Pseudodifferential- und Fourierintegraloperatoren

nach einer Vorlesung von

Paul Müller

mit Ergänzungen, Erweiterungen und Überarbeitungen von

Markus Passenbrunner

Wintersemester 2011/12

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Funktionenräume Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir $x \cdot y := \sum_{i=1}^n x_i y_i$ für das Standard-Skalarprodukt und $|x| = (x \cdot x)^{1/2}$ für die euklidische Norm. Wenn es aus dem Kontext klar ist, schreiben wir oft statt $x \cdot y$ auch nur xy. Mit L^p bezeichnen wir den Banachraum

$$L^p(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \text{ messbar} : \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx < \infty\}$$

für $1 \leq p < \infty$, wobei wir zwei Funktionen $f, g \in L^p$ als gleich ansehen, falls sie fast überall (bzgl. des Lebesguemaßes) übereinstimmen. Da wir es in weiterer Folge oft mit Integralen über $\mathbb{R}^n$ zu tun haben, schreiben wir statt $\int_{\mathbb{R}^n}$ auch oftmals nur $\int$. Die Norm in L^p ist gegeben durch

$$\|f\|_p := \left(\int |f|^p\right)^{1/p}.$$

L^2 zeichnet sich gegenüber den anderen L^p-Räumen dadurch aus, dass mit

$$\langle f, g \rangle := \int f\bar{g}$$

ein Skalarprodukt definiert ist, mit dem L^2 zu einem Hilbertraum wird. Dabei bezeichnet $\bar{g}$ die konjugiert komplexe Funktion zu g. Zusätzlich zu den L^p-Räumen für Exponenten $p < \infty$ definieren wir noch

$$L^\infty(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \text{ messbar} : |f| < \infty \text{ fast überall}\}$$

mit der essentiellen Supremumsnorm

$$\|f\|_\infty := \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : |f| \leq \alpha \text{ fast überall}\}.$$

So wird L^∞ zu einem Banachraum, falls wir wieder zwei Funktionen als gleich ansehen, wenn sie fast überall übereinstimmen. Wir bezeichnen mit $C^\infty = C^\infty(\mathbb{R}^n)$ die glatten (also unendlich oft differenzierbaren) komplexwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}^n$. Weiters sei $C_c^\infty = C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ der Raum der glatten Funktionen mit kompaktem Träger. Dabei ist der Träger von f definiert als

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}.$$

Ein Beispiel für eine Funktion $\Phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp} \Phi = [-1, 1]$ ist

$$\Phi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) & \text{falls } |x| < 1 \\ 0 & \text{falls } |x| \geq 1 \end{cases} \tag{1.1}$$

Durch $\psi(x) = \Phi((x - y)/\varepsilon)$ wird ein $\psi \in C_c^\infty$ definiert mit $\operatorname{supp} \psi = [y - \varepsilon, y + \varepsilon]$.
Die bekannte Minkowski Ungleichung (Dreiecksungleichung für L^p) lässt sich folgendermaßen verallgemeinern.

Proposition 1.1 (Minkowski Ungleichung in Integralform). *Seien $1 \leq p < \infty$, (Ω_1, μ_1) und (Ω_2, μ_2) zwei $\sigma-$endliche Maßräume und $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{C}$ eine messbare Funktion. Dann gilt die Ungleichung*

$$\left[\int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} |f(x, y)| d\mu_1(x)\right)^p d\mu_2(y)\right]^{1/p} \leq \int_{\Omega_1} \left[\int_{\Omega_2} |f(x, y)|^p d\mu_2(y)\right]^{1/p} d\mu_1(x).$$

Beweis. Für $p = 1$ ist die Aussage der Satz von Fubini. Sei also $p > 1$, p' der zu p konjugierte Exponent ($1/p + 1/p' = 1$) und $g \in L^q(\mu_2)$. Dann folgt aus dem Satz von Fubini und der Hölder Ungleichung

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_2} \left[\int_{\Omega_1} |f(x,y)| d\mu_1(x) \right] |g(y)| d\mu_2(y) &= \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} |f(x,y)||g(y)| d\mu_2(y) d\mu_1(x) \\ &\le \|g\|_q \int_{\Omega_1} \left[\int_{\Omega_2} |f(x,y)|^p d\mu_2(y) \right]^{1/p} d\mu_1(x).\end{aligned}$$

Da die Gleichung $\|F\|_p = \sup\{|\int Fg| : g \in L^q, \|g\|_q = 1\}$ gilt, erhalten wir mit $F(y) = \int_{\Omega_1} |f(x,y)| d\mu_1(x)$ die Behauptung. □

