1-t)z_0 + tz_1 \ \big(t \in [0,1]\big)(2-t)z_1 + (t-1)z_2 \ \big(t \in [1,2]\big)(3-t)z_2 + (t-2)z_1 \ \big(t \in [2,3]\big).$$

(Bild 4).

Die Länge einer stückweise glatten Kurve c ist definiert als

$$L(c) = \int_I |c'(t)|dt.$$

Beispiel. Man rechnet leicht, daß die Länge der obigen zwei Kurven $2\pi r$ bzw. $|z_1 - z_0| + |z_2 - z_1| + |z_0 - z_2|$ sind.

Sei jetzt c eine glatte (oder stückweise glatte) Kurve im Gebiet $U \subseteq \mathbf{C}$. Falls $f : U \to \mathbf{C}$ stetig ist, dann definieren wir das **Kurvenintegral** von f entlang c wie folgt:

$$\int_c f(z)dz = \int_I f\big(c(t)\big)c'(t)dt.$$

Beispiele.

1. Für jedes $r > 0$ gilt
$$\int_{c_r} z^k dz = 2\pi i(k = -1)0\text{sonst}$$
wobei $c_r(t) = re^{it}\ \big(t \in [0, 2\pi]\big)$.

2. Das Integral entlang dem Segment von t_1 nach t_2 ist:
$$(z_2 - z_1)\int_0^1 f\big(z_1 + t(z_2 - z_1)\big)dt.$$
Insbesonders entlang einer zur x-Achse parallelen Strecke
$$\int_{x_2}^{x_1} f(x + iy_1)dx$$
bzw. einer zur y-Achse parallelen Strecke:
$$i\int_{y_1}^{y_2} f(x_1 + iy)dy.$$

Wie in der reellen Analysis weist man nach, daß das Kurvenintegral nur von der orientierten Kurve und nicht von der Wahl der Parametrisierung abhängt.
Einfache Eigenschaften des Kurvenintegrals:
$$\begin{aligned}\int_c (f+g)(z)\,dz &= \int_c f(z)\,dz + \int_c g(z)\,dz\\ \int_{c_1\cup c_2} f(z)\,dz &= \int_{c_1} f(z)\,dz + \int_{c_2} f(z)\,dz.\end{aligned}$$
Hier sind $c_1 : [a, b] \to U$ bzw. $c_2 : [b, d] \to U$ Kurven mit $c_1(b) = c_2(b)$. $c_1 \cup c_2$ ist die Kurve
$$t \mapsto= c_1(t)\big(t \in [a, b]\big)c_2(t)\big(t \in [b, d]\big)$$
(Bild 5).

Es gilt die Abschätzung
$$\left|\int_c f(z)dz\right| \le \Big(\sup_{z\in c}\big|f(z)\big|\Big)L(c),$$
wobei $L(c) = \int_I |c'(t)|\,dt$ die Länge der Kurve c ist.
Die folgenden Versionen der Sätze von Euler gelten: Sei $g : U \times V \to \mathbf{C}$ stetig, c eine glatte Kurve in V. Dann ist die Funktion
$$f : z \mapsto \int_c g(z, w)dw$$
stetig. Außerdem gilt: Falls $\frac{\partial}{\partial z}g(z, w)$ für jedes $(z, u) \in U \times V$ existiert und die Funktion
$$(z, w) \mapsto \frac{\partial}{\partial z}g(z, w)$$
auch stetig ist, dann ist f differenzierbar und es gilt:
$$f'(z) = \int_c \frac{\partial}{\partial z}g(z, w)dw.$$

3 Analytische Funktionen – die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit den elementaren Eigenschaften von komplex-differenzierbaren Funktionen. Die Definition entspricht der bekannten Beschreibung der Ableitung als Grenzwert von Differenzenquotienten.

Definition 3.1 *Eine Funktion $f : U \to \mathbf{C}$ (wobei U offen in $\mathbf{C}$ ist) heißt* **analytisch** *(oder* **komplex analytisch**, *oder* **holomorph** *oder* **komplex differenzierbar***) an der Stelle $z_0 \in U$, falls ein $a \in \mathbf{C}$ existiert, sodaß*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = a.$$

a heißt dann die **Ableitung** *von f an der Stelle z_0, geschrieben $f'(z_0)$. Falls $f'(z)$ existiert für jedes $z \in U$, dann ist f* **auf** U **differenzierbar** *und die Funktion $z \to f'(z)$ ist die* **Ableitung** *von f.*

Zunächst einige triviale Bemerkungen: Es gilt:

$$\begin{aligned}
(f+g)' &= f' + g' \\
(fg)' &= f'g + fg' \\
\left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{gf' - fg'}{g^2} \\
(f \circ g)' &= (f' \circ g)g' \text{ (Kettenregel)}
\end{aligned}$$

für (geeignete) analytische Funktionen. (Beweise genau wie im reellen Fall.)

Falls f analytisch auf $U(z_0, r) = \big\{z \in \mathbf{C} \colon |z - z_0| < r\big\}$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
f(z) &= f(z_0) + \int_{z_0}^{z} f'(z)dz \\
&= f(z_0) + (z - z_0)\int_0^1 f\big(z_0 + t(z - z_0)\big)dt
\end{aligned}$$

(der Integrationsweg ist die Kurve $t \mapsto z_0 + t(z - z_0) \quad \big(t \in [0,1]\big)$)

(Übungsbeispiel.)

Satz 3.2 *Sei (f_n) eine Folge von analytischen Funktionen von U nach $\mathbf{C}$, sodaß folgendes gilt:*

a) es existiert eine Funktion $f : U \to \mathbf{C}$ mit $f_n \to f$ fast gleichmäßig.

b) die Ableitungen (f_n') sind stetig und konvergieren fast gleichmäßig gegen eine Funktion g. Dann ist f differenzierbar und es gilt: $f' = g$.

Dieser Satz wird mit genau denselben Argumenten wie in der reellen Analysis bewiesen. Später werden wir sehen, daß in der komplexen Theorie wesentlich mehr gilt – die Annahme der Konvergenz der Ableitungen ist dort überflüssig.

Es ist klar, daß jedes Polynom differenzierbar ist. Weiters gilt:

$$p'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \cdots + n a_n z^{n-1}$$

wobei

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n.$$

Aus diesen Tatsachen folgt, daß eine Funktion $f : U_R \to \mathbf{C}$, die mit Hilfe der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

definiert wird (wobei R der Konvergenzradius der Reihe ist), differenzierbar ist und daß gilt:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

(Bemerke: der Konvergenzradius dieser Reihe ist auch R. U_R bezeichnet den offenen Kreis um 0 mit Radius R).

Zusammenfassend: Jede konvergente Taylorreihe ist im Inneren ihres Konvergenzkreises analytisch.

Beispiele. Die Funktionen exp, sin, cos sind auf ganz $\mathbf{C}$ und $\ln(1+z)$ ist auf U_1 komplex differenzierbar. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\exp &= \exp \\ \frac{d}{dz}\cos &= -\sin \\ \frac{d}{dz}\sin &= \cos \\ \frac{d}{dz}\ln(1+z) &= \frac{1}{1+z} \quad \big(|z|<1\big) \end{aligned}$$

Wir betrachten jetzt die Beziehungen zwischen dem Begriff der komplexen Differenzierbarkeit von f und Glattheitseigenschaften der Funktionen u und v (wobei

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)\,).$$

Es stellt sich heraus, daß Komplexdifferenzierbarkeit viel mehr beinhaltet als die Differenzierbarkeit von u und v.

Satz 3.3 *Falls f auf einem Gebiet U komplex differenzierbar ist, dann sind u und v reell-differenzierbar. Außerdem gelten folgende Beziehungen:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

(das sind die sogenannten **Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen**. *Sie bedeuten, daß die Jacobi-Matrix*

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

die Matrix einer direkten Ähnlichkeit ist). Daraus folgt, daß sowohl u als auch v harmonisch sind, d.h. Lösungen der Laplace'schen Gleichung $\Delta u = 0$. Denn es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(-\frac{\partial v}{\partial x}\Big) \\ &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0. \end{aligned}$$

(Wir nehmen stillschweigend an, daß u und v zweimal stetig differenzierbar sind. Dies gilt in der Tat, wie wir im nächsten Kapitel beweisen werden).
Umgekehrt gilt: Falls u und v reelle stetig differenzierbare Funktionen auf dem Gebiet U sind, die die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen erfüllen, dann ist die Funktion

$$f : z \mapsto u(x,y) + iv(x,y)$$

komplex differenzierbar und es gilt:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \Big(\frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}\Big).$$

Beweis. Wir nehmen zunächst an, daß f differenzierbar ist. Sei $z_0 \in U$ und $f'(z_0) = a + ib$. Dann gilt:

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x_0+h_1, y_0+h_2) - u(x_0,y_0)}{h_1+ih_2} + i\frac{v(x_0+h_1,y_0+h_2) - v(x_0,y_0)}{h_1+ih_2}\right] = a+ib \quad (h = h_1+ih_2).$$

Setzen wir $h_2 = 0$, so sehen wir, daß $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial v}{\partial x}$ existieren und es gilt:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} = a, \quad \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} = b.$$

Ähnlicherweise existieren $\frac{\partial u}{\partial y}$ bzw. $\frac{\partial v}{\partial y}$ und es gilt:

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} = -b, \quad \frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} = a.$$

Wir nehmen jetzt umgekehrt an, daß u, v stetig differenzierbar sind und die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen erfüllen. Wir berechnen

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

o.V.d.A. nehmen wir an, daß $z = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}\big(f(z+h) - f(z)\big) &= \frac{1}{h}\big(f(h) - f(0)\big) \\ &= \frac{u(h_1,h_2) + iv(h_1,h_2) - \big(u(0,0) + iv(0,0)\big)}{h_1+ih_2} \\ &= \frac{1}{h_1+ih_2}\big[(u(h_1,h_2) - u(0,0)\big] + \frac{i}{h_1+ih_2}\big[(v(h_1,h_2) - v(0,0)\big]. \end{aligned}$$

Es gilt nun

$$\begin{aligned} u(h_1,h_2)-u(0,0) &= \big(u(h_1,h_2)-u(0,h_2)\big)+\big(u(0,h_2)-u(0,0)\big)\\ &= h_1\,\frac{\partial u}{\partial x}\,(sh_1,h_2)+h_2\,\frac{\partial u}{\partial y}\,(0,th_1) \quad \big(s,t\in[0,1]\big)\\ &= h_1\,\left[\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)+\rho_1(h_1,h_2)\right]+h_2\,\left[\frac{\partial u}{\partial y}(0,0)+\rho_2(h_1,h_2)\right] \end{aligned}$$

wobei $\lim_{h\to 0}\rho_1(h)=\lim_{h\to 0}\rho_2(h)=0$. In ähnlicher Weise gilt:

$$v(h_1,h_2)-v(0,0)=h_1\,\left(\frac{\partial v}{\partial x}(0,0)+\rho_3\right)+h_2\,\left(\frac{\partial v}{\partial y}(0,0)+\rho_4\right)$$

wobei $\lim_{h\to 0}\rho_3=\lim_{h\to 0}\rho_4=0$. Wir setzen $a=\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial v}{\partial y}(0,0)$, $b=\frac{\partial v}{\partial x}(0,0)=-\frac{\partial u}{\partial y}(0,0)$ und berechnen $\frac{1}{h}\big(f(h)-f(0)\big)-(a+ib)$. Dafür bekommen wir

$$\frac{(h_1-ih_2)\Big[\big(h_1(a+\rho_1)+h_2(-b+\rho_2)\big)+i\big(h_1(b+\rho_3)+h_2(a+\rho_4)\big)\Big]}{h_1^2+h_2^2}-(a+ib).$$

Dieser Ausdruck ergibt den Wert

$$\frac{\rho_1h_1^2+h_1h_2(\rho_2+\rho_3)+h_2^2\rho_4}{h_1^2+h_2^2}$$

der mit $h\to 0$ gegen 0 konvergiert. Q.E.D.

■

4 Analytische Funktionen und Kurvenintegrale

Wir werden jetzt zeigen, daß die Differenzierbarkeit einer Funktion f in engem Zusammenhang zu ihrem Verhalten gegenüber Kurvenintegralen steht.

Satz 4.1 *Sei $f : U \to \mathbf{C}$ eine stetige Funktion, die eine Stammfunktion besitzt (d.h. es existiere eine analytische Funktion F auf U, sodaß $F' = f$). Dann gilt:*

$$\int_{c_1} f(z)dz = \int_{c_2} f(z)dz$$

falls c_1 und c_2 Kurven mit den gleichen Anfangs- und Endpunkten in U sind. Insbesondere gilt für jede geschlossene Kurve in U, daß $\int_c f(z)dz = 0$.

Beweis. Sei F eine Stammfunktion von f. Wir zeigen:

$$\int_c f(z)dz = F\big(c(b)\big) - F\big(c(a)\big).$$

Die Aussagen des Satzes folgen dann sofort.
Es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_c f(z)dz &= \int_c F'(z)dz \\
&= \int_a^b F'\big(c(t)\big)c'(t)dt \\
&= \int_a^b \frac{d}{dt}F\big(c(t)\big)dt \\
&= F\big(c(t)\big|_{t=a}^{b} \\
&= F\big(c(b)\big) - F\big(c(a)\big).
\end{aligned}$$

■

Die Umkehrung dieses Satzes gilt ebenfalls:

Satz 4.2 *Falls $f : U \to \mathbf{C}$ eine stetige Funktion ist, mit der Eigenschaft, daß*

$$\int_c f(z)dz = 0$$

für jede geschlossene Kurve c in U, dann besitzt f eine Stammfunktion, und zwar die Funktion

$$F : z \to \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$$

(z_0 ein fester Punkt aus U). (Es genügt sogar, daß f die Bedingung $\int_c f(z)\,dz = 0$ für den Rand c jedes Dreiecks Δ in U erfüllt.)

Beweis. Gemäß den Voraussetzungen ist die Funktion

$$F : z \to \int_c f(\zeta)d\zeta$$

wohldefiniert, wobei c eine beliebige Kurve von z_0 nach z ist. Wir zeigen: F ist eine Stammfunktion von f. Sei $z \in U$ und wähle $\delta > 0$ so klein, daß der offene Kreis $U(z, \delta) \in U$ mit Mittelpunkt z und Radius δ in U enthalten ist. Für $|h| < \delta$ gilt:

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(\zeta)d\zeta = \int_0^1 f(z+th)dt \to f(z) \text{ für } h \to 0.$$

Q.E.D.

■

Wir zeigen jetzt, daß jede analytische Funktion f auf einem "einfachen" Gebiet U eine Stammfunktion besitzt.

Hilfssatz 4.3 *Sei Δ ein Dreieck in einem Gebiet U, f stetig auf U und holomorph auf $U \setminus \{z_0\}$, wobei z_0 ein fester Punkt aus U ist. Dann gilt:*

$$\int_\Delta f(z)dz = 0,$$

wobei $\int_\Delta$ das Integral über den in positiver Richtung durchlaufenden Rand von Δ bedeutet.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, daß z_0 außerhalb des Dreiecks liegt, d.h. f ist holomorph auf $U \setminus \{z_0\} \supseteq \Delta$. Es sei

$$J = \left| \int_\Delta f(z)dz \right| \neq 0.$$

Wir führen dies zu einem Widerspruch.

Seien $\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3, \Delta^4$ wie im Bild 6. Es gilt:

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{\partial\Delta^1} f(z)dz + \int_{\partial\Delta^2} f(z)dz + \int_{\partial\Delta^3} f(z)dz + \int_{\partial\Delta^4} f(z)dz.$$

Daher gilt für ein Dreieck Δ^j aus $\{\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3, \Delta^4\}$,

$$\left| \int_{\partial\Delta^j} f(z)dz \right| \geq J/4.$$

Sei etwa Δ_1 dieses Dreieck. Wir wenden das gleiche Verfahren auf Δ_1 an und bekommen rekursiv eine absteigende Folge (Δ_i) von Dreiecken, sodaß

a) $\left|\int_{\Delta_i} f(z)dz\right| \geq J/4^i$.

b) Durchmesser von $\Delta_i = \frac{1}{2^i} \times$ Durchmesser von Δ.

c) Umfang von $\Delta_i = \frac{1}{2^i} \times$ Umfang von Δ.

Sei $z_0 \in \bigcap \Delta_i$. Da f in U differenzierbar ist, gilt

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + \rho(z)$$

wobei

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\rho(z)}{z - z_0} = 0.$$

Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Es existiert $\delta > 0$, sodaß $|\rho(z)| \leq \epsilon |z - z_0|$ für $|z - z_0| < \delta$. Außerdem existiert $N \in \mathbf{N}$, sodaß der Durchmesser von $\Delta_i \leq \delta$ für $i \geq N$. Es gilt dann

$$\begin{aligned}
\int_{\Delta_i} f(z)dz &= \int_{\Delta_i} f(z_0) + \int_{\Delta_i} f'(z_0)(z - z_0) + \int_{\Delta_i} \rho(z)dz \\
&= \int_{\Delta_i} \rho(z)dz \quad \text{(die anderen Integranden besitzen Stammfunktionen auf } U\text{)}
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\frac{J}{4^i} &\leq \left| \int_{\Delta_i} f(z)dz \right| = \left| \int_{\Delta_i} \rho(z)dz \right| \\
&\leq \int_{\Delta_i} \left| \rho(z) \right| dz \\
&\leq \frac{1}{2^i} \times \text{ Umfang von } \Delta \times \frac{\epsilon}{2^i} \\
&= \frac{\epsilon}{4^i} \times \text{ Umfang von } \Delta.
\end{aligned}$$

Falls wir $\epsilon < \frac{J}{\text{Umfang von } \Delta}$ wählen, so bekommen wir einen Widerspruch.
Fall 2: z_0 ist ein Eckpunkt von Δ, etwa A. Seien E, D wie im Bild 7. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{ABC} f(z)dz &= \int_{BCDE} f(z)dz + \int_{AED} f(z)dz \\
&= \int_{BCE} f(z)dz + \int_{ECD} f(z)dz + \int_{AED} f(z)dz
\end{aligned}$$

Es reicht daher zu zeigen, daß $\int_{AED} f(z)dz \to 0$ für $E, D \to A$. Dies folgt leicht aus der Stetigkeit von f.
Fall 3: z_0 ist ein Randpunkt von ΔABC, den wir mit D bezeichnen (Bild 8).

$$\begin{aligned}
\int_{ABC} f(z)dz &= \int_{ADC} f(z)dz + \int_{DBC} f(z)dz \\
&= 0 + 0 \quad \text{(Fall 2)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Fall 4: z_0 ist im Inneren von Δ und sei wieder mit D bezeichnet (Bild 9).

$$\int_{ABC} f(z)dz = \left(\int_{ABD} + \int_{DBC} + \int_{ADC} \right) f(z) = 0 \quad \text{(nach Fall 3)}$$

■

Wir können nun eine Version des berühmten Cauchy'schen Integralsatzes, nämlich für konvexe Gebiete, formulieren:

Satz 4.4 *Sei U offen und konvex, $z_0 \in U$, $f : U \to \mathbf{C}$ stetig auf U und holomorph auf $U \setminus \{z_0\}$. Dann besitzt f eine Stammfunktion und es gilt daher*

$$\int_c f(z)dz = 0$$

für jede geschlossene Kurve in U.

Beweis. Wir wählen einen Punkt z_1 aus U und definieren

$$F(z) = (z - z_1) \int_0^1 f\big(z_1 + t(z - z_1)\big)dt.$$

Aus dem vorhergehenden Satz und dem Hilfssatz folgt, daß F differenzierbar ist und $F' = f$.

■

Der gleiche Beweis ist auch für sogenannte **sternförmige** Gebiete U gültig (wobei U bzgl. z_0 sternförmig ist, falls gilt:

$$\bigwedge_{z \in U} \bigwedge_{t \in [0,1]} z_0 + t(z - z_0) \in U\ ).$$

(Bild 10)

Die Homotopie-Version des Satzes von Cauchy:

Definition 4.5 *Seien c_1 bzw. c_2 zwei stückweise glatte Funktionen von $[a, b]$ nach einem Gebiet U in $\mathbf{C}$, sodaß $c_1(a) = c_2(a) = z_0$ und $c_1(b) = c_2(b) = z_1$. Dann sind c_1 und c_2* **in dem Gebiet** *U* **homotop**, *falls es eine stetige Funktion*

$$H : [a, b] \times [0, 1] \to U$$

gibt, die auf $]a, b[\times]0, 1[$ glatt ist, sodaß

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= c_1(s) \wedge H(s, 1) = c_2(s) \qquad (s \in [a, b]) \\ H(a, t) &= z_0 \wedge H(b, t) = z_1 \qquad (t \in [0, 1]) \end{aligned}$$

Satz 4.6 *Falls c_1 und c_2 wie oben sind, dann gilt für jede analytische Funktion $f : U \to \mathbf{C}$*

$$\int_{c_1} f(z)dz = \int_{c_2} f(z)dz.$$

Beweis. Wir bestimmen Partitionen $a = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = b$ bzw. $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$, sodaß für jedes Paar s_i, t_j ein $\epsilon > 0$ und ein $z \in U$ existieren, mit

$$H\big([s_i, s_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}]\big) \subseteq U(z, \epsilon) \subseteq U \quad \text{(Kompaktheitsargument!)}.$$

Sei γ_{ij} der Rand des Rechtecks $[s_i, s_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}]$. Es gilt: $\int_{\gamma_{ij}} f(z)dz = 0$. Daher: $\sum_{i,j} \int_{\gamma_{ij}} f(z)dz = 0$, also

$$0 = \int_{c_1} f(z)dz + 0 - \int_{c_2} f(z)dz - 0$$

d.h. $\int_{c_1} f(z)dz = \int_{c_2} f(z)dz$.