Proposition 1.2 (Integration in Polarkoordinaten)**.** *Es existiert ein eindeutiges Borelmaß* $\sigma = \sigma_{n-1}$ *auf der Einheitssphäre* S^{n-1} *im* $\mathbb{R}^n$*, sodass für* $f \ge 0$ *messbar oder* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(rx') r^{n-1} d\sigma(x') dr.$$

Multiindexschreibweise Sei $n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Man nennt dann α einen *Multiindex.* Um Formeln für Elemente aus $\mathbb{R}$ effizient auf $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern zu können, vereinbaren wir folgende Schreibweisen für $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i, \quad \xi^\alpha := \prod_{i=1}^n \xi_i^{\alpha_i}.$$

Für einen Multiindex α definieren wir die Differentialoperatoren

$$\partial^\alpha := \prod_{k=1}^n \partial_{x_k}^{\alpha_k}, \quad D^\alpha := (-i)^{|\alpha|} \partial^\alpha, \quad \text{wobei } \partial_{x_k} := \frac{\partial}{\partial x_k}$$

und für Koeffizienten $a_\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $|\alpha| \le m$

$$P(x,D) := \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) D^\alpha.$$

Diesem Differentialoperator wird ein *Symbol* $P(x,\xi)$ zugeordnet, indem formal das D durch ein Element aus $\mathbb{R}^n$ ersetzt wird

$$P(x,\xi) := \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) \xi^\alpha. \tag{1.2}$$

Treten nur konstante Koeffizienten a_α auf, so schreibt man auch $P(D)$ bzw. $P(\xi)$.
Wir schreiben außerdem $Du(x)$ für die Ableitung (Jacobimatrix) einer Funktion $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ an der Stelle x. Für zwei Multiindizes α, β definieren wir außerdem noch folgendes

- $\beta \le \alpha$ bedeutet, dass $\beta_j \le \alpha_j$ für alle $j = 1, \dots, n$.
- Wenn $\beta \le \alpha$, dann ist $\alpha - \beta$ der Multiindex mit den Eintragungen $(\alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_n - \beta_n)$.

- $\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!$
- $\binom{\alpha}{\beta} := \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_n}{\beta_n}$, wenn $\beta \leq \alpha$.

Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gelten auch noch die *Leibnizformel*

$$D^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (D^\beta f)(D^{\alpha-\beta} g)$$

und der Binomische Satz

$$(x+y)^\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^\beta y^{\alpha-\beta},$$

wobei $f, g \in C^{|\alpha|}$ und $x, y \in \mathbb{R}^n$ beliebig (Übung!). Außerdem erhalten wir eine Verallgemeinerung der Taylorschen Formel mit Integralrestglied.

Proposition 1.3. *Sei $f \in C^\infty$. Dann gilt für alle natürlichen Zahlen N die Formel*

$$f(x+y) = \sum_{|\alpha|<N} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} y^\alpha + N \sum_{|\alpha|=N} \frac{y^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{N-1} (\partial^\alpha f)(x+ty) dt$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Beweis. Sei $N \in \mathbb{N}$ beliebig und definiere

$$v_N(x,y,t) = \sum_{|\alpha|<N} \frac{(1-t)^{|\alpha|} y^\alpha}{\alpha!} (\partial^\alpha f)(x+ty).$$

Dann gilt $v_N(x,y,1) = f(x+y), v_N(x,y,0) = \sum_{|\alpha|<N} \frac{y^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha f(x)$ und

$$\frac{\partial v_N}{\partial t}(x,y,t) = N \sum_{|\alpha|=N} \frac{(1-t)^{N-1}}{\alpha!} y^\alpha \partial^\alpha f(x+ty). \quad \text{Übung!}$$

Sei für fixe $x, y \in \mathbb{R}^n$ $g(t) = v_N(x,y,t)$. Dann folgt die Behauptung aus dem Hauptsatz $g(1) = g(0) + \int_0^1 g'(t) dt$. □

1.1 Faltungsintegrale

Satz 1.4 (Schur)**.** *Sei $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ eine messbare Funktion, sodass für ein $c > 0$ gilt*

$$\int |K(x,y)| dy \leq c, \quad \textit{und} \quad \int |K(x,y)| dx \leq c \quad \textit{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Für $1 \leq p \leq \infty$ und $f \in L^p$, ist die Funktion Tf, definiert durch

$$Tf(x) := \int K(x,y) f(y) dy \quad \textit{für fast alle } x \in \mathbb{R}^n,$$

in L^p und es gilt

$$\|Tf\|_p \leq c \|f\|_p .$$

Beweis. Für $p = \infty$ ist die Behauptung klar. Sei $p < \infty$ und p' der zu p konjugierte Exponent, also $1/p + 1/p' = 1$. Dann folgt aus der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned} |Tf(x)| &\leq \int |K(x,y)|^{1/p'} |K(x,y)|^{1/p} |f(y)| dy \\ &\leq \left(\int |K(x,y)| dy \right)^{1/p'} \left(\int |K(x,y)| |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \\ &\leq c^{1/p'} \left(\int |K(x,y)| |f(y)|^p dy \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Daraus folgt mit Fubini

$$\begin{aligned} \int |Tf(x)|^p dx &\leq c^{p/p'} \int \int |K(x,y)| |f(y)|^p dy dx \\ &\leq c^{1+p/p'} \int |f(y)|^p dy = c^p \|f\|_p^p , \end{aligned}$$

also die Behauptung des Satzes. □

Definition 1.5. *Seien f und g zwei lokal integrierbare Funktionen. Die* Faltung *von f und g, bezeichnet mit $f * g$, ist definiert durch*

$$(f * g)(x) := \int f(x-y) g(y) dy = \int f(y) g(x-y) dy = (g * f)(x),$$

falls die beiden Integrale existieren.

Als Korollar zu Satz 1.4 erhalten wir nun die sogenannte *Young-Ungleichung* für Faltungen.

Korollar 1.6. *Sei $f \in L^1$ und $g \in L^p$ für $1 \leq p \leq \infty$. Dann ist $f * g \in L^p$ und*

$$\|f * g\|_p \leq \|g\|_p \|f\|_1 .$$

Beweis. Aus Satz 1.4 folgt mit $K(x,y) = f(x-y)$ die Behauptung. □

Lemma 1.7. *Sei $f \in L^p$ für $1 \leq p < \infty$. Dann gilt*

$$\lim_{y \to 0} \|\tau_y f - f\|_p = 0,$$

wobei $\tau_y f$ die Translation $(\tau_y f)(x) = f(x-y)$ bezeichnet.

Beweis. Sei g eine stetige Funktion mit kompaktem Träger K. Dann ist g gleichmäßig stetig, also konvergiert $\tau_y g - g$ gleichmäßig gegen 0 und somit in L^p, da $\tau_y g - g$ kompakten Träger besitzt und das Lebesguemaß einer kompakten Menge endlich ist. Da stetige Funktionen mit kompaktem Träger dicht in L^p liegen, kann der Beweis mit einem $\varepsilon/3$-Argument abgeschlossen werden. □

Bemerkung 1.8. (i) Es gilt $\operatorname{supp}(f*g) \subseteq \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)$, wobei für zwei Mengen A, B die Summe $A + B$ definiert ist durch $A + B := \{x + y : x \in A, y \in B\}$.
(ii) Wenn $f \in C^k$ und die Vertauschung von Differentiation und Integral gerechtfertigt ist, so gilt $D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g$ für $|\alpha| \leq k$. (siehe Übung 1 in Kapitel 1.5) •

Satz 1.9. *Sei $g \in L^1$ mit $\int g = a$. Dann gilt mit $g_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} g(x/\varepsilon)$:*

1. *Wenn $f \in L^p$ für $p < \infty$, dann gilt $\lim_{\varepsilon \to 0} \|f * g_\varepsilon - af\|_p = 0$.*
2. *Wenn f beschränkt und stetig ist dann konvergiert $f * g_\varepsilon$ gleichmäßig auf kompakten Mengen gegen af für $\varepsilon \to 0$.*

Beweis. Wir beginnen mit 1. Es gilt $\int g_\varepsilon = a$ für $\varepsilon > 0$ nach einer Substitution $x \to \varepsilon x$. Es folgt

$$\begin{aligned}
(f * g_\varepsilon)(x) - af(x) &= \int f(x-y) g_\varepsilon(y) dy - \int f(x) g_\varepsilon(y) dy \\
&= \int [f(x-y) - f(x)] g_\varepsilon(y) dy \\
&= \int [f(x-y) - f(x)] \varepsilon^{-n} g_\varepsilon(y/\varepsilon) dy \\
&= \int [f(x-\varepsilon y) - f(x)] g(y) dy \\
&= \int [(\tau_{\varepsilon y} f)(x) - f(x)] g(y) dy. \qquad (1.3)
\end{aligned}$$

Wenn nun $f \in L^p$ für $p < \infty$, dann können wir die Minkowski-Ungleichung für Integrale anwenden und erhalten

$$\|f * g_\varepsilon - af\|_p \leq \int \|\tau_{\varepsilon y} f - f\|_p |g(y)| dy.$$

Die Funktion $y \mapsto \|\tau_{\varepsilon y} f - f\|_p$ ist in ε gleichmäßig beschränkt durch $2\|f\|_p$. Eine Anwendung des Satzes über dominierte Konvergenz liefert mit Lemma 1.7 nun den ersten Punkt des Satzes. Für 2. setzen wir f als beschränkt und stetig voraus. Sei K eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Sei $\delta > 0$ beliebig und wähle eine kompakte Menge $G \subseteq \mathbb{R}^n$ mit