■

Korollar 4.7 *Sei c eine geschlossene Kurve in U, die zu einer konstanten Kurve $c_0(t) \equiv z_0$ homotop ist. Dann gilt:*

$$\int_c f(z)dz = 0.$$

Kurven mit dieser Eigenschaft heißen nullhomotop. Gebiete, in denen jede geschlossene Kurve nullhomotop ist, heißen **einfach zusammenhängend**. *Wir können daher aus dem obigen Satz folgenden Satz ableiten:*

Satz 4.8 *Falls U ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist und $f : U \to \mathbf{C}$ analytisch, dann gilt:*

$$\int_c f(z)dz = 0$$

für jede geschlossene Kurve c in U.

Beispiel. Wir verwenden diesen Satz, um die Integrale

$$\int_0^\infty (\cos t^2)dt \quad \text{und} \quad \int_0^\infty (\sin t^2)dt$$

auszurechnen. Dazu verwenden wir die Beziehung

$$0 = \int_{c_R} e^{-z^2} dz$$

wobei c_R wie im Bild 11 ist. Aber

$$\int_{c_R} e^{-z^2} dz = \int_0^R e^{-x^2} dx - e^{\frac{\pi i}{4}} \int_0^R e^{it^2} dt + \int_{r_R} e^{-z^2} dz \downdownarrows \frac{\sqrt{\pi}}{2} 0$$

(Wir zeigen, daß $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} e^{-z^2} dz = 0$, γ_R die Parametrisierung hat

$$t \mapsto R(\cos t + i \sin t) \quad \left(t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right).$$

Also gilt: $\int_{\gamma_R} e^{-z^2} dz = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2(\cos 2t + i \sin 2t)} iR\, e^{it} dt$.
Daher

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\gamma_R} e^{-z^2} dz \right| &= R \int_0^{\pi\overline{4}} e^{-R^2 \cos 2t} dt \\
&= R\overline{2} \int_0^{\pi\overline{2}} e^{-R^2 \cos u} du \\
&= R\overline{2} \int_0^{\pi\overline{2}} e^{-R^2 \sin u} du \\
&\leq \int_0^{\pi\overline{2}} e^{-R^2 \left(2u\overline{\pi}\right)} R\overline{2} du \\
&\leq \int_0^{R^2} e^{-v} R\overline{2}\pi\overline{2}R^2 dv \\
&= \pi\overline{4}1\overline{R} \int_0^{R^2} e^{-v} dv \leq \pi\overline{4}R\,).
\end{aligned}$$

Mit $R \to \infty$ gilt:

$$0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - e^{\frac{\pi i}{4}} \int_0^\infty (\cos t^2 - i \sin t^2) dt$$

und damit

$$\int_0^\infty (\cos t^2 - i \sin t^2) dt = \sqrt{\frac{\pi}{8}}(1 - i).$$

Vergleich der Real- und Imaginärteile ergibt

$$\int_0^\infty (\cos t^2) dt = \int_0^\infty (\sin t^2) dt = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

Die Cauchy'sche Integralformel für Kreise: Wir verwenden folgenden Hilfssatz:

Lemma 4.9 *Sei c der Kreis mit Radius r und Mittelpunkt z_0 (d.h. $c(t) = z_0 + re^{it}$ $\big(t \in [0, 2\pi]\big)$. Dann gilt:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{1}{\zeta - z_0} d\zeta = 1 \textit{ falls } |z - z_0| < r 0 \textit{ falls } |z - z_0| > r.$$

Beweis. Siehe Übungen.

■

Satz 4.10 *(Cauchy'sche Integralformel:) Sei f eine analytische Funktion auf dem Gebiet U, z_0 ein Punkt aus U und $R > 0$ so, daß $U(z, R) \subseteq U$. Sei $r < R$. Dann gilt:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \big(|z - z_0| < r\big)$$

wobei c der Kreis $c(t) = z + re^{it}$ $\big(t \in [0, 2\pi]\big)$.

Beweis. Betrachte die Funktion

$$g : \zeta \to \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} (\zeta \neq z) f'(z) (\zeta = z)$$

g ist analytisch auf $U \setminus \{z\}$ und stetig auf U (und daher auf der konvexen Menge $U(z, R)$). Es gilt daher:

$$\int_c g(\zeta) d\zeta = 0.$$

und damit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_c g(\zeta) d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= 0 + f(z) \frac{1}{2\pi i} .2\pi i \\ &= f(z). \end{aligned}$$

Q.E.D.

■

Bemerkung. Man kann die Cauchy'sche Integralformel auch in folgender Weise schreiben:

$$f(z) = \int_0^1 f(z + re^{2\pi it})dt.$$

In der Tat: Sei $c(t) = z + r.e^{2\pi it}$, $t \in [0, 1]$. Dann ist $c'(t) = 2\pi i r e^{2\pi it}$ und daher

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{f(z + r.e^{2\pi it})}{r.e^{2\pi it}}.2\pi i r.e^{2\pi it}dt \\ &= \int_0^1 f(z + r.e^{2\pi it})dt. \end{aligned}$$

Dies erlaubt folgende Interpretation der Cauchy'schen Integralformel: Der Wert $f(z)$ einer analytischen Funktion auf $U(z, R)$ ist für $0 < r < R$ gleich dem Mittelwert der Werte $f(z+r.e^{2\pi it})$ entlang dem Kreis um z mit Radius r. Wenn man den Real- und Imaginärteil von f betrachtet, erhält man die entsprechende Aussage für harmonische Funktionen.
Aus der Cauchy'schen Integralformel folgt die verblüffende Tatsache, daß jede analytische Funktion lokal als Taylorreihe darstellbar ist. (Dieses entscheidende Merkmal der komplexen Funktionentheorie steht in krassem Gegensatz zur reellen Theorie: Schon Cauchy hat bemerkt, daß die Funktion $e^{\frac{-1}{t^2}} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ unendlich oft differenzierbar ist, sich aber nicht um den Nullpunkt als Taylorreihe darstellen läßt.)

Satz 4.11 *Sei $f : U \to \mathbf{C}$ analytisch, $z_0 \in U$, $r > 0$, sodaß $U(z_0, r) \subset U$. Dann gilt:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \bigl(z \in U(z_0; r)\bigr)$$

wobei

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta$$

und $c(t) = z_0 + r'e^{it}$ $\bigl(t \in [0, 2\pi]\bigr)$ mit $0 < r' < r$.

Beweis. O.V.d.A. kann man annehmen, daß $z_0 = 0$. Es gilt, für $|z| < r'$,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^n d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi_i}\int \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta\right) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \end{aligned}$$

mit a_n wie oben.

■

Das nächste Korollar unterscheidet wieder die komplexe Funktionentheorie radikal von der reellen Theorie:

Korollar 4.12 *Falls $f : U \to \mathbf{C}$ analytisch (d.h. also einmal differenzierbar), dann ist f unendlich oft differenzierbar.*
Man sieht sofort, daß $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ d.h. die Reihe $\sum a_n(z-z_0)^n$ ist tatsächlich die Taylorreihe von f. Daraus folgt, daß eine stetige Funktion f mit Stammfunktion automatisch analytisch ist.

Korollar 4.13 (der Satz von MORERA): *Sei f eine stetige Funktion auf einem Gebiet U, sodaß*

$$\int_c f(z)dz = 0$$

für jede geschlossene Kurve in U. Dann ist f analytisch.

Beweis. Wir wissen, daß f eine Stammfunktion F besitzt, d.h. $f = F'$. Nach dem Korollar ist F unendlich oft differenzierbar und damit auch f.

■

Die Ergebnisse dieses Kapitals kann man in folgenden Satz zusammenfassen:

Satz 4.14 *Für eine stetige komplexe Funktion f auf einem Gebiet $U \subseteq \mathbf{C}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *f ist komplex differenzierbar in U.*

(b) *Es existieren Punkte $z_1, \ldots, z_n \in U$, sodaß f überall auf $U \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$ komplex differenzierbar ist.*

(c) *Für jedes Dreieck Δ, das mitsamt seinem Inneren in U liegt, gilt*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$

(d) *f ist lokal integrierbar, d.h. zu jedem Punkt $z_0 \in U$ existiert eine Umgebung V, derart, daß f auf V eine Stammfunktion besitzt.*

(e) *Ist B eine abgeschlossene Kreisscheibe in U und bezeichnet c den einmal positiv durchlaufenen Rand von B, dann gilt für alle z im Inneren von B*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

(f) *f ist um jeden Punkt von U in eine Potenzreihe eintwickelbar.*

(g) *f ist auf U beliebig oft komplex differenzierbar.*

Existenz einer harmonisch konjugierten Funktion: Sei U ein Gebiet, worauf jede analytische Funktion eine Stammfunktion besitzt (z.B. eine konvexe oder – allgemeiner – eine einfach zusammenhängende Menge). Sei $u : U \to \mathbf{R}$ harmonisch. Dann existiert ein $v : U \to \mathbf{C}$, sodaß $f = u + iv$ analytisch. (Damit ist jede harmonische Funktion auf U der Realteil einer analytischen Funktion. Insbesondere ist jede harmonische Funktion auf U unendlich oft differenzierbar.)

Beweis. Die Funktion
$$\phi(z)\phi(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$
ist analytisch. Denn ϕ ist stetig und erfüllt die Bedingungen des Satz von Morera. (Es gilt:
$$\begin{aligned}
\int_c \phi(z)dz &= \int_c (\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy) + i\int_c \left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy\right) \\
&= \int_S \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) dx\,dy + i\int_S \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dx\,dy \quad \text{nach dem Satz von Green} \\
&= 0
\end{aligned}$$
(S ist das von c berandete Gebiet.)
Sei f eine Stammfunktion von ϕ. Die Funktion f erfüllt die obige Bedingung.
Wir bemerken noch, daß f bis auf eine komplexe Konstante eindeutig durch μ bestimmt ist. (Das folgt aus den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen).

■

Das Beispiel der Funktion
$$z \mapsto \ln|z|$$
von $\mathbf{C}\setminus\{0\} \to \mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ zeigt, daß nicht jede harmonische Funktion eine konjugierte Funktion besitzt.

Wir betrachten noch einmal die Gleichung
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$
und differenzieren beide Seiten k-mal. Daraus erhalten wir die verallgemeinerte Cauchy'sche Integralformel
$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_c \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}d\zeta$$
und somit die Abschätzung
$$\left|f^{(k)}(z)\right| \leq \frac{Mk!}{r^k} \quad \text{wobei} \quad M = \sup\Big\{\left|f(\zeta)\right|\Big\}.$$

Wir können nun den bekannten **Satz von LIOUVILLE** formulieren:

Satz 4.15 *Falls $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ eine beschränkte ganze (d.h. auf ganz $\mathbf{C}$ analytische) Funktion ist, dann ist f konstant.*

Beweis. Da $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k$, genügt es zu zeigen, daß $f^{(k)}(0) = 0$ $(k \geq 1)$. Aber wir haben die Abschätzung
$$\left|f^{(k)}(0)\right| \leq \frac{Mk!}{r^k} \quad \text{wobei} \quad M = \sup\Big\{\left|f(z)\right| : z \in \mathbf{C}\Big\}$$
Für $k > 0$ gilt $\frac{Mk!}{r^k} \to 0$ für $r \to \infty$. Q.E.D.

■

Der Fundamentalsatz der Algebra läßt sich leicht aus dem Satz von Liouville ableiten (siehe Übungen).

4.1 Die allgemeine Cauchy'sche Integral-Formel und Anwendungen

Um die allgemeine Form dieses Satzes zu beweisen, brauchen wir den Begriff der **Windungszahl** einer Kurve. Sei

$$\begin{aligned} U_+ &= \{z = x + iy \in \mathbf{C} \colon (y \neq 0) \vee (y = 0 \wedge x > 0\} \\ U_- &= \{z = z + iy \in \mathbf{C} \colon (y \neq 0) \vee (y = 0 \vee x < 0\} \end{aligned}$$

die entlang der negativen bzw. positiven reellen Achse "aufgeschlitzten" komplexen Ebenen. Wir bezeichnen mit $\vartheta_+ : U_+ \to]-\pi, \pi[$ bzw. $\vartheta_- : U_- \to]0, 2\pi[$, die Funktionen, für die

$$\begin{aligned} z &= |z| e^{i\vartheta_+(z)} \text{ auf } U_+ \\ \text{bzw. } z &= |z| e^{i\vartheta_-(z)} \text{ auf } U_- \end{aligned}$$

Seien $\ln_+$ bzw. $\ln_-$ die entsprechenden Zweige der Logarithmusfunktion auf U_+ bzw. U_-, d.h.

$$\begin{aligned} \ln_+(z) &= \ln|z| + i\vartheta_+(z) \\ \ln_-(z) &= \ln|z| + i\vartheta_-(z). \end{aligned}$$

Es gilt $\ln_+ z = \ln_- z$ oder $\ln_+ z = \ln_- z - 2\pi i$ (für $z \in U_+ \cap U_-$).

Definition 4.16 *Sei $c : I \to \mathbf{C}$ eine geschlossene Kurve, $z_0 \notin c$. Dann ist der Ausdruck*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{dz}{z - z_0}$$

eine ganze Zahl - die **Windungszahl** *von c bzgl. z_0 (geschrieben: $w(c; z_0)$).*

Beweis. O.V.d.A. kann man annehmen, daß $z_0 = 0$. Wir verwenden eine Partition $a = t_0 < \cdots < t_n = b$ von $[a, b]$, sodaß $c([t_j, t_{j+1}]) \subseteq U_+$ oder U_- für jedes j. Sei c_j die Kurve $c|_{[t_j, t_{j+1}]}$. Es gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{n-1} \int_{c_j} \frac{1}{z} dz.$$

Auf c_j hat $\frac{1}{z}$ eine Stammfunktion $\ln_j$ $\left(\in \{\ln_-, \ln_+\}\right)$, je nachdem, ob das Bild in U_- oder U_+ liegt. Es gilt dann

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{n-1} \{\ln_j c(t_{j+1}) - \ln_j c(t_j)\}$$

und dies ist eine ganze Zahl.

∎

Cauchy'sche Integralformel für geschlossene Kurven: Sei $f : U \to \mathbf{C}$ analytisch, c eine geschlossene nullhomotope Kurve in U, $z \notin c$. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = w(c; z) f(z).$$

Beweis. wie im Fall eines Kreises.

■

Satz 4.17 Der Weierstraß'scher Konvergenzsatz: *Sei* (f_n) *eine Folge von holomorphen Funktionen auf einem Gebiet* U*, die fast gleichmäßig gegen eine Funktion* f *auf* U *konvegiert. Dann ist* f *holomorph und es gilt:* $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ *(fast gleichmäßig) für jedes* $k \in N$*.*

Beweis. Es genügt zu zeigen: für jedes $z_0 \in U$ existiert $\epsilon > 0$ sodaß $U(z_0, \epsilon) \subseteq U$ und $f_n'(z) \to f'(z)$ gleichmäßig auf $U(z_0, \epsilon)$ (Kompaktheitsargument!).
Wähle $0 < \epsilon < \epsilon'$ so, daß $\overline{U(z_0, \epsilon')} \subseteq U$. Für jedes $z \in U(z_0, \epsilon)$ und $m, n \in \mathbf{N}$ gilt:

$$\begin{array}{lcl} \left|f_m'(z) - f_n'(z)\right| & = & 1\overline{2}\pi \left| \int_{\partial U(z_0,\epsilon')} f_m(\zeta) - f_n(\right. \\ & \leq 1\overline{2}\pi 2\pi\epsilon' 1\overline{(}\epsilon' - \epsilon)^2 \max\Big\{ \left|f_m(\zeta) - f_n(\zeta)\right| : |\zeta - z_0| = \epsilon' \Big\} & \\ & \to & 0 \quad \text{gleichmäßig} \end{array}$$

Daher ist die Folge $\big(f_m'(z)\big)$ (gleichmäßig) Cauchy und daher konvergent. Wir verwenden jetzt das Ergebniss von Seite 19.

■

Die Laurentreihe: Sei f analytisch in einem ringförmigen Gebiet $\big\{z : r < |z| < R\big\}$, wobei $0 \leq r < R < \infty$. Dann gilt:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

mit $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_{r'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \ (r < r' < R)$.
Beweis. Sei $z \in \big\{z\colon r < |z| < R\big\}$ und wähle r', R', sodaß

$$r < r' < |z| < R' < R.$$

Wir integrieren $1\overline{2}\pi i f(\zeta)\overline{\zeta} - z$ entlang die geschlossene Kurve im Bild 12. Es gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= 1\overline{2}\pi i \int_{c_{R'}} f(\zeta)\overline{\zeta} - z d\zeta - 1\overline{2}\pi i \int_{c_{r'}} f(\zeta)\overline{\zeta} - z d\zeta \\ &= 1\overline{2}\pi i \int_{c_{R'}} f(\zeta)\overline{\zeta} - z d\zeta + 1\overline{2}\pi i \int_{c_{r'}} f(\zeta)\overline{z} - zeta d\zeta \\ &= 1\overline{2}\pi i \left[\int_{c_r'} f(\zeta)\overline{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(z\overline{\zeta}\Big)^n \int_{c_{r'}} f(\zeta)\overline{\zeta} \sum_{n=-1}^{-\infty} \Big(\frac{z}{\zeta}\Big)^n \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \end{aligned}$$

wobei

$$a_n = 1\overline{2}\pi i \int_{cC_{r'}} f(\zeta)\overline{\zeta}^{n+1}$$

(dieses Integral ist von $r' \in]r, R[$ unabhängig).

■

Isolierte Singularitäten: Falls $z_0 \in U$ und $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbf{C}$ analytisch, dann heißt z_0 eine **isolierte Singularität** von f. Es gibt drei Möglichkeiten, die von der Gestalt der Laurententwicklung

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

abhängen.
Fall 1: $a_n = 0$ für jedes $n < 0$. Dann ist $|f|$ in der Nähe von z_0 beschränkt (d.h. $\bigvee_{\epsilon>0} \bigvee_{K>0} \bigwedge_{z\in U} 0 < |z-z_0| < \epsilon \Rightarrow \big|f(z)\big| < K$). z_0 heißt dann eine **hebbare Singularität**, da die Funktion

$$\widetilde{f} : z \to a_0(z = z_0) f(z)(z \neq z_0)$$

eine analytische Erweiterung von f auf U ist.
Fall 2: Es existiert ein $k < 0$ mit $a_k \neq 0$ aber $a_n = 0$ für $n < k$. Dann gilt: $f(z) = (z-z_0)^k g(z)$ wobei g analytisch auf U mit $g(z_0) \neq 0$. Es gilt dann $\lim_{z\to z_0}\big|f(z)\big| = \infty$. z_0 heißt ein **Pol der Ordnung** $-k$. Ein Pol der Ordnung 1 heißt ein **einfacher Pol**.
Fall 3: $a_n \neq 0$ für unendlich viele $n < 0$. Dann ist z_0 eine **wesentliche Singularität** von f. In diesem Fall gilt: $|f|$ ist in der Nähe von z_0 unbeschränkt, aber $\big|f(z)\big|$ konvergiert nicht gegen $+\infty$ für $z \to z_0$.
Falls z_0 eine isolierte Singularität von f, dann heißt die Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n$$

der **Hauptteil** von f. Diese Reihe definiert eine analytische Funktion auf $\mathbf{C} \setminus \{z_0\}$.

Residuen: Sei z_0 eine isolierte Singularität der Funktion f auf U. Das **Residuum** von f an der Stelle z_0 (geschrieben: $\mathrm{Res}(f; z_0)$) ist der Koeffizient a_{-1} in der Laurententwicklung von f, d.h.

$$\mathrm{Res}(f; z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_r} f(z)dz$$

(c_r ist ein genügend kleiner Kreis um z_0, sodaß z_0 die einzige Singularität innerhalb dieses Kreises ist).

Beispiele. Falls z_0 ein einfacher Pol von f ist, dann gilt

$$\mathrm{Res}(f; z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

Falls f eine rationale Funktion $\delta - size\frac{p}{q}$ und z_0 eine einfache Nullstelle von q (wobei $p(z_0) \neq 0$), dann ist

$$\mathrm{Res}(f; z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

Falls z_0 ein Pol der Ordnung $m > 0$, dann gilt:

$$\mathrm{Res}(f; z_0) = \lim_{z\to z_0}\left(\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\right)\big((z-z_0)^m f(z)\big).$$

Satz 4.18 Residuensatz: *Sei $f : U \setminus \{z_1, \ldots, z_n\} \to \mathbf{C}$ eine analytische Funktion mit isolierten Singularitäten $z_1, \ldots, z_n$. Sei c eine geschlossene Kurve in $U \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$, die in U nullhomotop ist. Dann gilt:*

$$\int_c f(z)dz = 2\pi i \left(\sum_{j=1}^{n} w(c; z_j) Res(f; z_j) \right)$$

(Besonders wichtig ist der Fall, daß die Windungszahl von c bzgl. der Singularitäten jeweils 1 ist. Dann gilt: $\int_c f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res(f; z_j)$).

Beweis. Sei f_j der Hauptteil von f an der Singularität z_j. Es gilt: $f - \sum_{j=1}^{n} f_j$ ist auf U analytisch. Daher gilt:

$$\int_c f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \int_c f_j(z)dz.$$

Betrachten wir, für $1 \leq j \leq n$, die Laurententwicklung von f_j

$$f_j(z) = \frac{a_{-1}^j}{z - z_j} + \frac{a_{-2}^j}{(z - z_j)^2} + \frac{a_{-3}^j}{(z - z_j)^3} + \ldots$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_c f_j(z)dz &= \int_c \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{a_n^j}{(z - z_j)^n} dz \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \int_c \frac{a_n^j}{(z - z_j)^n} dz \\ &= \int_c \frac{a_{-1}^j}{z - z_j} dz \\ &= 2\pi i \ \mathrm{Res}(f; z_j) w(c; z_0), \end{aligned}$$

womit alles bewiesen ist.