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus G} |g(y)| dy < \delta.$$

Dann gilt mit (1.3)

$$\sup_{x \in K} |(f * g_\varepsilon)(x) - af(x)| \leq 2\delta \|f\|_\infty + \sup_{(x,y) \in K \times G} |f(x - \varepsilon y) - f(x)| \int_G |g|.$$

Da f gleichmäßig stetig ist auf kompakten Mengen, strebt der zweite Term gegen 0 mit $\varepsilon \to 0$. Die Behauptung des Satzes folgt nun aus der Tatsache, dass $\delta > 0$ beliebig war. □

Korollar 1.10. *C_c^∞ ist dicht in L^p für $1 \leq p < \infty$.*

Beweis. Sei Φ wie in (1.1). Sei $a > 0$ so, dass $\int \Phi = 1/a$. Für $f \in L^p$ mit kompaktem Träger gilt nach Bemerkung 1.8 $a(f * \Phi_\varepsilon) \in C_c^\infty$ und nach Satz 1.9 konvergiert $a(f * \Phi_\varepsilon)$ gegen f in L^p mit $\varepsilon \to 0$. Da L^p-Funktionen mit kompaktem Träger dicht in L^p sind, folgt die Behauptung. □

1.2 Fouriertransformation

Definition 1.11. *Sei $f \in L^1$, dann ist die Fouriertransformation gegeben durch*

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) := (2\pi)^{-n/2} \int e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx. \tag{1.4}$$

Weiters definieren wir die inverse Fouriertransformation

$$\mathcal{F}^{-1}f(x) = \check{f}(x) := (2\pi)^{-n/2} \int e^{ix\cdot\xi} f(\xi)d\xi.$$

Bemerkung 1.12. Andere Definitionen der Fouriertransformation unterscheiden sich darin, wo der Faktor 2π platziert wird. Beispielsweise kann man im Integranden $e^{-ix\cdot\xi}$ durch $e^{-2\pi ix\cdot\xi}$ ersetzen. Dies bietet dann den Vorteil, dass vor dem Integral kein Faktor mehr vorhanden ist. •

A priori hängen die Fouriertransformation und die inverse Fouriertransformation nicht zusammen. Der Name suggeriert aber, dass sie zueinander inverse Operationen sind. Wir werden sehen, dass dies tatsächlich in gewissem Sinn erfüllt ist.

Definition 1.13. *Der Raum der $C^\infty(\mathbb{R}^n)$-Funktionen φ, für die gilt*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n : \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| < \infty,$$

heißt Schwartzraum *und wir bezeichnen ihn mit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ oder kurz $\mathcal{S}$. Weiters heißen Elemente aus $\mathcal{S}$* schnell fallende Funktionen*. Für $\varphi \in \mathcal{S}$ setzen wir noch*

$$|\varphi|_{\alpha,\beta} := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)|.$$

Bemerkung 1.14. Für $\varphi \in C^\infty$ gilt, dass $\varphi \in \mathcal{S}$ genau dann, wenn eine (und somit beide) der folgenden Bedingungen erfüllt ist

1. $\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1 + |x|)^m |D^\beta \varphi(x)| < \infty \quad$ für alle $m \in \mathbb{N}, \beta \in \mathbb{N}_0^n$.
2. $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |D^\beta(x^\alpha \varphi(x))| < \infty \quad$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$.

In der Tat folgt die Äquivalenz mit 2. aus der Leibnizformel mit Induktion. Weiters gilt klarerweise (wenn man die Ungleichung $|x^\alpha| \leq |x|^{|\alpha|}$ beachtet) $|x^\alpha| \leq (1 + |x|)^{|\alpha|}$. Auf der anderen Seite hat die strikt positive Funktion

$$x \mapsto \sum_{j=1}^n |x_j|^m$$

ein Minimum $0 < \delta \leq 1$ auf der kompakten Einheitssphäre $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$. Für allgemeine $y \in \mathbb{R}^n$ gibt es $t > 0$ und $x \in S^{n-1}$ mit $y = tx$, also

$$\sum_{j=1}^n |y_j|^m = \sum_{j=1}^n |tx_j|^m = t^m \sum_{j=1}^n |x_j|^m \geq t^m \delta = t^m \delta |x|^m = \delta |y|^m.$$

Nun folgt

$$(1+|x|)^m \le 2^m(1+|x|^m) \le 2^m(1+\delta^{-1}\sum_{j=1}^n |x_j^m|) \le 2^m\delta^{-1}\sum_{\alpha\le m}|x^\alpha|, \tag{1.5}$$

also die Äquivalenz der Definition mit 1. •

Weiters benötigen wir einen Konvergenzbegriff in $\mathcal{S}$.

Definition 1.15. *Eine Folge $\{\varphi_j\}$ in $\mathcal{S}$ konvergiert gegen 0 in $\mathcal{S}$, wenn für alle Multiindizes α, β gilt*

$$\lim_{j\to\infty} |\varphi_j|_{\alpha,\beta} = 0.$$

Es folgt nun aus Bemerkung 1.14, bzw. aus deren Beweis, dass beispielsweise $\varphi_j \to 0$ in $\mathcal{S}$ genau dann wenn

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|)^m |D^\beta \varphi_j(x)| = 0 \qquad \text{für alle } m\in\mathbb{N}, \beta\in\mathbb{N}_0^n.$$

Beispiel 1.16. Für alle $1\le p\le\infty$ folgt aus $\varphi_j \to 0$ in $\mathcal{S}$ die Konvergenz $\varphi_j\to 0$ in L^p. Tatsächlich ist das für $p=\infty$ klar (setze einfach $\alpha=\beta=0$ in der Definition der Konvergenz in $\mathcal{S}$) und für $p<\infty$ gilt

$$\begin{aligned} \|\varphi_j\|_p^p &= \int |\varphi_j(x)|^p dx = \int \frac{|\varphi_j(x)|^p}{(1+|x|)^{mp}}(1+|x|)^{mp}dx \\ &\le \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|)^{mp}|\varphi_j(x)|^p \int \frac{1}{(1+|x|)^{mp}}dx. \end{aligned}$$

Ist m groß genug ($mp>n$), so existiert das rechte Integral und mit der Anmerkung vor Beginn des Beispiels gilt $\|\varphi_j\|_p^p \to 0$. •

Bemerkung 1.17. Ist $\varphi\in\mathcal{S}$, so sind für alle $\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^n$ auch $x^\alpha D^\beta\varphi\in\mathcal{S}$ und $D^\alpha(x^\beta\varphi)\in\mathcal{S}$. Dazu genügt es, zu bemerken, dass für alle $1\le k\le n$ mit φ auch $\partial_{x_k}\varphi$ und $x_k\varphi$ aus $\mathcal{S}$ sind. Der Rest folgt mit Induktion.
Es gilt $C_c^\infty\subset\mathcal{S}$ mit einer echten Inklusion, da etwa $e^{-|\cdot|^2}\in\mathcal{S}$, aber nicht kompakt getragen ist. Weiters ist $\mathcal{S}\subseteq L^p$ für alle $1\le p\le\infty$ (Übung!) und es folgt somit aus Korollar 1.10, dass auch $\mathcal{S}$ dicht in L^p ist für alle $1\le p<\infty$. •

Definition 1.18. *Sei f eine messbare Funktion, die auf $\mathbb{R}^n$ definiert ist. Dann definieren wir für $y\in\mathbb{R}^n$ und $t>0$ die Transformationen*

$$\tau_y f(x) := f(x-y), \quad (M_y f)(x) := e^{ix\cdot y}f(x), \quad f_t(x) := t^{-n}f(x/t)$$

für alle $x\in\mathbb{R}^n$.

Der Hauptgrund für die Wichtigkeit der Fouriertransformation besteht in folgendem Transformationsverhalten bezüglich Ableitungen und der eben definierten Operationen.

Proposition 1.19. *Seien $f, g \in L^1$ und $\varphi \in \mathcal{S}$. Dann ist die Fouriertransformation $\hat{\varphi}$ eine stetige Abbildung von $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{S}$, die Funktionen $\tau_y f, M_y f$ und f_t sind in L^1 und es gilt*

$$\begin{aligned}
\widehat{\tau_y f}(\xi) &= (M_{-y}\hat{f})(\xi), &(1.6)\\
\widehat{M_y f}(\xi) &= (\tau_y \hat{f})(\xi), &(1.7)\\
\widehat{f_t}(\xi) &= \hat{f}(t\xi), &(1.8)\\
\widehat{D^\alpha \varphi}(\xi) &= \xi^\alpha \hat{\varphi}(\xi), &(1.9)\\
(D^\alpha \hat{\varphi})(\xi) &= (\widehat{(-x)^\alpha \varphi})(\xi), &(1.10)\\
\widehat{f * g}(\xi) &= (2\pi)^{n/2}\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi), &(1.11)
\end{aligned}$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ und alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

Beweis. Wir beweisen nur, dass die Fouriertransformation $\mathcal{S}$ stetig in $\mathcal{S}$ abbildet und überlassen den Rest dem Leser zur Übung. Es gilt nach (1.9) und (1.10)

$$D^\beta(\xi^\alpha \hat{\varphi})(\xi) = \{(-x)^\beta D^\alpha \varphi\}\hat{}(\xi).$$