■

Anwendungen des Residuensatzes: Man kann viele bestimmte Integrale mit Hilfe des Residuensatzes berechnen, etwa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{1 + x^4}$$

. Man berechnet

$$\int_{c_R} \frac{z^2 dz}{1 + z^4}$$

entlang der Kurve c_R wie im Bild 13.
Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_{c_R} \frac{z^2 dz}{1 + z^4} &= \int_{-R}^{R} \frac{x^2 dx}{1 + x^4} + \int_0^{\pi} \frac{R^2 e^{2it} i.e^{it} dt}{1 + R^4 e^{i4t}} \\ &\to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{1 + x^4} + 0 \text{ für } R \to \infty. \end{aligned}$$

Andererseits kann man das Integral mit Hilfe des Residuensatzes berechnen und erhält damit den Wert von $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2dx}{1+x^4}$. In der Tat hat $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$ die Polstellen $\pm e^{\frac{\pi i}{4}}$, $\pm e^{\frac{3\pi i}{4}}$. Die von c_R umlaufenen Polstellen sind $e^{\frac{\pi i}{4}}$ und $e^{\frac{3\pi i}{4}}$ und es gilt:

$$\mathrm{Res}(f; e^{\frac{\pi i}{4}}) = \frac{1}{4}e^{-\frac{\pi i}{4}},\ \mathrm{Res}(f; e^{\frac{3\pi i}{4}}) = \frac{1}{4}e^{-\frac{3\pi i}{4}}.$$

Damit ist

$$\int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i\Big(\frac{i}{2\sqrt{2}}\Big) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Weitere Integrale, die man mit Hilfe des Residuensatzes ausrechnen kann:

1. Integrale des Typs $I = \int_0^{2\pi} r(\cos\vartheta, \sin\vartheta)d\vartheta$ (r eine rationale Funktion). Es gilt

$$I = -i\int_{|z|=1} r\left(1\overline{2}\Big(z + 1\overline{z}\Big), \frac{1}{2i}\Big(z - \frac{1}{z}\Big)dz\overline{z}\right).$$

Beispiel.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} d\vartheta\overline{a} + \cos\vartheta &= -i\int_{|z|=1} dz\overline{z}^2 + 2az + 1 \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}} \quad (a > 1) \end{aligned}$$

2. Integrale des Typs $\int_{-\infty}^{\infty} r(x)dx$ wobei $r = p\overline{q}$ eine rationale Funktion mit grad $p \leq (\operatorname{grad} q) - 2$ Ähnlicherweise Integrale des Typs

$$\int_{-\infty}^{\infty} r(x)e^{ix}dx, \int_{-\infty}^{\infty} r(x)\cos x dx, \int_{-\infty}^{\infty} r(x)\sin x dx$$

usw.

5 Die allgemeine Cauchy'sche Integral-Formel und Anwendungen.

Um die allgemeine Form dieses Satzes zu beweisen, brauchen wir den Begriff der **Windungszahl** einer Kurve. Sei

$$\begin{aligned} U_+ &= \{z = x+iy \in \mathbf{C}\colon (y \neq 0) \vee (y = 0 \wedge x > 0\} \\ U_- &= \{z = z+iy \in \mathbf{C}\colon (y \neq 0) \vee (y = 0 \vee x < 0\} \end{aligned}$$

die entlang der negativen bzw. positiven reellen Achse "aufgeschlitzten" komplexen Ebenen. Wir bezeichnen mit $\vartheta_+ : U_+ \to]-\pi, \pi[$ bzw. $\vartheta_- : U_- \to]0, 2\pi[$, die Funktionen, für die

$$\begin{aligned} z &= |z|e^{i\vartheta_+(z)} \text{ auf } U_+ \\ \text{bzw. } z &= |z|e^{i\vartheta_-(z)} \text{ auf } U_- \end{aligned}$$

Seien $\ln_+$ bzw. $\ln_-$ die entsprechenden Zweige der Logarithmusfunktion auf U_+ bzw. U_-, d.h.

$$\begin{aligned} \ln_+(z) &= \ln|z| + i\vartheta_+(z) \\ \ln_-(z) &= \ln|z| + i\vartheta_-(z). \end{aligned}$$

Es gilt $\ln_+ z = \ln_- z$ oder $\ln_+ z = \ln_- z - 2\pi i$ (für $z \in U_+ \cap U_-$).

Definition 5.1 *Sei $c : I \to \mathbf{C}$ eine geschlossene Kurve, $z_0 \notin c$. Dann ist der Ausdruck*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{dz}{z - z_0}$$

eine ganze Zahl - die **Windungszahl** *von c bzgl. z_0 (geschrieben: $w(c; z_0)$).*

Beweis. O.V.d.A. kann man annehmen, daß $z_0 = 0$. Wir verwenden eine Partition $a = t_0 < \cdots < t_n = b$ von $[a, b]$, sodaß $c([t_j, t_{j+1}]) \subseteq U_+$ oder U_- für jedes j. Sei c_j die Kurve $c|_{[t_j,t_{j+1}]}$. Es gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{z}dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=0}^{n-1}\int_{c_j}\frac{1}{z}dz.$$

Auf c_j hat $\frac{1}{z}$ eine Stammfunktion $\ln_j$ $\big(\in \{\ln_-, \ln_+\}\big)$, je nachdem, ob das Bild in U_- oder U_+ liegt. Es gilt dann

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{z}dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=0}^{n-1}\{\ln_j c(t_{j+1}) - \ln_j c(t_j)\}$$

und dies ist eine ganze Zahl.

■

Cauchy'sche Integralformel für geschlossene Kurven: Sei $f : U \to \mathbf{C}$ analytisch, c eine geschlossene nullhomotope Kurve in U, $z \notin c$. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = w(c; z)f(z).$$

Beweis. wie im Fall eines Kreises.

∎

Satz 5.2 Der Weierstraß'scher Konvergenzsatz: *Sei (f_n) eine Folge von holomorphen Funktionen auf einem Gebiet U, die fast gleichmäßig gegen eine Funktion f auf U konvegiert. Dann ist f holomorph und es gilt: $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ (fast gleichmäßig) für jedes $k \in N$.*

Beweis. Es genügt zu zeigen: für jedes $z_0 \in U$ existiert $\epsilon > 0$ sodaß $U(z_0, \epsilon) \subseteq U$ und $f_n'(z) \to f'(z)$ gleichmäßig auf $U(z_0, \epsilon)$ (Kompaktheitsargument!).
Wähle $0 < \epsilon < \epsilon'$ so, daß $\overline{U(z_0, \epsilon')} \subseteq U$. Für jedes $z \in U(z_0, \epsilon)$ und $m, n \in \mathbf{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} \left|f_m'(z) - f_n'(z)\right| &= 1\overline{2}\pi \left| \int_{\partial U(z_0,\epsilon')} f_m(\zeta) - f_n(\zeta)\overline{(}\zeta - z)^2 d\zeta \right| \\ &\leq 1\overline{2}\pi 2\pi\epsilon' 1\overline{(}\epsilon' - \epsilon)^2 \max\Big\{ \left|f_m(\zeta) - f_n(\zeta)\right| : |\zeta - z_0| = \epsilon' \Big\} \\ &\to 0 \quad \text{gleichmäßig} \end{aligned}$$

Daher ist die Folge $\big(f_m'(z)\big)$ (gleichmäßig) Cauchy und daher konvergent. Wir verwenden jetzt das Ergebniss von Seite 19.

∎

Die Laurentreihe: Sei f analytisch in einem ringförmigen Gebiet $\big\{z : r < |z| < R\big\}$, wobei $0 \leq r < R < \infty$. Dann gilt:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

mit $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_{r'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta$ $(r < r' < R)$.
Beweis. Sei $z \in \big\{z : r < |z| < R\big\}$ und wähle r', R', sodaß

$$r < r' < |z| < R' < R.$$

Wir integrieren $1\overline{2}\pi i f(\zeta)\overline{\zeta} - z$ entlang die geschlossene Kurve im Bild 12. Es gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= 1\overline{2}\pi i \int_{c_{R'}} f(\zeta)\overline{\zeta} - z d\zeta - 1\overline{2}\pi i \int_{c_{r'}} f(\zeta)\overline{\zeta} - z d\zeta \\ &= 1\overline{2}\pi i \int_{c_{R'}} f(\zeta)\overline{\zeta} - z d\zeta + 1\overline{2}\pi i \int_{c_{r'}} f(\zeta)\overline{z} - zeta d\zeta \\ &= 1\overline{2}\pi i \left[\int_{c_r'} f(\zeta)\overline{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(z\overline{\zeta}\Big)^n \int_{c_{r'}} f(\zeta)\overline{\zeta} \sum_{n=-1}^{-\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \end{aligned}$$

wobei

$$a_n = 1\overline{2}\pi i \int_{cC_{r'}} f(\zeta)\overline{\zeta}^{n+1}$$

(dieses Integral ist von $r' \in]r, R[$ unabhängig).

∎

Isolierte Singularitäten: Falls $z_0 \in U$ und $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbf{C}$ analytisch, dann heißt z_0 eine **isolierte Singularität** von f. Es gibt drei Möglichkeiten, die von der Gestalt der Laurententwicklung

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

abhängen.
Fall 1: $a_n = 0$ für jedes $n < 0$. Dann ist $|f|$ in der Nähe von z_0 beschränkt (d.h. $\bigvee_{\epsilon>0} \bigvee_{K>0} \bigwedge_{z\in U} 0 < |z-z_0| < \epsilon \Rightarrow \big|f(z)\big| < K$). z_0 heißt dann eine **hebbare Singularität**, da die Funktion

$$\widetilde{f} : z \to a_0(z = z_0) f(z)(z \neq z_0)$$

eine analytische Erweiterung von f auf U ist.
Fall 2: Es existiert ein $k < 0$ mit $a_k \neq 0$ aber $a_n = 0$ für $n < k$. Dann gilt: $f(z) = (z-z_0)^k g(z)$ wobei g analytisch auf U mit $g(z_0) \neq 0$. Es gilt dann $\lim_{z\to z_0}\big|f(z)\big| = \infty$. z_0 heißt ein **Pol der Ordnung** $-k$. Ein Pol der Ordnung 1 heißt ein **einfacher Pol**.
Fall 3: $a_n \neq 0$ für unendlich viele $n < 0$. Dann ist z_0 eine **wesentliche Singularität** von f. In diesem Fall gilt: $|f|$ ist in der Nähe von z_0 unbeschränkt, aber $\big|f(z)\big|$ konvergiert nicht gegen $+\infty$ für $z \to z_0$.
Falls z_0 eine isolierte Singularität von f, dann heißt die Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n$$

der **Hauptteil** von f. Diese Reihe definiert eine analytische Funktion auf $\mathbf{C} \setminus \{z_0\}$.

Residuen: Sei z_0 eine isolierte Singularität der Funktion f auf U. Das **Residuum** von f an der Stelle z_0 (geschrieben: $\mathrm{Res}(f; z_0)$) ist der Koeffizient a_{-1} in der Laurententwicklung von f, d.h.

$$\mathrm{Res}(f; z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_r} f(z)dz$$

(c_r ist ein genügend kleiner Kreis um z_0, sodaß z_0 die einzige Singularität innerhalb dieses Kreises ist).

Beispiele. Falls z_0 ein einfacher Pol von f ist, dann gilt

$$\mathrm{Res}(f; z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

Falls f eine rationale Funktion $\delta - size\frac{p}{q}$ und z_0 eine einfache Nullstelle von q (wobei $p(z_0) \neq 0$), dann ist

$$\mathrm{Res}(f; z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

Falls z_0 ein Pol der Ordnung $m > 0$, dann gilt:

$$\mathrm{Res}(f; z_0) = \lim_{z\to z_0}\left(\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\right)\big((z-z_0)^m f(z)\big).$$

Satz 5.3 Residuensatz: *Sei $f : U\setminus\{z_1,\dots,z_n\} \to \mathbf{C}$ eine analytische Funktion mit isolierten Singularitäten $z_1,\dots,z_n$. Sei c eine geschlossene Kurve in $U\setminus\{z_1,\dots,z_n\}$, die in U nullhomotop ist. Dann gilt:*

$$\int_c f(z)dz = 2\pi i\left(\sum_{j=1}^n w(c;z_j)Res(f;z_j)\right)$$

(Besonders wichtig ist der Fall, daß die Windungszahl von c bzgl. der Singularitäten jeweils 1 ist. Dann gilt: $\int_c f(z)dz = 2\pi i\sum_{j=1}^n Res(f;z_j)$).

Beweis. Sei f_j der Hauptteil von f an der Singularität z_j. Es gilt: $f - \sum_{j=1}^n f_j$ ist auf U analytisch. Daher gilt:

$$\int_c f(z)dz = \sum_{j=1}^n \int_c f_j(z)dz.$$

Betrachten wir, für $1 \le j \le n$, die Laurententwicklung von f_j

$$f_j(z) = \frac{a_{-1}^j}{z-z_j} + \frac{a_{-2}^j}{(z-z_j)^2} + \frac{a_{-3}^j}{(z-z_j)^3} + \dots$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_c f_j(z)dz &= \int_c \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{a_n^j}{(z-z_j)^n}dz \\
&= \sum_{n=-\infty}^{-1} \int_c \frac{a_n^j}{(z-z_j)^n}dz \\
&= \int_c \frac{a_{-1}^j}{z-z_j}dz \\
&= 2\pi i \operatorname{Res}(f;z_j)w(c;z_0),
\end{aligned}$$

womit alles bewiesen ist.

■

Anwendungen des Residuensatzes: Man kann viele bestimmte Integrale mit Hilfe des Residuensatzes berechnen, etwa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2dx}{1+x^4}.$$

Man berechnet

$$\int_{c_R} \frac{z^2dz}{1+z^4}$$

entlang der Kurve c_R wie im Bild 13.
Es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{c_R} \frac{z^2dz}{1+z^4} &= \int_{-R}^{R} \frac{x^2dx}{1+x^4} + \int_0^{\pi} \frac{R^2e^{2it}i.e^{it}dt}{1+R^4e^{i4t}} \\
&\to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2dx}{1+x^4} + 0 \text{ für } R \to \infty.
\end{aligned}$$

Andererseits kann man das Integral mit Hilfe des Residuensatzes berechnen und erhält damit den Wert von $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4}$. In der Tat hat $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$ die Polstellen $\pm e^{\frac{\pi i}{4}}$, $\pm e^{\frac{3\pi i}{4}}$. Die von c_R umlaufenen Polstellen sind $e^{\frac{\pi i}{4}}$ und $e^{\frac{3\pi i}{4}}$ und es gilt:

$$\operatorname{Res}(f; e^{\frac{\pi i}{4}}) = \frac{1}{4} e^{-\frac{\pi i}{4}}, \ \operatorname{Res}(f; e^{\frac{3\pi i}{4}}) = \frac{1}{4} e^{-\frac{3\pi i}{4}}.$$

Damit ist

$$\int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \Big(\frac{i}{2\sqrt{2}} \Big) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Weitere Integrale, die man mit Hilfe des Residuensatzes ausrechnen kann:

1. Integrale des Typs $I = \int_0^{2\pi} r(\cos\vartheta, \sin\vartheta) d\vartheta$ (r eine rationale Funktion). Es gilt

$$I = -i \int_{|z|=1} r \left(1\overline{2} \Big(z + 1\overline{z} \Big), \frac{1}{2i} \Big(z - \frac{1}{z} \Big) dz\overline{z} \right).$$

   Beispiel.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} d\vartheta\overline{a} + \cos\vartheta &= -i \int_{|z|=1} dz\overline{z}^2 + 2az + 1 \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}} \quad (a > 1). \end{aligned}$$

2. Integrale des Typs $\int_{-\infty}^{\infty} r(x) dx$ wobei $r = p\overline{q}$ eine rationale Funktion mit $\operatorname{grad} p \leq (\operatorname{grad} q) - 2$.

   Ähnlicherweise Integrale des Typs

$$\int_{-\infty}^{\infty} r(x) e^{ix} dx, \int_{-\infty}^{\infty} r(x) \cos x dx, \int_{-\infty}^{\infty} r(x) \sin x dx$$

   usw.

6 Geometrische Eigenschaften – Konforme Abbildungen

Die Nullstellen einer analytischen Funktion: Im Gegensatz zum Fall von reellen Funktionen haben die Nullstellenmengen von analytischen Funktionen eine sehr einfache Gestalt.

Hilfssatz 6.1 *Sei $f : U \to \mathbf{C}$ analytisch (U ein Gebiet in $\mathbf{C}$). Falls es ein $z_0 \in \mathbf{C}$ gibt mit $f^{(k)}(z_0) = 0$ ($k \in \mathbf{N}_0$), dann gilt: $f \equiv 0$.*

Beweis. Setze $U_1 = \{z \in \mathbf{C} : \bigwedge_{k \in \mathbf{N}_0} f^{(k)}(z) = 0\}$. Es gilt:

a) U_1 ist nicht leer (da $z_0 \in U$);

b) U_1 ist abgeschlossen (da $f^{(k)}$ stetig);

c) U_1 ist offen (da $z_1 \in U \Rightarrow f = 0$ auf einer Umgebung von z_1. Denn die Taylorreihe $\sum_k \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_1)(z - z_1)^k$ von f in der Nähe von z_1 ist trivial).

Aus a), b), c) folgt $U_1 = U$ (U ist zusammenhängend!)

■

Damit hat jede Nullstelle z_0 von $f(\not\equiv 0)$ endliche Ordnung, d.h. es existiert $k \in \mathbf{N}$ mit $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$ wobei $g : U \to \mathbf{C}$ analytisch und $g(z_0) \neq 0$ (k heißt die **Ordnung** der Nullstelle).

Satz 6.2 *Sei z_0 eine Nullstelle der analytischen Funktion $f : U \to \mathbf{C}$, wobei U ein Gebiet ist und f nicht identisch null. Dann ist z_0 eine isolierte Nullstelle (d.h. es gibt eine Umgebung von z_0, in der keine andere Nullstelle liegt.)*

(Denn $f(z) \neq 0$ für $0 < |z - z_0| < \epsilon$, falls ϵ so klein ist, daß (mit der vorhergehenden Notation) $g(z) \neq 0$ für $|z - z_0| < \epsilon$).
Daraus folgt, daß die Nullstellenmenge $Z(f)$ einer (nicht identisch verschwindenden) analytischen Funktion f auf einem Gebiet U folgende Eigenschaften besitzt:

a) $Z(f)$ ist diskret, d.h. $\bigwedge_{z_0 \in Z(f)} \bigvee_{\epsilon > 0} U(z_0, \epsilon) \cap Z(f) = \{z_0\}$.

b) $K \subseteq U$ kompakt $\Rightarrow Z(f) \cap K$ ist endlich, (d.h. f hat nur endlich viele Nullstellen auf kompakten Teilmengen von U). (Denn eine kompakte diskrete Menge ist endlich).

c) $Z(f)$ ist abzählbar. (Denn U ist σ-kompakt, d.h. hat eine Darstellung $U = \bigcup_{n=1}^\infty K_n$, wobei die K_n kompakt sind. Es gilt dann

$$Z(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \cap Z(f)$$

und $K_n \cap Z(f)$ ist endlich).

d) Die Häufungspunkte (in $\mathbf{C}$) der Menge $Z(f)$ liegen in ∂U.

Korollar 6.3 (Identitätsprinzip) *Seien f, g analytische Funktionen auf einem Gebiet U. Falls die Menge $\{z \in U : f(z) = g(z)\}$ einen Häufungspunkt in U besitzt, dann sind f und g identisch.*

Sei U ein Gebiet, $f : U \to \mathbf{C}$ analytisch und c eine einfache, geschlossene, null-homotope, positiv orientierte Kurve in U mit $Z(f) \cap c = \emptyset$. Die Menge U_1 aller Punkte z in U mit $w(z;c) = 1$ (d.h. das **Innere** von c) ist relativ kompakt. Also ist die Anzahl N der Nullstellen von f innerhalb von c endlich. In der Tat gilt der

Satz 6.4 (Prinzip des Arguments)

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

(Bemerkung: Eine n-fache Nullstelle z_0 wird n-mal gezählt).

Beweis. Dies folgt aus dem Residuensatz:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}\Big(\frac{f'(z)}{f(z)}; z_j\Big)$$

wobei $z_1, \dots, z_k$ die Nullstellen von f innerhalb von c sind. Es genügt daher, das Residum von $\frac{f'}{f}$ an einer Nullstelle z_0 auszurechnen. Sei z_0 eine n-fache Nullstelle, d.h. $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$ mit $g(z_0) \neq 0$. Es gilt dann

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

und daher $\mathrm{Res}(\frac{f'}{f}; z_0) = n$ Q.E.D.

■

Meromorphe Funktion: Eine meromorphe Funktion ist eine Funktion $g : U \to \overline{\mathbf{C}}$, sodaß

a) $P(g) := \{z : g(z) = \infty\}$ ist eine diskrete Teilmenge von U;

b) g ist auf $U \setminus P(g)$ analytisch;

c) jedes $z \in P(g)$ ist eine Polstelle von g.

Typische Beispiele von meromorphen Funktionen sind Quotienten $\frac{f_1}{f_2}$ wobei f_1, f_2 analytisch sind (und $f_2 \not\equiv 0$). (In der Tat haben *alle* meromorphe Funktionen diese Gestalt.)

Satz 6.5 *Seien U, c wie oben, $g : U \to \overline{\mathbf{C}}$ eine meromorphe Funktion (wobei keine Polstellen oder Nullstellen von g auf c liegen). Dann gilt:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{g'(z)}{g(z)} dz = N - P$$

wobei N die Anzahl der Nullstellen von g bzw. P die Anzahl der Polstellen innerhalb von c ist. (Sowohl Polstellen als auch Nullstellen werden gemäß ihrer Ordnung gezählt.)

BEWEIS. Ähnlich wie oben. Denn sei z_0 ein Pol der Ordnung k. Dann ist die Funktion $f(z) = g(z).(z-z_0)^k$ in einer Umgebung von z_0 analytisch und

$$f(z_0) = \lim_{z\to z_0} g(z)$$

$.(z-z_0)^k \neq 0$. Es gilt

$$g'(z) = f'(z).(z-z_0)^{-k} + f(z).(-k)(z-z_0)^{-k-1}$$

. Die Funktion $\frac{g'}{g}$ hat an der Stelle z_0 einen Pol erster Ordnung und wir können das Residuum berechnen:

$$\operatorname{Res}(\frac{g'}{g}; z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\left[\frac{f'(z).(z-z_0)^{-k} + f(z).(-k)(z-z_0)^{-k-1}}{f(z).(z-z_0)^{-k}}\right] = -k.$$

■

Korollar 6.6 *Sei $\alpha \in \mathbf{C}$ und sei $f : U \to \mathbf{C}$, c wie in den Voraussetzungen zum Prinzip des Arguments, (genauer, sodaß $f(z) \neq 0$ für $z \in \mathbf{C}$). Dann ist*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f'(z)}{f(z)-\alpha}dz$$

die Anzahl der Lösungen der Gleichung $f(z) = \alpha$ innerhalb von c.
Geometrische Interpretation: Sei $\widetilde{c} = f \circ c$, d.h. $\widetilde{c}$ ist das Bild von c bzgl. f. Dann ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f'(z)}{f(z)-\alpha}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\widetilde{c}} \frac{1}{\zeta-\alpha}d\zeta$$

d.h. die Windungszahl von $\widetilde{c}$ bzgl. α (vgl. Bild 14).

Satz 6.7 *Sei $f : U \to \mathbf{C}$ analytisch, $z_0 \in U$, $f(z_0) = w_0$, wobei z_0 eine Nullstelle der Ordnung n der Funktion $f(z) - w_0$ ist. Dann gilt: Für genügend kleines $\epsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ sodaß*

$$|w-w_0| < \delta \Rightarrow f(z) - w \text{ hat genau } n \text{ Nullstellen in } \{z : |z-z_0| < \epsilon\}.$$

BEWEIS. Wähle $\epsilon > 0$ so klein, daß der von der Kurve $c : t \to z_0 + \epsilon e^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$ umschlossene Kreis kein z mit $f(z) = w_0$ (außer z_0) enthält. Dann ist $\widetilde{c} = f \circ c$ eine Kurve in $V = f(U)$, die nicht durch w_0 geht. Wähle δ so klein, daß $\{w : |w-w_0| < \delta\} \cap \widetilde{c}([0, 2\pi]) = \emptyset$.
Es gilt dann

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\widetilde{c}} \frac{dz}{z-w} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\widetilde{c}} \frac{dz}{z-w_0}$$

d.h.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f'(z)}{f(z)-w}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f'(z)}{f(z)-w_0}dz = n.$$

■

Satz 6.8 (von ROUCHÉ): *Seien f und g analytische Funktionen auf einem Gebiet U. Sei c eine einfache, nullhomotope Kurve in U mit Innerem U_1. Wir nehmen ferner an, daß die Ungleichung*

$$\big|f(z)\big| > \big|g(z)\big|$$

für jedes z auf c gilt. Außerdem haben f, g und $f+g$ keine Nullstellen auf c. Dann ist die Anzahl der Nullstellen von f und $f+g$ in U_1 gleich.

Beweis. Betrachte die Funktion

$$\frac{g(z)}{f(z)}.$$

Es gilt:

$$\Big|\frac{g(z)}{f(z)}\Big| < 1 \text{ also } \mathrm{Re}\Big(1+\frac{g(z)}{f(z)}\Big) > 0 \text{ auf } c.$$

Daher existiert ein Zweig ln der Logarithmusfunktion auf einer offenen Menge V, die $\Big\{1+\frac{g(z)}{f(z)} : z \in c\Big\}$ enthält. Betrachte die Funktion

$$F(z) = \ln(1+\frac{g(z)}{f(z)}).$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
F'(z) &= \frac{\frac{f(z)g'(z)-f'(z)g(z)}{f^2(z)}}{1+\frac{g(z)}{f(z)}} \\
&= \frac{f(z)g'(z)-f'(z)g(z)}{f(z)(f(z)+g(z))} \\
&= \frac{f(z)g'(z)+f(z)f'(z)-f(z)f'(z)-f'(z)g(z)}{f(z)(f(z)+g(z))} \\
&= \frac{f'(z)+g'(z)}{f(z)+g(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{(f+g)'}{(f+g)}(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

■

Beispiel. Mit Hilfe dieses Satzes kann man beweisen, daß das Polynom

$$p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_0$$

n Nullstellen hat. (Setze $f(z) = z^n$, $g(z) = p(z) - z^n$. Wähle R so groß, daß $\big|g(z)\big| < \big|f(z)\big|$ auf $\big\{z : |z| = R\big\}$).

Aus dem Satz von Rouché folgt:

Satz 6.9 *Sei (f_n) eine Folge von analytischen Funktionen auf einem Gebiet U, die fast gleichmäßig gegen f konvergiert, wobei f nicht die Nullfunktion sei. Falls f genau p Nullstellen in dem relativ-kompakten Teilgebiet U_1 von U besitzt, dann existiert ein N, sodaß jedes f_n mit $n \geq N$ auch genau p Nullstellen auf U_1 besitzt.*
Insbesondere folgt daraus: Falls eine Folge f_n von invertierbaren Funktionen auf U fast gleichmäßig gegen eine Funktion $f \not\equiv 0$ konvergiert, dann ist auch f auf U invertierbar.

Definition 6.10 *Eine Funktion $f : X \to Y$ (X und Y topologische Räume) heißt offen, falls*

$$U \text{ offen in } X \Rightarrow f(U) \text{ offen in } Y.$$

Falls X, Y metrische Räume sind, dann gilt folgende äquivalente $\epsilon-\delta$ Version dieser Definition:

$$\bigwedge_{x_0 \in X} \bigwedge_{\epsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} f\big(U(x_0, \epsilon)\big) \supseteq U\big(f(x_0), \delta)\big)$$

(d.h. die Gleichung $f(x) = y$ hat eine Lösung in $U(x_0, \epsilon)$, falls $d\big(y, f(x_0)\big) < \delta$).

Satz 6.11 *Jede nicht konstante analytische Abbildung $f : U \to \mathbf{C}$ ist eine offene Abbildung vom Gebiet U auf die offene Menge $V = f(U)$.*

Beweis. Folgt sofort aus dem Satz vor dem Satz von Rouché.

■

Satz 6.12 *Sei $f : U \to \mathbf{C}$ analytisch und injektiv auf dem Gebiet U. Dann ist f ein Homöomorphismus von U auf eine offene Teilmenge V von $\mathbf{C}$. Außerdem gilt $f'(z_0) \neq 0$ für jedes $z_0 \in U$. (Wir werden später sehen, daß in diesem Fall auch f^{-1} analytisch ist).*

Satz 6.13 *Sei $f : U \to \mathbf{C}$ analytisch, $z_0 \in U$ mit $f'(z_0) \neq 0$. Dann existiert eine offene Umgebung U_1 von z_0 in U, sodaß $f|_{U_1}$ eine Bijektion und daher eine Homöomorphismus von U_1 auf $V = f(U_1)$ ist, wobei V offen in $\mathbf{C}$.*

Das Maximum-Prinzip: Sei $f : U \to \mathbf{C}$ eine nicht konstante analytische Funktion auf einem Gebiet U. Dann besitzt $|f|$ kein lokales Maximum in U.
Beweis. Sei $z_0 \in U$, $\epsilon > 0$. Wir zeigen: es existiert $z \in U(z_0; \epsilon)$ mit $\big|f(z)\big| > \big|f(z_0)\big|$. Denn f ist offen (da nicht konstant) und daher ist $f\big(U(z_0; \epsilon)\big)$ eine offene Umgebung von $f(z_0)$. Es enthält damit einen Punkt w mit $|w| > \big|f(z_0)\big|$.

■

Korollar 6.14 *Seien f, U wie oben, $U_1 \subseteq U$ ein relativ kompaktes Teilgebiet. Dann gilt: Das Supremum von $|f|$ auf U_1 wird auf ∂U_1 angenommen.*

Korollar 6.15 *Seien f, U wie oben, wobei f keine Nullstellen besitze. Dann besitzt $|f|$ kein lokales Minimum.*

Beweis. Ein Minimum von $|f|$ ist ein Maximum von $|\frac{1}{f}|$.

Alternativbeweis des Prinzips des Maximum: Sei z_0, ϵ wie im Beweis. Es gilt (Cauchy'sche Integralformel):

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \epsilon e^{i\vartheta}) d\vartheta$$

und daher

$$\big|f(z_0)\big| \leq \frac{1}{2\pi} K.2\pi = K$$

wobei $K = \max\Big\{\big|f(z)\big| : |z - z_0| = \epsilon\Big\}$.
Dieser Beweis zeigt allerdings nur die (schwächere) Aussage, daß $|f|$ auf U kein striktes Maximum annehmen kann.

■

Satz 6.16 *Sei $g : U \to V$ analytisch und bijektiv. Dann gilt:*

a) $\bigwedge_{z\in U} g'(z) \neq 0$;

b) $f = g^{-1}$ *ist analytisch und*

$$f'(w) = \frac{1}{g'\big(f(w)\big)} \quad (w \in V).$$

Beweis. f ist stetig, da g offen. Sei nun $w \in V$, und wähle $\delta > 0$, sodaß $w + h \in V$, wenn $|h| < \delta$. Es gilt

$$\begin{aligned} w &= g\big(f(w)\big) \\ w + h &= g\big(f(w+h)\big). \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{g\big(f(w+h)\big) - g\big(f(w)\big)}{h} \\ &= \frac{g\big(f(w+h)\big) - g\big(f(w)\big)}{f(w+h) - f(w)} . \frac{f(w+h) - f(w)}{h} \\ h \to 0 \Rightarrow 1 &= g'\big(f(w)\big) f'(w). \end{aligned}$$

Daher ist f an der Stelle w differenzierbar und es gilt

$$f'(w) = \frac{1}{g'\big(f(w)\big)}.$$

■

Korollar 6.17 *Jeder Zweig des* ln *ist analytisch.*

Konforme (oder winkeltreue) Abbildungen: Das sind bijektive analytische Abbildungen von einem Gebiet U auf ein Gebiet V. Es gilt dann, daß $f'(z) \neq 0$ und daß f^{-1} ebenfalls analytisch und daher konform ist. Der Grund für die Bezeichnung liegt im folgenden Satz:

Satz 6.18 *Sei f wie oben und seien c_1, c_2 Kurven in U, die sich im Punkt z_0 schneiden. Die Kurven $\widetilde{c}_1 = f \circ c_1$ und $\widetilde{c}_2 = f \circ c_2$ schneiden sich dann im Punkt $f(z_0)$ und es gilt:*

$$\textit{Winkel zwischen } c_1 \textit{ und } c_2 = \textit{Winkel zwischen } \widetilde{c}_1 \textit{ und } \widetilde{c}_2$$

(Bild 15).

Beweis. o.V.d.A. nehmen wir an, daß

$$z_0 = c_1(t_0) = c_2(t_0).$$

Der Vektor $\dot{c}_1(t)$ (bzw. $\dot{c}_2(t)$) ist proportional zu dem Tangentialvektor an der Kurve c_1 (bzw. c_2) an der Stelle $c_1(t)$ (bzw. $c_2(t)$). Es gilt:

$$\dot{\widetilde{c}}(t) = f'\big(c(t)\big)\dot{c}(t)$$

oder, in Matrizenschreibweise:

$$\Big[\dot{\widetilde{c}}_1(t)\dot{\widetilde{c}}_2(t)\Big] = \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right] . \big[\dot{c}_1(t)\dot{c}_2(t)\big]$$

Aber dies ist die Matrix einer Drehstreckung - daraus folgt, daß der Winkel konstant ist.
Für den Punkt t_0, an dem $c_1(t_0) = c_2(t_0) = z_0$ gilt daher, daß der Winkel zwischen c_1 und c_2 gleich dem zwischen $\widetilde{c}_1$ und $\widetilde{c}_2$ im Punkt $f(z_0)$ ist.

Umgekehrt gilt: Falls $f = u + iv$ ein glatter Diffeomorphismus von U auf V (beide offene Teilmengen in $\mathbf{R}^2$), sodaß f winkeltreu ist, dann ist f entweder

a) analytisch (falls orientierungserhaltend), oder

b) der Gestalt $z \to \overline{g}(z)$ (wobei g analytisch) (falls nicht orientierungserhaltend).

■

Beweisskizze: (für orientierungserhaltende Abbildungen) Wir verwenden die Tatsache, daß die einzigen winkeltreuen und orientierungserhaltenden linearen Abbildungen auf $\mathbf{R}^2$ die Drehstreckungen sind. Diese haben Matrizen der Gestalt

$$[ab - ba] \quad (a^2 + b^2 \neq 0)$$

Es folgt aus den Voraussetzungen, daß die Jacobi Matrix des Vektorfeldes (u, v) immer diese Gestalt hat. Das bedeutet aber, daß u und v die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen erfüllen.

Anwendung: Betrachte eine Familie von Kurven, die Equipotentiale bzgl. eines Skalarfeldes u auf $\mathbf{R}^2$ sind. Falls u harmonisch (d.h. das Feld ist konservativ), dann existiert ein harmonisch konjugiertes v zu u (d.h. so, daß $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analytisch ist, wobei wir $\mathbf{C}$ mit $\mathbf{R}^2$ identifizieren). Falls das Vektorfeld $X = (u, v)$ so ist, daß $f'(z) \neq 0$ ($z \in \mathbf{C}$), dann ist f lokal konform. Insbesondere bilden die Urbilder der Koordinatenlinien (d.h. die Kurven $\big\{(x, y)\big\} \in \mathbf{R}^2 : u(x, y) = c\big\}$ bzw. $\big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : v(x, y) = d\big\}$) zwei orthogonale einparametrige Kurvenscharen.

Beispiele.

1. $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$
   $v(x, y) = 3x^2y - y^3$ (entspricht der Funktion $z \mapsto z^3$)

2. $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$
   $v(x, y) = \frac{-y}{z^2+y^2}$ (entspricht der Funktion $z \mapsto \frac{1}{z}$).

3. $u(x,y) = \sin x \cosh\, y$
   $v(x,y) = \cos x \sin hy$ (entspricht der Funktion $z \mapsto \sin z$).

Die Bilder der Koordinatenlinien $x = c$ bzw. $y = d$ bzgl. letzter Abbildung sind die Kurvenfamilien

$$\frac{u^2}{\sin^2 c} - \frac{v^2}{\cos^2 c} = 1 \qquad \text{(Hyperbeln)}$$

bzw.

$$\frac{u^2}{\cosh^2 d} + \frac{v^2}{\sinh^2 d} = 1 \qquad \text{(Ellipsen)}$$

Um die Wirkung einer konformen Abbildung zu veranschaulichen, ist es oft zweckmäßig, die Bilder bzw. Urbilder der Koordinatenlinien $x = c, y = d$ (bzw. $u = c, v = d$) zu betrachten, d.h. die Kurven

$$\begin{array}{lll} t & \mapsto & \big(u(x_0,t), v(x_0,t)\big) \quad \text{(das Bild von} \quad x = x_0) \\ t & \mapsto & \big(u(t,y_0), v(t,y_0)\big) \quad \text{(das Bild von} \quad y = y_0) \end{array}$$

bzw.

$$\begin{array}{lll} \big\{(x,y) & : & u(x,y) = c\big\} \quad \text{(das Urbild von} \quad u = c) \\ \big\{(x,y) & : & v(x,y) = d\big\} \quad \text{(das Urbild von} \quad v = d) \end{array}$$

Beispiel. $z \mapsto z^2$.

$$\begin{array}{rcl} u(x,y) & = & x^2 - y^2 \\ v(x,y) & = & 2xy. \end{array}$$

d.h. die Urbilder sind die Familien $x^2 - y^2 = c$ bzw. $xy = \frac{d}{2}$ von Hyperbeln. Die Bilder der Koordinationslinien $x = x_0$ bzw. $y = y_0$ bzgl. der Abbildung $z \mapsto z^2$ sind die Parallelen

$$\begin{array}{rl} t & \mapsto (x_0^2 - t^2, 2x_0 t) \\ \text{bzw. } t & \mapsto (t^2 - y_0, 2tx_0) \end{array}$$

Beispiel. $f(z) = \frac{1}{z}$.

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

Der Kreis $|z| = c$ wird auf dem Kreis $|w| = \frac{1}{c}$ abgebildet. Die Geraden $\arg\ z = d$ auf die Gerade $\arg\ z = -d$.

Elementare konforme Abbildungen: Das sind konforme Abbildungen, die mit elementaren Funktionen explizit angegeben werden können, etwa $z \mapsto z^\alpha$, $z \mapsto \ln\ z$, $z \mapsto e^z$, Möbiustransformationen.

Beispiele.

1. Möbiustransformationen: Die Transformation

$$T = T_{[abcd]}$$

bildet $H_+ = \{z \in \mathbf{C} : \text{Im } z > 0\}$ auf $U = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ ab, genau dann, wenn T die Gestalt

$$T : z \mapsto e^{i\vartheta} \frac{z - z_1}{z - \overline{z}_1} \quad (\vartheta \in \mathbf{R},\ \text{Im } z_1 > 0)$$

hat (Bild 16).

T bildet U auf U ab $\Leftrightarrow T : z \mapsto e^{i\vartheta} \frac{z-z_0}{\overline{z}_0 z - 1}$ wobei $|z_0| < 1$. (Diese Abbildung bildet 0 in z_0 ab.)

$T : z \mapsto k\frac{z-a}{z-b}$ führt a in 0, b in ∞ über. Die Urbilder der Geraden: arg $w = c$ sind Kreise durch a, b. Die Urbilder der Kreise $w = \rho$ sind ebenfalls Kreise (die zur obigen Schar orthogonal sind). Das sind die Kreise von Apollonius, mit Gleichungen

$$\left| \frac{z - a}{z - b} \right| = \text{konst.}$$

(Diese zwei Kreisscharen bilden das sogenannte STEINER'sche Netzwerk).

2. $z \mapsto z^\alpha$:

   $z \mapsto z^2$ bildet $\left\{z : \arg(z) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\right\}$ auf $\left\{z : \arg(z) \in]-\pi, \pi[\right\}$ ab.

   $z \to z^\alpha$ bildet die Geraden $arg\ z = c$ auf die Gerade arg $w = \alpha c$, bzw. die Kreise $|z| = d$ auf den Kreis $|w| = d^\alpha$ ab. (Bild 17).

3. $z \mapsto \exp\ z$ bildet $\left\{z : \text{Im}(z) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right\}$ auf $\mathbf{C}\backslash\{0\}$ bzw. $\left\{z : |y| < \frac{\pi}{2}\right\}$ auf $\{w : \text{Re } w > 0\}$ ab. (Bild 18).

   Durch die Zusammensetzung solcher Abbildungen bekommt man kompliziertere konforme Abbildungen, z.B.

   $z \mapsto w = e^z$ bildet $\left\{z : |y| < \frac{\pi}{2}\right\}$ auf $\{w : \text{Re } w > 0\}$ ab.

   $w \mapsto \zeta = \frac{1-w}{1+w}$ bildet $\{w : \text{Re } w > 0\}$ auf $U = \left\{\zeta : |\zeta| < 1\right\}$ ab.

   Also $z \mapsto \frac{1-e^z}{1+e^z}$ bildet $\left\{z : |\text{Im } z| < \frac{\pi}{2}\right\}$ auf U ab. (Bild 19)

   Beispiel: Die Möbiustransformation $w_1 = \frac{z+1}{z-1}$ bildet $U_1 = \mathbf{C} \setminus [-1, 1]$ auf $U_2 = \mathbf{C}\big(]-\infty, 0] \cup \{1\}\big)$ ab, $w_2 = \sqrt{w_1}$ bildet U_2 auf $U_3 = \{z \in \mathbf{C}\colon \text{Re } z > 0\} \setminus \{1\}$ ab, $w_3 = \frac{w_2-1}{w_2+1}$ bildet U_3 auf $U_4 = \left\{z \in \mathbf{C}\colon 0c|z| < 1\right\}$ ab. Damit bildet die Zusammensetzeung $z \to w_3$ U_1 auf U_4 ab. (Bild 20)

   (Es gilt: $z = \frac{1}{2}\left(w_3 + \frac{1}{w_3}\right)$ bzw. $w_3 : z - \sqrt{z^2 - 1}$, wie man leicht nachrechnet).

   Die Urbilder der Kreise $|w_3| = r$ sind die Ellipsen

$$\frac{x^2}{\left[\frac{1}{2}(r + r^{-1})\right]^2} + \frac{y^2}{\left[\frac{1}{2}(r - r^{-1})\right]^2} = 1$$

und die Urbilder der Geraden arg $w_3 = \vartheta$ sind die Hyperbeläste

$$\frac{x^2}{\cos^2\vartheta} - \frac{y^2}{\sin^2\vartheta} = 1.$$

6.1 Harmonische Funktionen - das Dirichlet Problem

Eine wichtige Eigenschaft von analytischen Abbildungen ist, daß sie Lösungen der Laplace'schen Gleichung $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = 0$ in ebensolche überführen, d.h. u harmonisch, g analytisch $\Rightarrow u \circ g$ harmonisch.