Weiters erhalten wir nach Definition der Fouriertransformation

$$\begin{aligned}
\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\{(-x)^\beta D^\alpha \varphi\}\hat{}(\xi)| &\leq (2\pi)^{-n/2} \|x^\beta D^\alpha \varphi\|_1\\
&\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(1+|x|)^m x^\beta D^\alpha \varphi(x)| \int \frac{1}{(1+|x|)^m} dx.
\end{aligned}$$

Das rechte Integral ist endlich für m hinreichend groß und aus der Konvergenz von φ_j gegen 0 in $\mathcal{S}$ folgt $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(1+|x|)^m x^\beta D^\alpha \varphi_j(x)| \to 0$ nach Definiton bzw. Bemerkung 1.14, also

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |D^\beta(\xi^\alpha \widehat{\varphi_j})(\xi)| \to 0.$$

Da α, β beliebig waren, erhalten wir wieder mit Bemerkung 1.14 die Konvergenz von $\widehat{\varphi_j}$ gegen 0 in $\mathcal{S}$. □

Proposition 1.20 (Riemann-Lebesgue-Lemma)**.** *Sei $f \in L^1$. Dann gilt*

$$\hat{f} \in C_0,$$

wobei C_0 den Raum der stetigen Funktionen $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ bezeichnet, für die gilt

$$\lim_{|x| \to \infty} g(x) = 0.$$

Beweis. Sei $\varphi \in \mathcal{S}$. Dann ist nach dem vorigen Satz $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}$, also in C_0. Da $\mathcal{S}$ dicht in L^1 liegt, wählen wir für $f \in L^1$ eine Folge $\{\varphi_j\}$ in $\mathcal{S}$ mit $\lim_{j \to \infty} \|\varphi_j - f\|_1 = 0$. Dann gilt

$$\|\widehat{\varphi_j} - \hat{f}\|_\infty \leq (2\pi)^{-n/2} \|\varphi_j - f\|_1 \to 0$$

und somit konvergiert $\widehat{\varphi_j}$ gleichmäßig gegen $\hat{f}$. Da C_0 abgeschlossen ist bezüglich gleichmäßiger Konvergenz, folgt die Behauptung. □

Beispiel 1.21. Wir zeigen, dass die Fouriertransformation von $\varphi(x) = e^{-|x|^2/2}$ die Funktion $\hat{\varphi}(\xi) = e^{-|\xi|^2/2}$ ist. Nach Definition gilt

$$\hat{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-ix\cdot\xi - |x|^2/2} dx.$$

Es gilt, dass

$$(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi-|x|^2/2} dx = \prod_{j=1}^{n} (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix_j\xi_j - x_j^2} dx_j,$$

also genügt es, die behauptete Formel nur für $n = 1$ zu beweisen. Sei also ab jetzt $n = 1$. Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi - x^2/2} dx = e^{-\xi^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x+i\xi)^2}{2}} dx.$$

Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt weiter

$$e^{-\xi^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x+i\xi)^2}{2}} dx = e^{-\xi^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Es folgt also mit der Identität $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = (2\pi)^{1/2}$ das Endergebnis

$$\hat{\varphi}(\xi) = e^{-\xi^2/2}.$$

•

Proposition 1.22. *Seien f und g in L^1. Dann gilt*

$$\int \hat{f}(x) g(x) dx = \int f(x) \hat{g}(x) dx.$$

Beweis. Übung. □

Wir kommen nun zur angekündigten Inversionsformel

Satz 1.23. *Sei $f \in \mathcal{S}$. Dann gilt $(\hat{f})\check{} = f$*

Beweis. Nach Definition gilt

$$(\hat{f})\check{}(x) = (2\pi)^{n/2} \int e^{ix\cdot\xi} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Für $\varepsilon > 0$ definieren wir

$$I_\varepsilon(x) := (2\pi)^{-n/2} \int e^{ix\cdot\xi - \frac{\varepsilon^2|\xi|^2}{2}} \hat{f}(\xi) d\xi. \tag{1.12}$$

Nach einer kurzen Rechnung unter Verwendung der Propositionen 1.19, 1.22 und Beispiel 1.21 erhalten wir

$$I_\varepsilon(x) = (2\pi)^{-n/2} (f * \varphi_\varepsilon)(x)$$

mit $\varphi(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$. Aus Satz 1.9 folgt, dass I_ε gegen f in L^p konvergiert mit $\varepsilon \to 0$. Es gibt also eine Folge $\{\varepsilon_n\}$ von positiven reellen Zahlen, sodass $I_{\varepsilon_n} \to f$ fast überall mit $n \to \infty$. Aus (1.12) und dem Satz über dominierte Konvergenz folgt aber

$$I_\varepsilon \to (2\pi)^{-n/2} \int e^{ix\cdot\xi} \hat{f}(\xi) d\xi \quad \text{für } \varepsilon \to 0$$

und somit die Behauptung des Satzes. □

Bemerkung 1.24. Derselbe Beweis funktioniert unter den Hypothesen $f \in L^1, \hat{f} \in L^1$. Dann erhält man $f = (\hat{f})\check{}$ fast überall und somit ist nach dem Riemann-Lebesgue-Lemma f fast überall stetig. Wir verwenden diese Bemerkung im folgenden Satz. •