Beweisskizze: Sei $u : U \to \mathbf{R}$ harmonisch, $g : V \to U$ analytisch. Sei v eine harmonische Konjugierte zu u, f die analytische Funktion $u + iv$. $f \circ g$ ist analytisch und daher ist $u \circ g =$ Re $f \circ g$ harmonisch.

Das Dirichlet'sche Problem: Seien ein Gebiet G in $\mathbf{C}$ und eine stetige reelle Funktion g auf dem Rand ∂G gegeben. Bestimme f in G, sodaß f stetig auf $\overline{G}$, $\Delta f = 0$ auf G und $f = g$ auf ∂G.

Das Neumann'sche Problem: Seien ein Gebiet G in $\mathbf{C}$ und eine stetige reelle Funktion g auf ∂G ist gegeben. Bestimme f in G, sodaß f stetig auf $\overline{G}$, $\Delta f = 0$ auf G und $\frac{\partial f}{\partial n} = g$ auf ∂G. (Bild 21).

Methode: Man bestimmt eine konforme Abbildung ϕ, die G auf $U = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ und ∂G auf ∂U abbildet. Man löst dann das entsprechende Dirichlet'sche oder Neumann'sche Problem für U bezüglich der Funktion $g \circ \phi^{-1}$. Falls f dessen Lösung ist, dann ist $f \circ \phi$ die gesuchte Lösung für G. (Nach dem Riemann'schen Abbildungssatz existiert eine solche konforme Abbildung für jedes einfach-zusammenhängende Gebiet G mit $\partial G \neq \emptyset$).

Um das Dirichlet'sche Problem für $U = \{z : |z| < 1\}$ zu lösen, gehen wir folgendermaßen vor. Sei u die gesuchte Lösung und v eine konjugierte Funktion zu u (sodaß $f = u + iv$ analytisch ist). Die Funktion f hat eine Taylorentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Am Rand ∂U gilt: $z = e^{i\vartheta}$ - also

$$\begin{aligned} f(e^{i\vartheta}) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\vartheta} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (b_n + ic_n)(\cos n\vartheta + i \sin n\vartheta) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (b_n \cos n\vartheta - c_n \sin n\vartheta) + i \sum_{n=0}^{\infty} (c_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta), \end{aligned}$$

wobei $a_n = b_n + ic_n$. Dies führt zu folgendem Lösungsansatz: Sei h die Randfunktion. Wir entwickeln h in eine Fourierreihe

$$h(e^{i\vartheta}) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\vartheta + B_n \sin n\vartheta).$$

Die Koeffizienten b_n und c_n (und daher a_n) werden mit Hilfe des Koeffizientenvergleichs bestimmt, also

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{1}{2}A_0 \\ b_n &= A_n \ (n \geq 1) \\ c_n &= -B_n \ (n \geq 1) \\ a_n &= b_n + ic_n. \end{aligned}$$

Die Lösung des Dirichlet Problems ist dann $u = \operatorname{Re} f$, wobei f die analytische Funktion $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ist. Diese Lösung läßt sich schreiben als:

$$\begin{aligned} u(re^{i\vartheta}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\vartheta - t)h(e^{it})dt \\ &= \operatorname{Re}\frac{1}{2\pi}\int \frac{e^{it} + r.e^{i\vartheta}}{e^{it} - r.e^{i\vartheta}} h(e^{it})dt, \end{aligned}$$

wobei

$$P_r(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} r^{|n|}e^{int} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(r^n e^{int} + r^n e^{-int})$$

d.h.

$$P_r(t) = \operatorname{Re}\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}.$$

Damit haben wir die wesentlichen Beweisschritte für folgenden Satz geliefert.

Satz 6.19 *Sei g stetig auf ∂U. Dann ist die Lösung des Dirichlet'schen Problems $\Delta u = 0$ auf U, $u = g$ auf ∂U durch folgende Integralformel gegeben:*

$$u(re^{i\vartheta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{it})\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta - t) + r^2}dt.$$

6.2 Anwendung auf Flüßigkeitsströmungen

Wir betrachten ein zwei-dimensionales Vektorfeld

$$F\colon (x,y) \mapsto \big(u(x,y), v(x,y)\big)$$

auf einer offenen Teilmenge U von $\mathbf{R}^2$.
F ist das Geschwindigkeitsfeld einer Flüßigkeit.

Wir nehmen an:

a) daß das Feld von einem Potential Φ stammt, d.h. Φ ist eine glatte Funktion von U in $\mathbf{R}$ und

$$u = \partial\Phi\overline{\partial}x, \quad v = \partial\Phi\overline{\partial}y$$

(physikalisch: der Fluß ist rotationsfrei, d.h. $\int_c u\,dx + v\,dy = 0$ für jede geschlossene Kurve c. Denn

$$\int_c u\,dx + v\,dy = \int_c \partial\Phi\overline{\partial}xdx + \partial\Phi\overline{\partial}ydy$$

$$\begin{aligned} &= \int_S \Big(-\partial\Phi\overline{\partial}y\partial x + \partial\Phi\overline{\partial}x\partial y \Big) dx\,dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

nach dem Satz von Green (S ist das von c umgeschlossenes Gebiet).

Nehmen wir weiter an, daß die Strömung inkompressibel ist, dann gilt:

$$\partial u\overline{\partial}x + \partial v\overline{\partial}y = 0$$

(Denn $\int_c (F|n)\,ds = \int_c u\,dy - v\,dx = \int_S \Big(\partial u\overline{\partial}x + \partial v\overline{\partial}y\Big) dx\,dy$ für jede geschlossene Kurve.)

Dies bedeutet, daß die skalare Funktion Φ harmonisch, d.h. denn

$$\partial^2\phi\overline{\partial}x^2 + \partial^2\phi\overline{\partial}y^2 = \partial u\overline{\partial}x + \partial v\overline{\partial}y = 0$$

Es existiert damit (mindestens lokal) eine harmonisch-konjugierte Funktion Ψ, sodaß

$$\Omega(z) = \Phi + i\Psi$$

analytisch ist.

Ω ist das **komplexe Potential** der Strömung, $\overline{\Omega'(z)} = u + iv$ ist die **komplexe Geschwindigkeit**.

Die Neveaulinien

$$S_\beta = \Big\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \colon \Psi(x,y) = \beta \Big\}$$

sind die **Stromlinien**. Sie sind orthogonal zu den Equiponentiallinien:

$$E_\alpha = \Big\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \colon \Phi(x,y) = \alpha \Big\}$$

Beispiele.

1. $\Phi(x,y) = x$. In diesem Fall gilt

   $$u = 1 \quad v = 0 \quad \Psi(x,y) = y \quad \Omega(z) = z.$$

   (Vgl. Bild 22).

2. $\Omega(z) = \Big(z + 1\overline{z}\Big)$

   $\Phi = \Big(r + 1\overline{r}\Big)\cos\vartheta, \Psi = \Big(r - 1\overline{r}\Big)\sin\vartheta$ (wobei $z = vc^{i\vartheta'}$).

   Stromlinien: $\Big(r - 1\overline{r}\Big)\sin\vartheta = \beta$

   Equipotentiallinien: $\Big(r + 1\overline{r}\Big)\cos\vartheta = \alpha$

   $\Omega'(z) = 1 - 1\overline{z}^2$

   $v = \overline{\Omega'(z)} = \Big(1 - 1\overline{r}^2\cos 2\vartheta\Big) - i\Big(1\overline{r}^2\sin 2\vartheta\Big) \quad (\sim 1$ für r groß

   $|v| = \sqrt{1 - 2\cos 2\vartheta\overline{r}^2 + 1\overline{r}^4}$

   (Diese Situation beschreibt den Fluß um das Hindernis $|z| \leq 1$).

Der Zusammenhang mit konformen Abbildungen: Die konforme Abbildung

$$\omega = z + 1\overline{z}$$

bildet $U = \{\omega\colon \operatorname{Im}\omega > 1\}$ auf $U_1 = \big\{z : \Re z > 1 \text{ und } |z| > 1\big\}$. Falls Ω ein komplexes Potential für U ist, dann ist Ω_1 ein Potential für U_1 wobei

$$\Omega(\omega) = \Omega_1(z).$$

Mit Hilfe dieser Tatsachen, kann man konforme Abbildungen verwenden, um die Beschreibung der Strömung um ein kompliziertes Hindernis zu vereinfachen.

Im allgemeinen such man ein Potential der Gestalt

$$\Omega(z) = V_0 z + g(z)$$

auf der Menge $U = \mathbf{C} \setminus K$ (wobei K das Hindernis ist, d.h. eine kompakte Teilmenge von $\mathbf{C}$). V_0 ist eine Konstante und G erfüllt die Wachstumsbedingung

$$\lim_{|z|\mapsto\infty} G(z) = 0$$

(d.h. der Fluß ist konstant (und parallel zur x-Achse), außer in der Nähe des Hindernisses).

Es gilt dann:

Satz 6.20 *Sei $U_1 = \mathbf{C}\setminus K_1, U_2 = \mathbf{C}\setminus K_2$ wobei K_1, K_2 kompakte Teilmengen von $\mathbf{C}$ mit Kurven c_1 und c_2 als Rändern sind.*
Sei $f\colon \overline{U_1} \to \overline{U_2}$ eine bijektive Abbildung, die U_1 konform auf U_2 abbildet und c_1 in c_2 überführt.
Falls $\Omega\colon \bar{U_2} \to \mathbf{C}$ ein komplexes Potential auf U_2 ist, dann ist $\Omega \circ f$ ein komplexes Potential auf U_1.
Außerdem gilt:

a) falls Im (Ω) auf c_2 konstant ist, dann ist Im $(\Omega \circ f)$ auf c_1 konstant;

b) falls Ω die Gestalt $V_0 z + G(z)$ mit $\lim_{|z|\mapsto\infty} G'(z) = 0$ hat, dann hat $\Omega \circ f$ die Gestalt $W_0 z + H(z)$ wobei $\lim_{|z|\mapsto\infty}$

7 Variationsprinzipien zur Lösung des Dirichlet Problems

7.1 Transformation von Differentialoperatoren und Integralen unter konformen Abbildungen

Seien $D, U \subseteq \mathbf{C}$ Gebiete $f : D \to U$ analytisch und bijektiv.
Sei $\phi : D \to \mathbf{R}, z \to \phi(z)$ differenzierbar. Dann ist $\psi : U \to \mathbf{R}, w \to \phi(f^{-1}(w))$ differenzierbar. In den folgenden Sätzen studieren wir die Auswirkungen dieser Transformation auf die wichtigsten Differentialoperatoren und Integrale der komplexen Analysis. Wir werden festellen, daß der Laplace Operator im wesentlichen invariant bleibt.

Satz 7.1

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\phi|_{z_0} = \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}|_{f(z_0)}\overline{f'(z)}$$

$$\Delta\phi|_{z_0} = \Delta\psi|_{f(z_0)}|f'(z)|^2 \qquad \textit{für jedes } z_0 \in D.$$

Beweis.

$$\phi(z) = \phi(x,y) = \psi(u(x,y), v(x,y)).$$

Somit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial x}|_{z_0} &= \frac{\partial \psi}{\partial x}|_{f(z_0)}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}|_{f(z_0)}\frac{\partial v}{\partial x}|_{z_0} \\
\frac{\partial \phi}{\partial y}|_{z_0} &= \frac{\partial \psi}{\partial x}|_{f(z_0)}\frac{\partial u}{\partial y}|_{z_0} + \frac{\partial \psi}{\partial y}|_{f(z_0)}\frac{\partial v}{\partial y}|_{z_0}.
\end{aligned}$$

Mit CR Differentialgleichung folgt weiters:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}|_{z_0} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}|_{f(z_0)}\frac{\partial v}{\partial x}|_{z_0} + \frac{\partial \psi}{\partial x}|_{f(z_0)}\frac{\partial u}{\partial x}|_{z_0}.$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}|_{z_0} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)|_{f(z_0)}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial y}\right)|_{z_0} \\
&= \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}|_{f(z_0)}\overline{f'(z_0)}.
\end{aligned}$$

Die Aussage für den Laplaceoperator wurde bereits in den Übungen nachgerechnet.

■

Satz 7.2

$$\int_D \phi(z)\,dxdy = \int_U \psi(w)|(f^{-1})'(w)|^2 dudv, \quad w = u + iv.$$

Beweis. $f^{-1}: U \to D \quad w \to f^{-1}(w)$ für die Jakobideterminante gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} &:= \det\begin{bmatrix}\frac{\partial \Re f^{-1}}{\partial u}(w) & \frac{\partial \Re f^{-1}}{\partial v}(w)\\ \frac{\partial \Im f^{-1}}{\partial u}(w) & \frac{\partial \Im f^{-1}}{\partial v}(w)\end{bmatrix}\\ &= \frac{\partial \Re f^{-1}}{\partial u}\frac{\partial \Im f^{-1}}{\partial v} - \frac{\partial \Im f^{-1}}{\partial u}\frac{\partial \Re f^{-1}}{\partial v}\\ &= \left(\frac{\partial \Re f^{-1}}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Im f^{-1}}{\partial u}\right)^2 = |[f^{-1}]'|^2.\end{aligned}$$

Die vorletzte Gleichung ist wiederum eine Folge der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für die analytische Funktion f^{-1}.

Da für Flächenintegrale die Substitutionsregel

$$\iint_U \psi(w)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(w)dudv = \int_D \phi(z)\,dxdy$$

gilt, folgt die Behauptung.

■

Satz 7.3 (Konforme Invarianz des Dirichlet Integrals)

$$\int_U |\operatorname{grad}\phi(w)|^2 dudv = \int_D |\operatorname{grad}\psi(z)|^2\,dxdy.$$

Beweis.

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}$$

und die letzten zwei Sätze ergeben die Behauptung.

■

Die obigen Integraltransformationen erlauben uns, den Flächeninhalt von D aus den Taylorkoeffizienten von f^{-1} zu berechnen. Us gilt der folgende wichtige

Satz 7.4 *Us sei*

$$f^{-1}(w) = g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n.$$

Dann gilt:

$$|D| = \pi\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^2 n.$$

Beweis. Setze $\phi = 1$. Damit ist auch $\psi = 1$ und

$$|D| = \iint_D dxdy = \int_U |g'(w)|^2 dudv = \int_0^1 \int_0^{2\pi} |g'|^2 \rho d\rho dp.$$

Für den Integranden gilt unter Verwendung der Potenzreihe für g

$$|g'(\rho e^{i\theta})|^2 = g'(\rho e^{i\theta})\overline{g'(\rho e^{i\theta})} = (b_1 + 2b_2\rho e^{i\theta} + \dots)(\bar{b}_1 + 2\bar{b}_2\rho e^{-i\theta} + \dots).$$

Daraus folgt unter Verwendung der Biorthogonalität der Funktionen

$$\left\{ \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{2\pi}}, n \in \mathbf{N} \right\},$$

daß

$$\int_0^{2\pi} |g'(\rho e^{i\theta})|^2 d\theta = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} b_n \bar{b}_n n^2 \rho^{(2n-2)}.$$

Also erhalten wir

$$|D| = \int_0^1 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} (|b_n|^2 n^2 \rho^{(2n-2)})\rho d\rho = \pi \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 n.$$

■

Lösung des DP's in D mittels konformer Abbildungen

Gegeben: $\varphi_0 : \partial D \to \mathbf{R}$ stetig.
Gesucht: $\phi : D \to \mathbf{R}$, sodaß $\Delta\phi|_D = 0 \bigwedge_{z_0 \in \partial D} \lim_{z \to z_0} \phi(z) = \varphi_0(z)$.

Lösung

1. Transformation der Randwerte

$$\bigwedge_{w \in \partial U} \psi_0(w) = \phi_0(f^{-1}(w))$$

2. Löse das DP in U mit den Methoden aus Kapitel 0 zur Randwertfunktion ψ_0. Urhalte Lösung $\psi : U \to \mathbf{R} : \Delta\psi = 0.\ \psi|_{\partial U} = \psi_0$.

Dann gilt für $\phi : D \to \mathbf{R} \quad z \to \psi(f(z))$

1. $\Delta\phi|_D = 0$
2. $\lim_{z \to z_0} \phi(z) = \psi(f(z_0)) = \psi_0(f(z_0)) = \varphi_0(f^{-1}(f(z_0)) = \varphi(z_0)$

Also ist das RWP in D gelöst.

Die oben diskutierte Lösungsmethode zeigt auf, daß das Auffinden bijektiver analytischer Abbildungen zwischen zwei Grundgebieten D, U von unmittelbarer praktischer Bedeutung ist. Im folgenden Kapitel werden wir uns mit konstruktiven Hilbertraummethoden an dieses Problem heranmachen und effektive Implementierungen diskutieren.

7.2 Das Dirichlet Prinzip

Definition 7.5 *1. $u : D \to \mathbf{R}$ heißt stückweise glatt auf D falls u in D stetig ist und analytische Bogen J in D existieren, sodaß u auf $\Omega \setminus J$ stetig differenzierbar ist.*

2. $D(u) = \iint_D |\nabla u|^2 dxdy$ heißt das Dirichlet Integral von u.

3. $D(u,v) := \iint_D \nabla u \nabla v dxdy$ heißt das Dirichlet-Skalarprodukt von u, v.

Bemerkung. Es gilt

$$\begin{aligned} D(u,v) &\leq \sqrt{D(u)}\sqrt{D(v)} \\ D(u+v) &= D(u) + D(v) + D(u,v). \end{aligned}$$

Das Dirichlet Prinzip stellt einen Zusammenhang zwischen Funktionen mit minimalem Dirichlet Integral einerseits und Lösungen des Dirichlet-Randwertproblems andererseits her.

Satz 7.6 (Dirichlet Prinzip) *Sei $f : \{z : |z| = 1\} \to \mathbf{R}$ stetig. Sei $u : \{z : |z| < 1\} \to \mathbf{R}$ die harmonische Fortsetzung von f (siehe Kapitel 0). Sei $\mathcal{D}_f := \{v : v$ ist stückweise glatt, beschränkt, $\lim_{z\to\zeta} v(z) = f(\zeta)\}$.*
Falls nun

$$\mathcal{D}_f \cap \{v : D(v) < \infty\} \neq \emptyset$$

dann gilt:

a) $D(u) < \infty$ und $D(u) = \inf\{D(v) : v \in \mathcal{D}_f\}$

b) Falls $v \in \mathcal{D}_f$ und $D(v) = D(u)$, dann ist $v = u$.

Bemerkung.

1. Das Dirichletsche Prinzip besagt also daß die harmonische Fortsetzung u das eindeutig bestimmte Element in $\mathcal{D}_f$ ist für welches das Dirichlet Integral minimal wird.

2. Ohne die a-priori Information $\mathcal{D}_f \cap \{v : D(v) < \infty\} \neq \Phi$ ist die Aussage des Satzes NICHT gültig.

Beweis. ad a) Sei

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta},$$

dann gilt mit Kapitel 0

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta}.$$

Sei

$$u_N(re^{i\theta}) := \sum_{n=-N}^{N} a_n r^{|n|} e^{in\theta},$$

und sei $v \in \mathcal{D}_f$, sodaß $D(v) < \infty$ gewählt.

Dann gilt $D(u_N) < \infty$, $D(v - u_N) < \infty$ und aus den Greenschen Identitäten folgt:

$$\begin{aligned} D(u_N, v - u_N) &= \lim_{r \to 1} \int_0^{2\pi} (v - u_N)(re^{i\theta}) \frac{\partial u_N}{\partial r}(re^{i\theta}) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (v - u_N)(e^{i\theta}) \frac{\partial u_N}{\partial r}(e^{i\theta}) d\theta. \end{aligned}$$

Da weiters

$$v(e^{i\theta}) - u_N(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta}) - u_N(e^{i\theta}) = \sum_{|n| \geq N+1} a_n e^{in\theta}$$

und

$$\frac{\partial u_N}{\partial r}(e^{i\theta}) = \sum_{n=-N}^{N} a_n |n| e^{in\theta} - a_0$$

folgt unmittelbar

$$D(u_N, v - u_N) = 0.$$

Da

$$\begin{aligned} D(v) &= D(v - u_N + u_N) \\ &= D(v - u_N) + D(u_N) + D(u_N, v - u_N) \end{aligned}$$

gilt für jedes $N \in \mathbf{N}$ und $v \in \mathcal{D}_f \cap \{v : D(v) < \infty\}$

$$D(u_N) \leq D(v).$$

Aus der punktweisen Beziehung

$$\lim_{N \to \infty} |\nabla(u_N)(e^{i\theta})| = |\nabla u(e^{i\theta})|$$

folgt mit dem Lemma von Fatou

$$D(u) \leq \liminf D(u_N) \leq D(v).$$

Das heißt u hat minimales Dirichlet Integral.
ad b) Es gilt

$$\begin{aligned} D(u) &= \pi \sum_{-\infty}^{\infty} |n||a_n|^2 \\ D(u_N) &= \pi \sum_{-N}^{N} |n||a_n|^2. \end{aligned}$$

Da mit Teil a) $D(u) < \infty$ folgt

$$D(u - u_N) = \sum_{|n| > N} |n||a_n|^2 \to 0, \text{ für } N \to \infty.$$

Und somit gilt für jedes $v \in \mathcal{D}_f \cap \{v : D(v) < \infty\}$

$$D(u, v - u) = \lim_{N \to \infty} D(u_N, v - u_N) = 0$$

und

$$D(v) = D(u) + D(v-u).$$

Falls nun

$$D(v) = D(u),$$

so gilt $D(v-u) = 0$ und $v - u = \text{const}$ in $\{z : |z| < 1\}$.
Aus der Randwertbedingung

$$\text{const} = \lim_{z \to e^{i\theta}} \{v(z) - u(z)\} = f(e^{i\theta}) - f(e^{i\theta}) = 0$$

folgt

$$v - u = 0 \text{ in } \{z : |z| < 1\}.$$

Also ist Eindeutigkeit gezeigt.

∎

Bemerkung. Die Funktion

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} e^{2^k i\theta}$$

ist stetig auf $\{|z| = 1\}$. Daher besitzt das Dirichlet Problem zur Randwertfunktion f eine Lösung $u : \{|z| < 1\} \to \mathbf{R}$ aber für das Dirichlet Integral gilt

$$D(u) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{k^4} = \infty.$$

Somit folgt aus dem Beweis von Teil a) daß notwendigerweise

$$D_f \cap \{v : D(v) < \infty\} \neq \emptyset.$$

Das heißt, daß in diesem Fall das Variationsproblem keinen Aufschluß über das Dirichlet Problem gibt.

Da sowohl das Dirichlet Integral als auch harmonische Funktionen konforme Invarianten sind, gilt automatisch folgender

Satz 7.7 *Sei $\varphi : \{|z| < 1\} \to \Omega$ analytisch und bijektiv. Sei $f : \partial\Omega \to \mathbf{R}$ stetig. Sei $\mathcal{C}_f = \{v : \Omega \to \mathbf{R}$ stückweise glatt $\lim_{z \to \partial\Omega} v = f\}$.*
Sei

$$D_\Omega(v) := \int\!\!\int_\Omega |\nabla v|^2(x,y)\,dxdy.$$

Falls

$$\mathcal{C}_f \cap \{v : D_\Omega(v) < \infty\} \neq 0,$$

dann ist die Lösung des Dirichlet Problems in Ω zur Randwertfunktion f jene eindeutig bestimmte Funktion $u : \Omega \to \mathbf{R}$ für die gilt:

$$D_\Omega(u) = \inf\{D_\Omega(v) : v \in \mathcal{C}_f\}.$$

Bemerkung. Im nächsten Kapitel werden wir zeigen, daß jede einfachzusammenhängende Menge Ω mit mehr als zwei Randpunkten konformes Bild der Menge $\{|z| < 1\}$ ist.

8 Explizite Konstruktion Greenscher Funktionen und Bergmanscher Kerne

8.1 Die Greensche Funktion und die Riemannsche Abbildung

Der Beweis der Existenz Greenscher Funktionen für glatt berandete Grundgebiete folgte in Analysis III (als reiner Existenzbeweis) aus dem Satz von Hahn–Banach. Hier werden wir eine konstruktive Darstellung — basierend auf einem Biorthogonalisierungsverfahren, angewandt auf die Funktionen $1, z, z^2, \ldots$ ableiten.
Wir beginnen wiederum – gewissermaßen als Katalysator – mit einem Existenzsatz und geben dann die Konstruktion der Greenfunktion explizit an.

Satz 8.1 (Riemannscher Abbildungssatz). *Sei $D \subseteq \mathbf{C}$ ein einfach zusammenhängendes Grundgebiet, sodaß ∂D (– der Rand von D) mindestens zwei Randpunkte besitze. Dann existiert eine bijektive, analytische Abbildug*

$$f : D \to \{z : |z| < 1\}.$$

Sei $\zeta \in D$ beliebig. Dann ist mit der Bedingung $f(\zeta) = 0$ $f'(\zeta) > \rho$ die Abbildung f eindeutig bestimmt.

Satz 8.2 (Randzuordnung konformer Abbildungen)
Seien D, D^* durch stetige Kurven Γ, Γ^* berandet. Sei $F : D \to D^*$ analytisch und bijektiv. Dann existiert eine eindeutig bestimmte stetige und bijektive Fortsetzung der Abbildung $\tilde{f} : D \cup \Gamma \to D^* \cup \Gamma^*$.

Satz 8.3 *Sei $D \in \mathbf{C}$ einfachzusammenhängend und stückweise glatt berandet. Sei $F(\cdot, \zeta) : D \to |z : |z| < 1\}$ analytisch und bijektiv, sodaß $F(\zeta, \zeta) = 0$. Dann gilt für die Greenfunktionen des Bereiches D im Punkt ζ:*

$$\bigwedge_{z \in D} g(z, \zeta) = -\log |F(z, \zeta)|.$$

Beweis. Für jede Umgebung W von ζ gilt $p(\cdot, \zeta) : D \setminus W \to \mathbf{C}$ $z \to \log F(z, \zeta)$ ist analytisch. Es existiert eine Umgebung U von ζ, und eine Potenzreihendarstellung von F

$$\bigwedge_{z \in U} F(z, \zeta) = a_1(z - \zeta) + a_2(z - \zeta)^2 + \ldots \quad a_1 \neq 0.$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned} p(z, \zeta) &= -\log a_1(z - \zeta)[1 + a_2(z - \zeta) + \ldots] \\ &= -\log(z - \zeta) - \log a_1 + \frac{a_2}{a_1} + b_2(z - \zeta)^2 + \ldots \\ &= -\log(z - \zeta) + p_1(z, \zeta), \end{aligned}$$

wobei $p_1(z, \zeta)$ in einer Umgebung U von ζ analytisch ist.
Da $\Re p(z, \zeta) = -\log |F(z, \zeta)|$ gilt:

$$-\log |F(z, \zeta)| = \begin{cases} -\log |z - \zeta| + \Re p_1(z, \zeta) & \text{für } z \in U \\ -\log |z - \zeta| + \{\log(z - \zeta) - \log |F(z, \zeta)|\} & \text{für } z \in D \setminus U \end{cases}.$$

Da $\Re p_1(z,\zeta)$ in $z \in U$ harmonisch ist und $\{\log(z-\zeta) - \log|F(z,\zeta)|\}$ in $D \setminus W$ (für **jede** Umgebung W) harmonsich ist und da

$$\lim_{z \to \Gamma} |F(z,\zeta)| = 1 \Rightarrow \lim_{z \to \Gamma} - \log|F(z,\zeta)| = 0$$

erfüllt die Funktion

$$D \to \mathbf{R} \to z \to -\log|F(z,\zeta)|$$

die definitorischen Eigenschaften der Greenschen Funktion.

∎

Kann man also für $F(z,\zeta)$ eine explizite Darstellung geben, so kennt man auch $g(z,\zeta)$ explizit. Diese Darstellung der Riemannschen Abbildung wird im nächsten Paragraphen erzielt.

8.2 Der Bergmansche Kern

Folgerungen aus den Greenschen Identitäten

Sei D ein glattberandetes (nicht notwendigerweise einfachzusammenhängendes) Gebiet und C sei die positiv orientierte Randkurve. In den Übungen wurde gezeigt, daß aus dem Satz von Gauß die folgende Identität ableitbar ist.

$$\iint_D \frac{\partial r}{\partial \bar{z}}(z) dxdy = \frac{1}{2i} \int_C r(z)dz, \quad r \in C^1(D \cup C).$$

Da weiters

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(pq) = p\frac{\partial q}{\partial \bar{z}} + q\frac{\partial p}{\partial \bar{z}}, \quad p,q \in C^1(D \cup C)$$

folgt daraus

$$\iint_D p\frac{\partial q}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2i}\int_C pqdz - \iint_D q\frac{\partial p}{\partial \bar{z}} dxdy$$

$$\iint_D p\frac{\partial q}{\partial z} dxdy = -\frac{1}{2i}\int_C pq(dx - idy) - \iint_D q\frac{\partial p}{\partial z} dxdy.$$

Seien f,g in D analytisch und $f,g \in C^1(D \cup C)$. Dann gilt

$$\frac{\partial \bar{g}(z)}{\partial \bar{z}} = \overline{g'(z)} \text{ und } \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0.$$

Somit erhalten wir die folgende wichtige Identität

$$\iint_D f(z)\overline{g'(z)} dxdy = \frac{1}{2i}\int_C f(z)\overline{y(z)} dz.$$

Definition 8.4 *1.* $B^2(D) = \{f : f : D \to \mathbf{C}$ *analytisch*

$$\iint_D |f(z)|^2 dxdy < \infty\}$$

2. $||f|| := \iint_D |f|^2(z)dxdy \quad f \in B^2(D)$

3. $(f|g) := (\iint_D f(z)\bar{y}(z)dxdy)^{1/2} \qquad f,g \in B^2(D).$

Mit dieser Defnition ist also $(B^2(D), (\cdot,\cdot))$ ein komplexer Prähilbertraum (Siehe Analysis III). Darüberhinaus bemerken wir, daß $B^2(D)$ überdies vollstädig ist, also ist $B^2(D)$ ein Hilbertraum. In den nächsten beiden Sätzen zeigen wir, wie man aus der Riemannschen Abbildung eine Biorthogonalbasis für den Hilbertraum $B^2(D)$ konstruiert. Wir beginnen mit folgender einfacher Überlegung.

Satz 8.5 *Sei $D := \{z : |z| < 1\}$. Dann gilt*

$$\left(v_n : D \to \mathbf{C}, z \to z^n \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \right)$$

ist ein vollständiges Biorthonormalsystem in Hilbertraum $B^2(D)$.

Beweis. Sei $f \in B^2(D)$. Dann ist f als Potenzreihe darstellbar:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

und diese konvergiert gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von D. Aus der oben erhaltenen Identität folgt:

$$\begin{aligned} (z^n, z^m) &= \iint_{|z|<1} z^n \overline{z^m} dxdy = \frac{1}{2i(m+1)} \int_{|z|=1} z^n \overline{z^{m+1}} dz \\ &= \frac{i}{2i(m+1)} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m\theta)} d\theta = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi/(m+1) & m = n. \end{cases} \end{aligned}$$

Also ist $\{v_m\}$ biorthonormal.
Wir berechnen nun die Fourierkoeffizienten $\{a_n\}$ von $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$

$$a_n = (f, v_n) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \iint_{|z|<1} f(z)\bar{z}^n dxdy = \lim_{\rho\to 1} \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \iint_{|z|<\rho} f(z)\bar{z}^n dxdy$$

Wir verwenden wiederum die obige Identität und erhalten

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2i(n+1)} \lim_{\rho\to 1} \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \iint_{|z|=\rho} f(z)\bar{z}^{n+1} dz \\ &= \lim_{\rho\to 1} \frac{1}{\sqrt{\pi(n+1)}} \frac{\rho^{2n+2}}{2i} \iint_{|z|=\rho} f(z) \frac{1}{z^{n+1}} dz \\ &= \lim_{\rho\to 1} \frac{1}{\sqrt{\pi(n+1)}} \pi \rho^{2n+2} b_n = \sqrt{\frac{\pi}{n+1}} b_n. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|^2}{n+1}.$$

Andererseits

$$\iint_{|z|<1} |f(z)|^2 dxdy = \int_0^1 \rho \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^2 d\theta \;=\; 2\pi \int_0^1 \rho \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 \rho^{2n}$$
$$= \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|b_n|^2}{n+1}.$$

Also gilt für jedes $f \in B^2(D)$

$$\sum |a_n|^2 = ||f||_{B^2(D)} \quad \forall \in B^2(D).$$

■

Satz 8.6 *Sei D einfachzusammenhängend mit mindestens zwei Randpunkten. Sei $w : D \to U = \{z : |z| < 1\}$ durch den Riemannschen Abbildungssatz gegeben. Dann gilt*

$$\varphi_n : D \to \mathbf{C}, \quad z \to \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}[w(z)]^n w'(z)$$

ist in $B^2(D)$ ein vollständiges Biorthonormalsystem.

Beweis. **1. Biorthogonalität:**

$$\begin{aligned}
(\varphi_n, \varphi_m) &= \iint_D \varphi_n(z)\overline{\varphi_m(z)} dxdy = \frac{n+1}{\pi} \iint_D w^n(x,y)\bar{w}^n(x,y)|w'(x,y)|^2 dxdy \\
&= \frac{n+1}{\pi} \int \frac{|\zeta| < 1}{\zeta = \zeta + i\eta} \zeta^n \bar{\zeta}^m d\eta d\xi \\
&= \begin{cases} 0 & m = n \\ 1 & m \neq n. \end{cases}
\end{aligned}$$

Die vorletzte Gleichung gilt, weil für $w(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ die Jakobimatrix der Abbildung $([u(x,y), v(x,y)] \to (x,y))$ gegeben ist durch $|w'(x,y)|^{-2}$.

2. Vollständigkeit:

Sei $p : U \to D : \zeta \to w^{-1}(\zeta)$. Sei $f \in B^2(D)$ gegeben. Dann ist $(g : U \to \mathbf{C},\ \zeta \to p'(\zeta) f(p(\zeta)))$ in $B^2(U)$.
Somit existieren zu gegebenen $\epsilon > 0$, $m \in \mathbf{N}$, $c_1, \ldots, c_m \in \mathbf{C}$, sodaß

$$\iint_{|\zeta|<1} \left| g(\zeta) - \sum^m c_\nu \zeta^\nu \right|^2 dudv \leq \epsilon \qquad \zeta = u + iv.$$

$$\frac{n+1}{\pi} \iint_{|\zeta|<1} \xi^n \bar{\xi}^m d\eta d\xi.$$

Mit Variablentransformation folgt

$$\iint_D \left| p'(w(z)) f(z) - \sum c_\nu w(z)^\nu \right| |w'(z)| dxdy < \epsilon.$$

Da $p'(w(z))w'(z) = 1$ gilt mit Definition von φ_n:

$$\iint \left| f(z) - \sum c_\nu^1 \varphi_\nu(z) \right|^2 \leq \epsilon,$$

wobei

$$c_\nu^1 = \sqrt{\frac{\pi}{\nu+1}} c_\nu.$$

Also ist $\{\varphi_\nu : \nu \in \mathbf{N}\}$ vollständig in $B^2(D)$.

∎

Ohne Beweis wollen wir die folgende Extremaleigenschaft verwenden. Der Beweis verlangt eine geschickte Verknüpfung des Satzes von Arzela-Ascoli mit den Cauchyschen Ungleichungen.

Satz 8.7 *Für jedes $M \in \mathbf{R}^+$ und $\zeta \in D$ existiert $f_0 \in B^2(D)$, sodaß $f_0(\zeta) = 1$ und für jedes $f \in B^2(D)$ mit $f(\zeta) = 1$ gilt $||f_0||_{B^2(D)} \leq ||f||_{B^2(D)}$.*

Satz 8.8 *Sei $\zeta \in D$, sei $f_0 \in B^2(D)$ wie oben und sei $g \in B^2(D)$ mit $g(\zeta) = 0$. Dann gilt*

$$\iint_D g\bar{f}_0 dxdy = 0.$$

Beweis. Sei $\epsilon > 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$ beliebig. Dann definieren wir

$$\bigwedge_{z \in D} f^*(z) := f_0(z) + \epsilon e^{i\theta} g(z).$$

Da $f^*(\zeta) = 1$, gilt $||f^*|| \geq ||f_0|| \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} \bigwedge_\epsilon \bigwedge_\theta \iint_D |f_0|^2 dxdy &\leq \iint_D |f_0 + \epsilon e^{i\theta} u|^2(z) dxdy \\ &= \iint |f_0|^2 dxdy + 2\epsilon \Re \left\{ \iint e^{i\theta} \bar{f}_0 g \right\} + \epsilon^2 \iint_D |g|^2 dxdy. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$2\Re \left\{ e^{i\theta} \iint \bar{f}_0 g dxdy \right\} + \epsilon \iint_D |g| dxdy > 0.$$

Zusammengefaßt gilt also

$$\left(\bigwedge_{\theta \in [0,2\pi]} \Re \left\{ e^{i\theta} \iint \bar{f}_0 g dxdy \right\} > 0 \right) \text{ und somit } \iint_D \bar{f}_0 g dxdy = 0.$$

∎

Satz 8.9 *a) Für jedes $f \in B^2(D)$ und $\zeta \in D$ gilt*

$$\iint \overline{f_0(z)} f(z) dxdy = f(\zeta) \iint \overline{f_0(z)} dxdy.$$

b) Sei $K(z,\zeta) = f_0(z)/||f_0||^2$, dann gilt:

$$\bigwedge_{f \in B^2(D)} \bigwedge_{\zeta \in D} f(\zeta) = \iint_D \overline{K(z,\zeta)} f(z) dxdy$$

c)

$$\iint_D |K(z,\zeta)|^2 \, dxdy = K(\zeta,\zeta).$$

Beweis.

a) Sei $g(z) = f(z) - f(\zeta)$. g erfüllt die Voraussetzungen des obigen Satzes. Also gilt:

$$\iint_D \bar{f}_0(z) g(z) dxdy = 0 \Leftrightarrow \iint_D \overline{f_0(z)} f(z) dxdy = f(\zeta) \iint_D \overline{f_0(z)} dxdy$$

b) Sei $f(z) := f_0(z)$ dann gilt mit a):

$$\iint |f_0(z)|^2 dxdy = \iint \bar{f}_0(z) f(z) dxdy = f_0(\zeta) \iint \bar{f}_0(z) dxdy.$$

Somit und a:

$$\iint_D \bar{f}_0(z) f(z) dxdy = f(\zeta) \iint_D \bar{f}_0(z) dxdy = f(\zeta) \iint |f_0(z)|^2 dxdy$$

$$\Leftrightarrow \iint_D \overline{K(z,\zeta)} f(z) dxdy f(\zeta).$$

ad c): $z \to K(z,\zeta)$ ist in B^2. Somit gilt:

$$K(\zeta,\zeta) = \iint_D \overline{K(z,\zeta)} K(z,\zeta) dxdy.$$

■

Definition 8.10 *$(z \to K(z,\zeta))$ heißt Bergmanfunktion (oder Bergmankern) des Gebietes D im Punkt ζ.*

Satz 8.11 *Die Bergmanfunktion ist eindeutig bestimmt, d.h. $K_1 : D \times D \to \mathbf{C}$ erfülle folgende Bedingungen:*
(i) $\bigwedge_{\zeta \in D} (z \to K_1(z,\zeta))$ *ist in $B^2(D)$.*

Für jedes $\zeta \in D$ und $f \in B^2(D)$ gilt:
(ii)

$$f(\zeta) = \iint_D \overline{K_1(z,\zeta)} f(z) dxdy$$

dann gilt

$$\bigwedge_{z,\zeta \in D} K(z,\zeta) = K_1(z,\zeta).$$

Beweis.

$$\bigwedge_{f\in B^2}\bigwedge_{\zeta\in D} 0 = f(\zeta) - f(\zeta) = \iint_D \{\overline{K_1(z,\zeta) - K(z,\zeta)}\} f(z) dxdy.$$

Wähle nun zu $\zeta \in D$ $f(z) = K_1(z,\zeta) - K(z,\zeta)$. Dann gilt

$$0 = \iint |K_1(z,\zeta) - K(z,\zeta)|^2 dxdy.$$

Somit

$$\bigwedge_{\zeta\in(D)}\bigwedge_{\zeta\in D} K_1(z,\zeta) - K(z,\zeta) = 0.$$

■

Wir bringen nun einen überaschenden Zusammenhang: Die über ein Extremalproblem gewonnene Bergmanfunktion läßt sich durch Biorthogonalsysteme im Hilbertraum $B^2(D)$ darstellen. Darüberhinaus ist diese Darstellung von der Wahl des Biorthogonalsystems unabhängig und so spricht man von einer **kanonischen** Darstellung.

Satz 8.12 (Bergmankern und Biorthonormalsysteme).
Sei $\{v_n : n \in \mathbf{N}\}$ ein vollständiges Biorthonormalsystem in $B^2(D)$. Dann gilt:

1a)

$$\bigwedge_{\zeta\in D} K(\cdot,\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n()\overline{v_n(\zeta)}$$

1b) Die Reihe konvergiert gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von D.

2.

$$\bigwedge_{\zeta\in D} a_n := (K(\cdot,\zeta), v_n) = \overline{v(\zeta)}$$

3.

$$\bigwedge_{\zeta} K(\zeta,\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} |v_n(\zeta)|^2$$

Beweis. ad 2):

$$a_n = \iint_D K(z,\zeta)\overline{v_n(z)}\, dxdy = \overline{\iint_D \overline{K(z,\zeta)} v_n(z)\, dxdy} = \overline{v_n(\zeta)}$$

ad 1): Wir betrachten zunächst folgenden Ansatz:

$$S = K(\eta,\zeta) - \sum^{m} v_n(\eta)\overline{v_n(\zeta)} \qquad \eta \in D, \zeta \in D, m \in \mathbf{N},$$

und führen folgende Abschätzungen durch:

$$
\begin{aligned}
|S|^2 &= \left| \iint_D \overline{K(z,\eta)} \left[K(z,\zeta) - \sum v(z) v_n(\zeta) \right] dxdy \right|^2 \\
&\leq \left(\iint |K(z,\zeta)|^2 \, dxdy \right) \left(\iint |K(z,\zeta) - \sum_{n=1}^{n} v_n(z) v_n \overline{(\zeta)}|^2 \, dxdy \right) \\
&= K(\eta,\eta) \left(\iint_D |K(z,\zeta)|^2 \, dxdy - \iint_D \left| \sum^{m} v_n(z) \overline{v_n(\zeta)} \right|^2 dxdy \right) \\
&= K(\eta,\eta) \left(K(z,z) - \sum_{n=1}^{m} |v_n(\zeta)|^2 \right) \\
&= K(\eta,\eta) \left(\sum_{m+1}^{\infty} |v_n(\zeta)|^2 \right)
\end{aligned}
$$

Somit gilt

$$\bigwedge_{\epsilon>0} \bigvee_{m_0} \bigwedge_{m>m_0} |S| < \epsilon.$$

ad 1 b) Konvergenz ist absolut und gleichmäßig: $\bigwedge_{m>m_0} \bigwedge_{z\in D_1}$

$$
\begin{aligned}
\left| \sum_{m+1}^{\infty} \pm v_n(z) \overline{v_n(\zeta)} \right|^2 &\leq \left(\sum_{m+1}^{\infty} |v_n(z)|^2 \right) \left(\sum_{m+1}^{\infty} |v_n(\zeta)|^2 \right) \\
&\leq \sup_{z\in D_1} K(z,z)\epsilon.
\end{aligned}
$$

∎

Beispiel.

$$\left\{ z^n \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} : n \in \mathbf{N}_0 \right\}$$

ist in $U = \{z : |z| < 1\}$ ein ONS. Somit erhalten wir für den Bergmankern:

$$K_U(z,\zeta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(z,\bar{\zeta})^n = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1+z\zeta)^2}.$$

Der nächste Satz enthält das Hauptergebnis dieses Kapitels. Er identifiziert die Ableitung der Riemannschen Abbildung mit dem Bergmankern. Da man den Bergmankern seinerseits durch Biorthogonalsysteme darstellen kann, erhalten wir einen **konstruktiven** Zugang zur Riemannschen Abbildung aus der man wiederum die Greenfunktion berechnen kann.