Satz 1.25 (Plancherel). *Sei $\mathcal{X} := \{f \in L^1 : \hat{f} \in L^1\}$. Für alle $f, g \in \mathcal{X}$ gilt*

$$\left\langle \hat{f}, \hat{g} \right\rangle_2 = \langle f, g \rangle_2$$

und somit insbesondere

$$\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2.$$

Beweis. Seien $f, g \in \mathcal{X}$. Für $h = \overline{\hat{g}}$ gilt mit der Inversionsformel bzw. Bemerkung 1.24 $\widehat{h} = \overline{g}$ (Beweis!). Also folgt mit Proposition 1.22

$$\langle f, g \rangle_2 = \int f\overline{g} = \int f\widehat{h} = \int \widehat{f}h = \int \widehat{f}\overline{\widehat{g}} = \left\langle \widehat{f}, \widehat{g} \right\rangle_2$$

und somit die Behauptung. □

Bemerkung 1.26. Mit dem Satz von Plancherel definieren wir für $f \in L^2$ die Fouriertransformation folgendermaßen. Wähle $f_j \in \mathcal{X}$ mit $\lim_{j\to\infty} \|f_j - f\|_2 = 0$. $\{f_j\}$ ist dann eine Cauchyfolge in L^2. Aufgrund von (1.25) ist auch $\{\widehat{f_j}\}$ eine Cauchyfolge, deren Limes wir als $\hat{f}$ definieren. Nun muss noch überprüft werden, ob für $f \in L^1 \cap L^2$ die alte und die neue Definition übereinstimmen. Wir benutzen dazu die Funktion

$$\varphi(x) = ce^{-|x|^2/2},$$

wobei wir c so wählen, dass $\int \varphi = 1$. Dann gilt $f * \varphi_\varepsilon \in L^1$ und $\widehat{f * \varphi_\varepsilon} \in L^1$, da $\hat{f}$ beschränkt ist und

$$\widehat{f * \varphi_\varepsilon}(\xi) = c\hat{f}(\xi)e^{-\varepsilon^n|\xi|^2/2}.$$

Somit erhalten wir $f * \varphi_\varepsilon \in \mathcal{X}$. Nach Satz 1.9 konvergiert $f * \varphi_\varepsilon$ gegen f in L^1 und L^2 für $\varepsilon \to 0$. Es gilt also $\widehat{f * \varphi_\varepsilon} \to \hat{f}$ in C_0 und in L^2, was die Gleichheit der beiden Definitionen zur Folge hat. •

1.3 Temperierte Distributionen

In dieser Sektion erweitern wir die Fouriertransformation auf temperierte Distributionen.

Definition 1.27. *Ein lineares Funktional T auf $\mathcal{S}$ heißt eine* temperierte Distribution, *wenn für alle Folgen $\{\varphi_j\}$ in $\mathcal{S}$, die in $\mathcal{S}$ gegen 0 konvergieren, gilt*

$$\lim_{j\to\infty} (T, \varphi_j) = 0.$$

Dabei ist (T, φ_j) definiert als $T(\varphi_j)$.

Eine temperierte Distribution ist also ein stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{S}$. Wir bezeichnen daher die Menge aller temperierten Distributionen auf $\mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{S}'$.

Beispiel 1.28. (i) Sei f eine auf $\mathbb{R}^n$ definierte messbare Funktion, sodass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\int \frac{|f(x)|}{(1+|x|)^N} dx < \infty.$$

Dann ist das lineare Funktional

$$(T_f, \varphi) = \int f(x)\varphi(x)dx \quad \varphi \in \mathcal{S}$$

eine temperierte Distribution. Wir identifizieren T_f mit f und schreiben auch (f, φ).
(ii) Somit ist also insbesondere T_f für $f \in L^p$ eine temperierte Distribution.
(iii) Die Delta-Distribution

$$(\delta, \varphi) := \varphi(0), \quad \varphi \in \mathcal{S}$$

ist eine temperierte Distribution. •

Erweiterung von Operationen Es gibt nun eine Standardmethode, wie man Operationen, zuerst definiert auf glatten Funktionen wie Elementen aus $\mathcal{S}$, auf temperierte Distributionen ausdehnt. Sei $S : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ ein linearer Operator und wir setzen voraus, dass es einen zweiten Operator $S' : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ gibt, der stetig ist und für den gilt

$$(S\varphi, \psi) = (\varphi, S'\psi) \quad \text{für alle } \varphi, \psi \in \mathcal{S}.$$

Dann lässt sich S als Operator von $\mathcal{S}'$ nach $\mathcal{S}'$ folgendermaßen definieren. Sei $T \in \mathcal{S}'$, dann setzen wir für $\varphi \in \mathcal{S}$

$$(ST, \varphi) := (T, S'\varphi).$$

Da $S' : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ stetig ist, ist ST eine temperierte Distribution.