Satz 8.13 *Sei D einfachzusammenhängend, sodaß ∂D mehr als zwei Punkte besitzt. Sei $\zeta \in D$ und $f : D \to U$ die Riemannsche Abbildung, sodaß $f(\zeta) = 0$ und $f'(\zeta) > 0$. Dann gilt*

1.

$$f'(z) = \sqrt{\frac{\pi}{K(\zeta,\zeta)}} K(z,\zeta)$$

wobei $K(z,\zeta)$ der Bergmankern ist.

2. *Sei* $\{v_n : n \in \mathbf{N}\}$ *ein vollständiges ONS in* $B^2(D)$*, dann gilt*

$$\bigwedge_{z\in D}\bigwedge_{\zeta\in D} K(z,\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(z)\overline{v_n(\zeta)}$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß

$$K_1(z,\zeta) := \frac{f'(z)f'(\zeta)}{\pi},$$

die definitorischen Eigenschaften des Bergmankernes erfüllt:

$$D_\rho := \{z : |f(z) < \rho\}, \qquad \rho < 1.$$

C_ρ sei der Rand von D_ρ. D_ρ ist eine Umgebung von ζ. f besitzt eine **einfache** Nullstelle in ζ. Der Residuensatz ergibt für $g \in B^2(D)$

$$\frac{g(\zeta)}{f'(\zeta)} = \lim_{z\to\zeta}\frac{(z-\zeta)}{f(z)}g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{g(z)}{f(z)}dz.$$

Für $z \in C_\rho$ gilt $|f(z)|^2 = \rho$. Somit $\rho^2\overline{f(z)}^{-1} = f(z)$.

$$\frac{g(\zeta)}{f'(\zeta)} = \frac{1}{2\pi i\rho^2}\int_{C_\rho}\bar f(z)g(z)dz = \frac{1}{\pi\rho^2}\iint_{D_\rho}\overline{f'(z)}g(z)\,dxdy \xrightarrow{\rho\to 1} \frac{1}{\pi}\iint_D \overline{f'(z)}g(z)\,dxdy.$$

Somit gilt

$$\bigwedge_{\zeta\in D} g(\zeta) = \frac{1}{\pi}\iint_D \overline{f'(z)f'(\zeta)}g(z)\,dxdy,$$

weil $f'(\zeta)$ reel ist. Da weiters $[f'(\zeta)]^2 = \pi K(\zeta,\zeta)$, gilt somit

$$K(z,\zeta) = \frac{f'(z)f'(\zeta)}{\pi} = f'(z)\sqrt{\frac{K(\zeta,\zeta)}{\pi}}$$

oder

$$f'(z) = K(z,\zeta)\sqrt{\frac{\pi}{K(\zeta,\zeta)}}.$$

■

8.3 Die Riemannsche Funktion der Ellipse

$E = \{(x,y) : b^2x^2 + a^2y^2 < a^2b^2\}$ mit $a^2 - b^2 = 1$ ist die definitorische Gleichung einer Ellipse mit den Brennpunkten $\{\pm 1\}$.
Sei c so bestimmt, daß $a := \cosh c$ und $b := \sinh c$. Und Q_c sei das Viereck mit den Eckpunkten $(-ci, -ci+\pi, ci+\pi, ci)$. Die Abbildung $\cos() : E \setminus (\{(-a,1)\} \cup \{(1,a)\}) \to Q_c$, $w \to \cos w$ ist analytisch und bijektiv.
Sei $x(u.v) := \Re\cos(u+iv)$, und $y(u,v) = \Im\cos(u+iv)$. Dann gilt für die Jakobideterminante

$$\left|\begin{array}{c}\partial(x,y)\\ \partial(u,v)\end{array}\right| = |1-(x(u,v)+iy(u,v))^2|.$$

Definition 8.14 *($T_n : z \to \cos(n\cos^{-1}(z))$ heißt Tschebyschefpolynom von Grad n.*

Bemerkung.

1. $T_n(z)$ ist tatsächlich ein Polynom in z vom Grad n.
2. Es gilt $U_n(z) := (n+1)^{-1}T'_{n+1}(z) = (1-z^2)^{-\frac{1}{2}}\sin((n+1)\cos^{-1} z)$.

Satz 8.15 *Die Funktionen*

$$P_n(z) := 2\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}(\rho^{n+1}-\rho^{-n-1})^{-\frac{1}{2}}U_n(z) \qquad n \in \mathbf{N}_0$$

bilden ein vollständiges ONS in $B^2(D)$.

Beweis. **Biorthogonalität:**

$$\begin{aligned} A_{n,m} &= \iint_E U_n(z)U_m(z)\,dxdy = \iint_{E\setminus\{(-a,1),(1,a)\}} U_n(z)U_m(z)\,dxdy \\ &= \iint_{Q_c} \cos((n+1)w)\sin((m+1)w)dudv. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{n-1,m-1} &= \int_C^C \int_0^\pi \sin(nu+inv)\sin(mu-imv)dudv \\ &= \int_{-C}^C \cosh nv \cosh mv dv \int_0^\pi \sin nu \sin mu du \\ &+ \int_{-C}^C \sinh nv \sinh mv dv \int_0^\pi \cos nu \cos mu du \\ &+ i\int_{-C}^C \sinh nv \cosh mv dv \int_0^\pi \cos nu \sin nu du \\ &- \int_{-C}^C \cosh nv \sinh mv dv \int_0^\pi \sin nu \sin mu du \end{aligned}$$

Somit gilt: Die Imaginarteile sind stets $= 0$. (Wegen der Integration nach v, weil der Integrand ungerade ist). Für $m \neq n$ sind auch die ersten beiden Integrale $= 0$ (wegen der Integration nach u). Weiters gilt für jedes $n \in \mathbf{N}$

$$A_{n,m} = \frac{\pi}{2(n+1)}\sin(2(n+1))c.$$

Da $a+b=e^c$ folgt für $\rho(a+b)^2$:

$$A_{n,m} = \frac{\pi}{4(n+1)}(\rho^{n+1}-\rho^{-n-1}).$$

Vollständigkeit: Wir zeigen, daß

$$K_1(z,\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(z)\bar{P}_n(z)$$

die definitorische Eigenschaften des Bergmankernes erfüllet. (Daraus folgt Vollständigkeit!)

Fall 1: P_n sind orthonormale Polynome von Grad N **und** biorthogonal d.h. linear unabhängig. Somit

$$\bigwedge_{n\in\mathbf{N}}\bigwedge_{g\in E}\iint_E \overline{K_1(z,\zeta)}z^n\,dxdy=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z^n)P_k(\zeta)=\zeta^n.$$

Fall 2:

$$\bigwedge_{\eta\notin D}\frac{1}{\eta-\zeta}=\iint_E \overline{K_1(z,\zeta)}\left(\frac{1}{\eta-\zeta}\right)dxdy.$$

Weil: Sei η außerhalb eines Kreises der E enthált. Dann konvergiert

$$\frac{1}{\eta-z}=\frac{1}{\eta}+\frac{z}{\eta^2}+\frac{z^2}{\eta^3}+\dots$$

gleichmäßig und absolut in E.

Folglich:

$$\iint_E K_1(z,\zeta)\left(\frac{1}{\eta-z}\right)dxdy=\sum_{n=0}^{\infty}\eta^{-n-1}\iint_E\overline{K_1(z,\zeta)}z^n\,dxdy=\sum_{n=0}^{\infty}\eta^{-n-1}\zeta^n=\frac{1}{\eta-z}.$$

Da sowohl die rechte als auch die linke Seite dieser Gleichung in η analytisch ist, (solange $\eta\neq E$), folgt die Behauptung auf Grund des Eindeutigkeitssatzes für analytische Funktionen.

Fall 3: Sei $f:E\to\mathbf{C}$ in einer Umgebung von E analytisch. Dann gilt

$$\bigwedge_{g\in E}f(\zeta)=\iint_E\overline{K(z,\zeta)}f(z)\,dxdy.$$

Weil:

$$f(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\eta)}{(\eta-\zeta)}d\eta,\qquad C \text{ sei der Rand von } E.$$

Somit

$$\begin{aligned}f(\zeta)&=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(\eta)\iint_D\overline{K_1(z,\zeta)}\left(\frac{1}{\eta-z}\right)dxdyd\eta\\&=\iint_D\overline{K_1(z,\zeta)}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\eta)}{\eta-z}d\eta\right]dxdy\\&=\iint_D\overline{K_1(z,\zeta)}f(z)\,dxdy.\end{aligned}$$

Fall 4: Sei $f\in B^2(E)$. Sei $p_n:E_n\to E$, $z\to(1-\frac{1}{n})z$. E_n ist die erweiterte Ellipse: $\bar{E}\subset E_n$; $\lim_{n\to\infty}p_n(z)=z$ und

$$\bigwedge_{n}\bigwedge_{f\in B_2}f_n:z\to f(p_n(z))$$

ist in einer Umgebung von E analytisch, also

$$\begin{aligned}f(\zeta)=\lim_{n\to\infty}f_n(\zeta)&=\lim_{n\to\infty}\iint_D\overline{K_1(z,\zeta)}f_n(z)\,dxdy\\&=\iint_D K_1(z,\zeta)\lim_n f_n(z)\,dxdy=\iint_D K_1(z,\zeta)f(z)dxdy.\end{aligned}$$

■

Satz 8.16 *Sei $\zeta \in E$. Sei $f : E \to U$ die Riemannsche Funktion für die $f(\zeta) = 0$ und $f'(\zeta) > 0$. Dann gilt: für alle $z \in E$*

$$f(z,\zeta) = \sqrt{\frac{\pi}{K(\zeta,\zeta)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[T_{n+1}(z) - T_{n+1}(\zeta)]}{\rho^{n+1} - \rho^{-n-1}} \overline{U_n(\zeta)}$$

wobei

$$K(\zeta,\zeta) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)|U_n(\zeta)|^2}{\rho^{n+1} - \rho{-}n - 1}.$$

Beweis. Mit dem obigen Satz gilt für den Bergmankern

$$\begin{aligned} K(z,\zeta) &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)U_n(z)\overline{U_n}(\zeta)}{\rho^{n+1} - \rho{-}n - 1} \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_{n+1}(z)\overline{U_n(\zeta)}}{\rho^{n+1} - \rho^{-n-1}}. \end{aligned}$$

Wir integrieren $(z \to K(z,\zeta))$ gliedweise und wählen die Stammfunktion so, daß sie in ζ verschwindet. Dann folgt die Behauptung.

■

Bemerkung. Für $z = \cos w$ und $\zeta = \cos\eta$. Ergibt sich aus der Definition von T_n, U_n:

$$f(\cos w, \cos\eta) = \frac{\pi\alpha|\sin\eta|}{2\sin\eta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\cos(n+1)w - \cos(n+1)\eta]}{\rho^{n+1} - \rho^{-n-1}} \sin(n+1)\eta,$$

wobei

$$\alpha^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{|\sin^2(n+1)\eta|}{\rho^{n+1} - \rho^{-n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n|\sin n\eta|^n}{\rho^n - \rho^{-n}}.$$

Wählt man $f(0) = 0$, d.h. $\eta = \frac{1}{2}\pi$, so gilt:

$$f(\cos(w), 0) = \frac{\pi\alpha}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(2n+1)w}{\rho^{2n+1} - \rho^{-2n-1}},$$

wobei

$$\alpha^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{\rho^{2n+1} - \rho^{-2n-1}}.$$

9 Numerische Verfahren zur Berechnung von Bergmankern und Riemannscher Abbildung

In diesem Kapitel wollen wir ein neues von Kerzmann, Stein & Trummer stammendes Verfahren zur Bestimmung des Bergmankernes vorstellen. Bemerkenswert ist in diesem Zusammenhang, daß die theoretische Basis der Arbeit von Kerzmann, Stein & Trummer auf Resultate der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlicher zurückgreift, die in den 80er Jahren entwickelt wurden.

9.1 Reduktion auf ein Integralgleichungsproblem

Zuerst werden wir die Flächenintegrale durch geeignete Kurvenintegrale ersetzen. Sei Γ der Rand des einfachzusammenhängenden glatten Gebietes D. Seien $f, g : \Gamma \to \mathbf{C}$ Funktionen, dann ist mit

$$\langle f|g\rangle_\Gamma := \int_\Gamma f(z)\bar{g}(z)ds$$

ein Skalarprodukt erklärt. $L^2(\Gamma, ds)$ bezeichnen den davon erzeugten Hilbertraum $H^2(D)$ bezeichnet den Abschluß der Polynome $p(z) = \sum_{n=1}^N a_n z^n$ im Raum $L^2(\Gamma, ds)$. Sei $\{\varphi_n(z) : n \in \mathbf{N}\}$ ein vollständiges ONS für $H^2(D)$, dann ist die orthogonale Projektion gegeben durch

$$\begin{aligned} S : L^2(\Gamma, ds) &\to H^2(D) \\ f &\mapsto \int_\Gamma \overline{S(z,\xi)} f(z)ds \end{aligned}$$

wobei

$$S(z,\xi) = \sum_{n=1}^\infty \varphi_n(z)\overline{\varphi_n(\xi)}, z\xi \in \Gamma.$$

Wie im Fall der Bergmankerne gilt für jedes andere ONS $\{\psi_n : n \in \mathbf{N}\}$ von $H^2(\Omega)$

$$\sum_{n=1}^\infty \psi_n(z)\psi_n(\xi) = \sum_{n=1}^\infty \varphi_n(z)\varphi_n(\xi), z\xi \in \Gamma.$$

Diese Tatsache ist deshalb wichtig, weil die Potenzen der Riemannschen Abbildung ein vollständiges ONS für $H^2(D)$ bilden. Genauer gilt folgender

Satz 9.1 *Sei $w : D \to U\{z : |z| < 1\}$ durch den Riemannschen Abbildungssatz gegeben, dann ist*

$$\varphi_n : D \to \mathbf{C}, z \to \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} w^n(z)[w'(z)]^{1/2}$$

ein vollständiges ONS im $H^2(D)$.
Sei $w : D \to U$ überdies so gewählt, daß $w(\xi) = 0$, $w'(\xi) \geq 0$ so gilt.

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^\infty (w(z)\bar{w}(z))^n [w'(z)\bar{w}(\zeta)]^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{[w'(z)w'(\zeta)]^{1/2}}{1 - w(z)\bar{w}(\zeta)} = \frac{1}{2\pi}[w'(z)w'(\zeta)]^{1/2}.$$

Es gilt somit der folgende wichtige Zusammenhang zwischen den Bergmankern $K(z,\zeta)$ und $S(z,\zeta)$

$$S^2(z,\zeta) = \frac{K(z,\zeta)}{4\pi}, \quad z,\zeta \in \Gamma.$$

Die Methode von Kerzmann und Stein zielt nun auf die Berechnung von $S(z,\zeta)$ ab. Dazu muß die Parametriesierung von Γ spezifiziert werden:

$$z : [0,\beta] \to \Gamma, t \to z(t)$$

$$z(0) = z(\beta), \dot{z}(0) = \dot{z}(\beta), \ddot{z}(0) = \ddot{z}(\beta)$$

$$\dot{z}(t) \neq 0, t \in [0,\beta]$$

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{z}(t)/|\dot{z}(t)|$$

$$A(z(s), z(t)) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{\dot{\gamma}(t)}{z(t)-w(s)} - \frac{\dot{\gamma}(s)}{w(s)-z(t)}\right) & s \neq t \\ 0 & s = t. \end{cases}$$

Dann gilt:

1. Ist $z \in C^{(k)}$ so ist $A \in C^{k-2}$.

2. Sei $Hu(w) := \int_\Gamma \frac{u(z)}{z-w} dz, w \in \Gamma$. So ist für $w \in \Gamma$

$$(H^* - H)(u)(w) = \int_\Gamma A(w,z)w(z)ds(z).$$

   Weiters gelten folgende Operatorgleichungen $HS = S$, $SH = H$, $S^* = S$, $SH^* = S$, $H^*S = H^*$. Für $A := H^* - H$ gilt

$$\boxed{\text{H=S-SA.}}$$

   Diese Identität liefert die Bestimmungsgleichung für den Operator S und impliziert folgende Identität für die Kerne der Operatoren:

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{\dot{\gamma}(z)}{z-a} = S(z,a) - \int_\Gamma A(w,z)S(a,w)ds(w)$$

   für jedes $z, a \in \Gamma$.

Überdies ist bekannt

$$\begin{aligned} S(a,z) &= \bar{S}(z,a) \\ A(w,z) &= -\bar{A}(z,w). \end{aligned}$$

Zusammenfassend erhielten wir also folgenden

Satz 9.2 *Sei $a \in \Gamma$.*
Sei $g : \Gamma \to \mathbf{C}$, $z(t) \mapsto \frac{1}{2\pi i}\dot{\gamma}(t)/(a - z(t))$
$f : \Gamma \to \mathbf{C}$, $z \mapsto S(z,a)$.
Löst man die Fredholmsche Integralgleichung mit schiefsymmetrischem Kern $A(\cdot,\cdot)$

$$f(z) + \int_\Gamma A(z,w)f(w)ds(w) = g(z), \quad z \in \Gamma$$

nach f, so hat man den Kern $z \to S(z,a)$ und auch den Bergmankern erhalten.

In parametrisierter Form lautet das obige Integralgleichungsproblem wie folgt:
Gegeben

$$\psi : [0,\beta] \to \mathbf{C}, t \to |\dot{z}(t)|^{1/2} g(z(t))$$
$$k : [0,\beta] \times [0,\beta] \to \mathbf{C}, (s,t) \to |\dot{z}(t)|^{1/2}|\dot{z}(s)|^{1/2} A(z(s), z(t)).$$

Gesucht $\varphi : [0,\beta] \to \mathbf{C}$, sodaß für $0 \leq t \leq \beta$

$$\varphi(t) + \int_0^\beta k(t,s)\varphi(s)ds = \psi(t).$$

Die Lösung $\varphi(t)$ erfüllt dann

$$\varphi(t)|\dot{z}(t)|^{-1/2} = f(z(t)) = S(z(t), a).$$

9.2 Bemerkungen zur Implementierung

Wir werden kurz die Diskretisierung der obigen Gleichung diskutieren, und haben so die Bestimmung der Riemannschen Abbildung auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems reduziert: Sei $t_i := \frac{i}{n}\beta, 1 \leq i \leq n$. Diskretisiert man das Integral nach der Trapezregel, so erhält man

$$\varphi(t_i) + \frac{\beta}{n}\sum_{j=1}^n k(t_i,t_j)\varphi(t_j) = \psi(t_i), 1 \leq i \leq n.$$

Die $n \times n$ Matrix B, definiert durch $B_{i,j} = \frac{\beta}{n}k(t_i,t_j)$ erfüllt

$$B_{i,j} = -\overline{B_{i,j}}.$$

Somit erfüllen die Eigenwerte l von $\mathrm{Id} + B$ stets die Bedingung $\Re l = 1$ und es existiert zu jedem $y \in \mathbf{R}^n$ genau ein $x \in \mathbf{R}^n$, sodaß

$$(\mathrm{Id} + B)x = y.$$

Schließlich wählen wir für $t \leq \beta$

$$\varphi_n(t) := \psi(t) - \frac{\beta}{n}\sum_{j=1}^n k(t,t_j)x_j, \qquad t \leq \beta$$

als Approximation der Lösung φ.
Da die Methode von Kerzmann, Stein & Trummer noch nicht in den Lehrbüchern der Funktionentheorie behandelt wird, seien hier die Zitate der Originalarbeiten angegeben.
Der theoretische Background ist in folgendem Buch über Funktionentheorie in mehrerer komplexen Veränderlichen dargestellt: S.G. Krantz: Function Theory of Several Complex Variables, Wiley, New York (1982).

N. Kerzmann, E.M. Stein: The Cauchy Kernel, the Szegö Kernel and the Riemann Mapping Function, Math. Ann., 236 (1978), pp. 85-93.
N. Kerzmann, M. Trummer: Numerical conformal mapping via the Szegö kernel, Jour. of Comp. and Appl. Math. 14 (1986).
M. Trummer: An efficient Implementation of a conformal Mapping Method based on the Szegö Kernel, SIAM J. Num. Anal. 23 (1986), pp. 853-872.

10 Unendliche Produkte

10.1 Die Sätze von Weierstraß und Mittag-Leffler

Definition 10.1 *Sei (p_n) eine Folge aus $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. Das Produkt $\prod p_n$* **konvergiert**, *falls die Folge $P_n = \prod_{k=1}^{n} p_k$ gegen ein $p \neq 0$ konvergiert. Falls (p_n) eine Folge aus $\mathbf{C}$ ist, mit $1 \leq |\{n : p_n = 0\}| < \infty$, dann sagen wir, daß $\prod p_n$ konvergiert, falls $\prod_{\{n:p_n \neq 0\}} p_n$ im obigen Sinn konvergiert. In diesem Fall definieren wir: $\prod p_n = 0$.*

Falls $\prod p_n$ konvergiert, dann gilt: $p_n \to 1$. Wir schreiben daher $p_n = 1 + a_n$.

Satz 10.2 *Das Produkt $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ ist genau dann konvergent, wenn gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n)$ konvergiert.*

Beweis.

$$\prod_{k=1}^{n} p_k = \exp\left[\ln\left(\prod_{k=1}^{n}(1 + a_k)\right)\right] = \exp\left[\sum_{k=1}^{n} \ln(1 + a_k)\right]$$

woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

■

Für den Fall $a_n \geq 0$, der der **absoluten** Konvergenz entspricht, gilt sogar:

Lemma 10.3 *Falls $a_n \geq 0$, dann gilt:*

$$\prod(1 + a_n) \textit{ konvergiert } \Leftrightarrow \sum a_n < \infty.$$

Beweis. Da $\frac{\ln(1+z)}{z} \to 1$ für $z \to 0$, gilt:

$$\bigwedge_{\epsilon>0} \bigvee_{N\in\mathbf{N}} \bigwedge_{n\geq N} (1 - \epsilon)|a_n| < \left|\ln(1 + a_n)\right| \leq (1 + \epsilon)|a_n|$$

woraus das Ergebnis leicht folgt.

■

Definition 10.4 *Sei (a_n) eine Folge aus $\mathbf{C}$. Wir sagen, daß das Produkt $\prod(1 + a_n)$* **absolut konvergiert** $\Leftrightarrow \sum |a_n| < \infty$. *Diese Bedingung ist stärker als Konvergenz. In diesem Fall konvergiert auch jede Permutation $\prod_{n\in\mathbf{N}}(1 + a_{\pi(n)})$ und der Grenzwert ist von der Umordnung unabhängig.*

Beispiele.
$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ konvergiert. (In der Tat: $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$).

Hinweis: $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{(n+1)(n-1)}{n^2}$.
$\prod_{n=0}^{\infty}(1 + z^{2^n})$ konvergiert für $|z| < 1$ (In der Tat: $\prod(1 + z^{2^n}) = \frac{1}{1-z}$).
Hinweis: $\prod_{k=0}^{n}(1 + z^{2^k}) = 1 + z + \cdots + z^{2^{k+1}-1}$.

Bemerkung. Falls die a_n Funktionen von z sind, dann kann man gleichmäßige Konvergenz der Produkte $\prod(1+a_n(z))$ definieren. Es gilt die folgende Version des Weierstraß'schen M-Tests für Funktionen: Sei (a_n) eine Folge von Funktionen auf $A \subseteq \mathbf{C}$, sodaß eine Folge $(M_n) \in (\mathbf{R}^+)^{\mathbf{N}}$ mit $\sum M_n < \infty$ und $\bigwedge_{n\in\mathbf{N}} \bigwedge_{z\in A} \big|a_n(z)\big| \le M_n$ existiert. Dann konvergiert das Produkt $\prod\big(1+a_n(z)\big)$ gleichmäßig (und absolut) auf A gegen eine Funktion f.
Daher gilt unter diesen Voraussetzungen:

a) Falls jedes a_k stetig, dann auch f;

b) Falls jedes a_k analytisch, dann auch f.

Wir werden jetzt die Methode der unendlichen Produkte verwenden, um eine ganze Funktion mit einer vorgegebenen Menge $Z(f)$ von Nullstellen zu konstruieren: Wir beginnen mit dem einfachsten Fall:

Satz 10.5 *Sei (a_n) eine Folge von komplexen Zahlen mit $|a_n| \to \infty$ und zwar so, daß $\sum \frac{1}{|a_n|} < \infty$. Dann konvergiert das Produkt*

$$\prod\Big(1 - \frac{z}{a_n}\Big)$$

gegen eine ganze Funktion f mit $Z(f) = \{a_n : n \in \mathbf{N}\}$, wobei f an der Stelle a eine k-fache Nullstelle hat, wenn $\big|\{n : a = a_n\}\big| = k$.

Man kann die Voraussetzung über die Geschwindigkeit, mit der a_n gegen ∞ strebt, abschwächen: Falls ein $h \in \mathbf{N}$ existiert, mit

$$\sum \frac{1}{|a_n|^{h+1}} < \infty$$

dann konvergiert das Produkt

$$\prod\Big(1 - \frac{z}{a_n}\Big)e^{\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{h}\left(\frac{z}{a_n}\right)^h}$$

gegen eine ganze Funktion f mit $Z(f) = \{a_n\}$.
Der allgemeine Fall wird im folgenden Satz formuliert:

Satz 10.6 *Sei (a_n) eine Folge aus $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ mit $|a_n| \to \infty$. Dann existiert eine Folge (p_n) von Polynomen, sodaß das Produkt*

$$\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{z}{a_n}\Big)e^{p_n(z)}$$

gegen eine ganze Funktion f konvergiert, wobei $Z(f) = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ und die Vielfachheit der Nullstellen wie oben gegeben ist.
Jede ganze Funktion $\widetilde{f}$ mit dieser Eigenschaft (i.e. mit der vorgegebenen Nullstellenmenge $Z(f) = (a_n)$) hat die Gestalt

$$e^{g(z)}\prod\Big(1 - \frac{z}{a_n}\Big)e^{p_n(z)},$$

wobei g eine ganze Funktion ist und p_n Polynome sind.

Beweis. Das Produkt konvergiert, falls $\sum r_n(z)$ konvergiert, wobei

$$r_n(z) = \ln\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) + p_n(z)$$

(wir verwenden den Standardzweig der Logarithmusfunktion – mit $\arg z \in]-\pi, \pi[$). Fixiere $R > 0$ und betrachte Konvergenz für $|z| < R$, wobei wir nur Terme mit $|a_n| > R$ berücksichtigen. Wir verwenden die Taylorentwicklung

$$\ln\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) = -\frac{z}{a_n} - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{z}{a_n}\right)^3 \dots$$

und wählen $p_n(z) = \sum_{k=1}^{m_n} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_n}\right)^k$ (wobei wir die m_n später spezifizieren werden). Damit ist

$$r_n(z) = \frac{1}{m_n+1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n+1} + \frac{1}{m_n+2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n+2} + \dots$$

und wir haben die einfache Abschätzung

$$\left|r_n(z)\right| \leq \frac{1}{m_n+1}\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{m_n+1}\left(1 - \frac{R}{|a_n|}\right)^{-1}.$$

Wählen wir daher m_n so, daß $\sum\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{m_n+1} < \infty$ für jedes R (etwa $m_n+1 = n$), dann konvergiert das Produkt.

■

Die zweite Aussage folgt aus dem folgenden

Hilfssatz 10.7 *Sei f eine ganze Funktion ohne Nullstellen. Dann existiert eine ganze Funktion g, sodaß $f = e^g$.*

Beweis. Wähle g als die Stammfunktion von $\frac{f'}{f}$, sodaß $f(0)e^{-g(0)} = 1$. Es gilt:

$$\frac{d}{dz}(fe^{-g}) = f'e^{-g} - fg'e^{-g} = 0,$$

d.h. fe^{-g} ist konstant und daher identisch gleich 1.

■

Korollar 10.8 *(zum Satz) Sei $g : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ eine meromorphe Funktion. Dann hat g eine Darstellung f_1/f_2, wobei f_1, f_2 ganze Funktionen sind.*

Beweis. Wähle eine ganze Funktion f_2, die an denjenigen Punkten, an denen g einen Pol der Ordnung k hat, eine Nullstelle der Ordnung k besitzt. Dann ist gf_2 eine ganze Funktion f_1. Das bedeutet aber genau die Aussage des Korollars, daß $g = f_1/f_2$.

■

Satz 10.9 Der Satz von Mittag-Leffler: *Dieser Satz behandelt folgendes Problem. Gegeben sei eine Folge (a_n) von verschiedenen Punkten aus $\mathbf{C}$ mit $|a_n| \to \infty$ bzw. eine Folge (p_n) von Polynomen mit $p_n(0) = 0$ $(n \in \mathbf{N})$. Gesucht ist eine meromorphe Funktion f, sodaß die Menge der Pole von f, $P(f) = \{a_n\}$ und $p_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$ = Hauptteil von f an der Stelle a_n $(n \in \mathbf{N})$.*
Der Satz von Mittag-Leffler sagt aus, daß ein solches f immer existiert.

Beweis. Wir betrachten eine Summe der Gestalt

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n\Big(\frac{1}{z-a_n}\Big) - h_n(z)$$

wobei $p_n\Big(\frac{1}{z-a_n}\Big)$ die Taylorreihe

$$b_0^n + b_1^n z + b_2^n z^2 + \dots$$

um 0 hat und

$$h_n(z) = b_0^n + b_1^n z + \dots + b_{m_n}^n z^{m_n}.$$

Die m_n werden so gewählt, daß

$$\left| p_n\Big(\frac{1}{z-a_n}\Big) - h_n(z) \right| \le 2^{-n} \text{ für } |z| \le \frac{|a_n|}{2}.$$

Damit sieht man, daß $\sum \Big\{ p_n\Big(\frac{1}{z-a_n}\Big) - h_n(z) \Big\}$ gegen eine meromorphe Funktion mit den gesuchten Eigenschaften konvergiert.

■

Beispiel. Falls die z_n einfache Polstellen sind, d.h.

$$p_n(z) = b_n z$$

dann ist

$$p_n\Big(\frac{1}{z-a_n}\Big) = \frac{b_n}{z-a_n} = -\sum_{k=0}^{\infty} b_n \frac{z^k}{a_n^{k+1}}$$

Wir wählen daher einen Index m_n, sodaß der Reihenrest

$$p_n\Big(\frac{1}{z-a_n}\Big) - h_n(z) = -\sum_{k=m_n+1}^{\infty} b_n \frac{z_k}{a_n^{k+1}}$$

klein ist. Im Spezialfall z.B., wo die (b_n) beschränkt sind, genügt es, (m_n) so zu wählen, daß

$$\sum \Big| \frac{z}{a_n} \Big|^{m_n+1} < \infty.$$

Denn

$$p_n\Big(\frac{1}{z-a_n}\Big) - \frac{b_n}{z-a_n} = -\sum_{k=m_n+1}^{\infty} b_n \frac{z^k}{a_n^{k+1}}$$

und damit

$$\left| p_n\Big(\frac{1}{z-a_n} - \frac{b_n}{z-a_n}\Big) \right| \le 2K \Big| \frac{z}{a_n} \Big|^{m_n+1}$$

falls $|a_n| \ge 1$ und $|z| \le |a_n|/z$, wobei $K = \sup\big\{ |b_n| : n \in \mathbf{N} \big\}$.

Beispiel. Betrachte die Funktion

$$\pi^2 \operatorname{cosec}^2(\pi z) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$$

Dies ist eine meromorphe Funktion, mit Polstellen $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$. Die Reihe $\sum_{n \in \mathbf{Z}} \left(\frac{1}{z-n}\right)^2$ konvergiert gegen eine meromorphe Funktion mit den gleichen Polstellen (und Hauptteilen). Daher ist

$$f(z) = \pi^2 \mathrm{cosec}^2 \pi z - \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$$

eine ganze Funktion. Weiters gilt:

a) f hat Periode 1 (d.h. $f(z+1) = f(z)$ $(z \in \mathbf{C})$).

b) $\left|f(x+iy)\right| \to 0$ für $|y| \to \infty$ gleichmäßig in $x \in \mathbf{R}$ (da das gleiche für $\pi^2 \mathrm{cosec}^2 \pi z$ bzw. für $\sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$ gilt). Daraus folgt, nach dem Satz von Liouville: $f = 0$, d.h.

$$\pi^2 \mathrm{cosec}^2 \pi z = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

Es gilt daher:

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

(da $-\pi \cot \pi z$ eine Stammfunktion von π^2 cosec $^2 \pi z$ bzw. $\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2}$ eine Stammfunktion von $\sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$. Außerdem sind beide ungerade Funktionen von z).

Lassen wir $n \to \infty$ gehen, so bekommen wir eine Darstellung der gesuchten Gestalt.

Wir beenden dieses Kapitel mit Anwendungen solcher Darstellungen auf klassische Funktionen.

Beispiel. Wir bestimmen eine Produktdarstellung der Funktion $\sin(\pi z)$. Gemäß der entwickelten Theorie wissen wir, daß

$$\sin \pi z = z e^{g(z)} \prod_{n \in \mathbf{Z}, n \neq 0} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}$$

für eine ganze Funktion g: Um g zu bestimmen, berechnen wir $\frac{f'}{f}$ für beide Seiten. Daraus folgt die Gleichung:

$$\pi \ \cot \ \pi z = \frac{1}{z} + g'(z) + \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right).$$

Aber

$$\pi \ \cot \ \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)$$

(siehe oben) und daher ist $g'(z) = 0$ d.h. g ist konstant. In der Tat ist $e^g = \pi$ wie man aus der Beziehung

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin \pi z}{e^g z} = \lim_{z \to 0} \prod_{n \neq 0} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} = 1$$

sieht. Es gilt daher:

$$\begin{aligned} \sin\ \pi z &= \pi z \prod_{n\neq 0}\Big(1-\frac{z}{n}\Big)e^{\frac{z}{n}} \\ &= \pi z \prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{z^2}{n^2}\Big) \end{aligned}$$

Aus dieser Produktdarstellung folgt die Formel

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots .$$

(Denn

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{x} &= \prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\Big) \quad (x=\pi z) \\ &= 1-\frac{x^2}{\pi^2}\Big(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots\Big)+\ \text{Terme höherer Ordnung} \end{aligned}$$

d.h.

$$1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\dots = 1-\frac{x^2}{\pi^2}(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots)+\dots)$$

Andererseits, setzt man $x=\frac{\pi}{2}$ in der Formel

$$\frac{\sin x}{x}=\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\Big)$$

so bekommt man $\frac{z}{n}=\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{1}{4n^2}\Big)=\prod_{n=1}^{\infty}(2n+1)(2n-1)\overline{(}2n)^2$. Dies ist die WALLIS'sche Produkt-Formel

$$\frac{\pi}{4}=\frac{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdots}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\dots}=2\overline{3}\cdot 4\cdot 4\overline{3}\cdot 5\cdot 6\cdot 6\overline{5}\cdot 7\cdot 8\cdot 8\overline{7}\cdot 9\cdots$$

Beispiel. Seien ω,ω' linear unabhängige komplexe Zahlen (d.h. l.u. über $\mathbf{R}$). Wir konstruieren eine ganze Funktion f mit einfachen Nullstellen an den Gitterpunkten

$$\{m\omega+n\omega_1 : n,m\in\mathbf{Z}\}$$

Der kanonische Fall ist $\omega=1,\ \omega'=i$ (d.h. die Gitterpunkte sind die Gauß'schen ganzen Zahlen). Sei (z_r) die Folge $(m+in)$ (auf einer geeigneten Art numeriert).

Es gilt:

$$\sum\frac{1}{|z_r|^3}<\infty.$$

(Denn sei $A_k=\big\{(m,n)\in\mathbf{Z}^2 : n\le m, m=\pm k \text{ oder } m\le n, n=\pm k\big\}$. Da $|A_k|=8k$ und $z_r=m+in\in A_k\Rightarrow\frac{1}{m^2+n^2}\le\frac{1}{k^2}$ – gilt

$$\sum\frac{1}{|z_r|^3}=\sum_k\sum_{z_r\in A_k}\frac{1}{|z_r|^3}\le\sum_k\frac{8}{k^2}<\infty\,).$$

Daher ist

$$f(z) = z \prod_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2\setminus\{0\}} (1 - \frac{z}{m+in})e^{\frac{z}{m+in}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{m+in}\right)^2}$$

eine geeignete Lösung. (Die Lösung für allgemeine Gitter ist

$$\sigma(z) = z \prod_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2\setminus\left\{(0,0)\right\}} \left(1 - \frac{z}{m\omega+n\omega'}\right)e^{\frac{z}{m\omega+n\omega'}+\frac{1}{2}(\frac{z}{m\omega+m\omega'})^2}.$$

Man nennt diese Funktion die **Weierstraß σ-Funktion**.
In ähnlicher Weise konstruieren wir eine meromorphe Funktion mit Polen mit Hauptteil 1 an den Gitterpunkten

$$\{m\omega + n\omega' : m, n \in \mathbf{Z}\}$$

Sei (z_k) eine entsprechende Numerierung und setze

$$\begin{aligned}\zeta(z) &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z-z_k} + \frac{1}{z_k} + \frac{z}{z_k^2} \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2\setminus\left\{(0,0)\right\}} \frac{1}{z-(m\omega+n\omega')} + \frac{1}{m\omega+n\omega'} + \frac{z}{(m\omega+n\omega')^2}.\end{aligned}$$

ζ ist die **Weierstraß'sche ζ Funktion**: Es gilt:

$$\zeta(z) = \frac{d}{dz}\big(\ln\ \sigma(z)\big) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}$$

Die Funktion

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(z) &= \frac{d}{dz}\zeta(z) = -\frac{d^2}{dz^2}\ln\ \sigma(z) \\ &= \frac{\sigma^2(z) - \sigma(z)\sigma''(z)}{\sigma^2(z)} \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum\Big(\frac{1}{\big(z-(m\omega+n\omega')\big)^2} - \frac{1}{(m\omega+n\omega')^2}\Big)\end{aligned}$$

hat Polstellen zweiter Ordnung an den Gitterpunkten. Es gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}'(z) &= -2\sum_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2} \frac{1}{(z-(m\omega+n\omega'))^3} \text{ und daher} \\ \mathcal{P}'(z+\omega) &= \mathcal{P}'(z) \\ \mathcal{P}`(z+\omega') &= \mathcal{P}'(z)\end{aligned}$$

Daher ist $\mathcal{P}(z+\omega)-\mathcal{P}(z)$ bzw. $\mathcal{P}(z+\omega')-\mathcal{P}(z)$ konstant. In der Tat gilt $\mathcal{P}(z+\omega)-\mathcal{P}(z) = 0$ bzw. $\mathcal{P}(z+\omega')-\mathcal{P}(z) = 0$. (Denn $\mathcal{P}$ ist gerade – daher: $c = \mathcal{P}(\frac{\omega}{2})-\mathcal{P}(-\frac{\omega}{2}) = 0$). $\mathcal{P}$ ist damit ein Beispiel einer **elliptischen** Funktion (eine meromorphe Funktion mit zwei linear unabhängigen Perioden.)

In unserem letzten Beispiel bringen wir eine kurze Einführung in die Theorie der Γ-Funktion.

Beispiel. Wir suchen zunächst eine ganze Funktion mit Nullstellen

$$\{-1,-2,-3,\dots\}$$

Die einfachste solche Funktion ist

$$G(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{z}{n}\Big)e^{-\frac{z}{n}}$$

Es gilt:

$$zG(z)G(-z)=z\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{z^2}{n^2}\Big)=\frac{\sin\pi z}{\pi}$$

Da die Funktion $z\mapsto G(z-1)$ ebenso wie die Funktion $z\mapsto z.\big(G(z)\big)$ die Nullstellenmenge $\{0,-1,-2,\dots\}$ besitzt, gilt:

$$G(z-1)=ze^{\gamma(z)}G(z)\text{ für eine ganze Funktion }\gamma$$

Um γ zu bestimmen, berechnen wir die logarithmischen Ableitungen beider Seiten. Daraus folgt die Gleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{z-1+n}-\frac{1}{n}\Big)=\frac{1}{z}+\gamma'(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\Big)$$

Aber die linke Seite kann man folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{z-1+n}-\frac{1}{n}\Big)&=\frac{1}{z}-1+\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{z+m}-\frac{1}{m+1}\Big)\\&=\frac{1}{z}-1+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\Big)+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\Big).\end{aligned}$$

Daraus folgt $\gamma'=0$, d.h. γ ist konstant. Diese Konstante nennt man die **Euler'sche Konstante**. Man berechnet γ wie folgt. Setze $z=1$. Es gilt: $1=G(0)=e^{\gamma}G(1)$, d.h.

$$e^{-\gamma}=\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)e^{-\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}(n+1)e^{-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}$$

Daher gilt:

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln\ n\Big)\quad(\sim 0,57722\dots)$$

(N.B.: $\ln(n+1)-\ln n\to 0$). Wir setzen jetzt $H(z)=G(z)e^{\gamma z}$, sodaß $H(z-1)=zH(z)$, bzw. $\Gamma(z)=\frac{1}{zH(z)}$, sodaß $\Gamma(z-1)=\frac{\Gamma(z)}{z-1}$ oder $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$. Γ ist die **Gamma-Funktion** – eine meromorphe Funktion mit Polstellen $0,-1,-2,\dots$. Γ hat die Darstellung

$$\Gamma(z)=\frac{e^{-\gamma z}}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{z}{n}\Big)^{-1}e^{\frac{z}{n}}$$

und es gilt:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

Da $G(1) = e^{-\gamma}$ gilt $H(1) = 1$ und damit $\Gamma(1) = 1$. Daraus folgt leicht

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (n \in \mathbf{N})$$

Außerdem gilt: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ (da $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi$).