Beispiel 1.29. (i) Fouriertransformation. Es gilt nach Proposition 1.22 mit $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$

$$(\hat{\varphi}, \psi) = \int \hat{\varphi}\psi = \int \varphi\hat{\psi} = (\varphi, \hat{\psi}).$$

Aus Proposition 1.19 folgt die Stetigkeit der Fouriertransformation von $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{S}$, also definieren wir

$$(\hat{T}, \varphi) := (T, \hat{\varphi}) \quad \text{und} \quad (\check{T}, \varphi) := (T, \check{\varphi}) \quad \text{für } \varphi \in \mathcal{S}$$

Für $T \in \mathcal{S}'$ nimmt die Inversionsformel folgende Gestalt an

$$((\hat{T})\check{}, \varphi) = (\hat{T}, \check{\varphi}) = (T, (\check{\varphi})\hat{}\,) = (T, \varphi)$$

aufgrund der Inversionsformel für $\varphi \in \mathcal{S}$. Es gilt also $(\hat{T})\check{} = T$ in $\mathcal{S}'$.
(ii) Faltung. Seien $\varphi, \psi, \rho \in \mathcal{S}$. Dann gilt

$$(\rho * \varphi, \psi) = \int \int \rho(y)\varphi(x-y)dy\psi(x)dx = \int \rho(y) \int \psi(x)\varphi(x-y)dxdy = (\rho, \psi * \tilde{\varphi}).$$

Dabei ist $\tilde{\varphi}(x) := \varphi(-x)$. Die Abbildung $\psi \mapsto \psi * \tilde{\varphi}$ ist stetig von $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{S}$, also erweitern wir die Faltung auf $T \in \mathcal{S}'$

$$(T * \varphi, \psi) := (T, \psi * \tilde{\varphi}).$$

•

Wir definieren noch einen Konvergenzbegriff für Distributionen.

Definition 1.30. *Sei $\{T_j\}$ eine Folge in $\mathcal{S}'$. Dann konvergiert T_j gegen T in $\mathcal{S}'$, wenn*

$$\lim_{j\to\infty} (T_j, \varphi) = (T, \varphi) \quad \textit{für alle } \varphi \in \mathcal{S}.$$

Nach Definition ist also die Abbildung $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ folgenstetig.

Beispiel 1.31. Sei $g \in L^1$ und $\int g = a$. Dann gilt

$$\lim_{\varepsilon\to 0} g_\varepsilon = a\delta \quad \text{in } \mathcal{S}',$$

denn für $\varphi \in \mathcal{S}$ erhalten wir

$$(g_\varepsilon, \varphi) = \int g_\varepsilon \varphi = g_\varepsilon * \tilde{\varphi}(0).$$

Jetzt wenden wir den zweiten Punkt von Satz 1.9 an und es ergibt sich

$$g_\varepsilon * \tilde{\varphi}(0) \to a\tilde{\varphi}(0) = a\varphi(0) \quad \text{für } \varepsilon \to 0,$$

was bedeutet $g_\varepsilon \to a\delta$ in $\mathcal{S}'$. •

1.4 Hauptsätze über inverse und implizite Funktionen

Satz 1.32 (Hauptsatz über inverse Funktionen)**.** *Seien $A \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(A, \mathbb{R}^n)$ und $x_0 \in A$ so, dass $Df(x_0)$ ein Isomorphismus ist. Dann existiert eine offene Menge $V \subseteq A$ mit $x_0 \in V$ und eine offene Menge $W \subseteq \mathbb{R}^n$, sodass*

- *$f : V \to W$ ist bijektiv*
- *Die Umkehrfunktion $g : W \to V$ ist stetig differenzierbar und $Dg(y) = (Df(g(y)))^{-1}$.*

$f : V \to W$ ist also ein Diffeomorphismus.

Satz 1.33 (Haupsatz über implizite Funktionen)**.** *Seien $p, q \in \mathbb{N}$, $G \subseteq \mathbb{R}^p$, $H \subseteq \mathbb{R}^q$ offen und $F : G \times H \to \mathbb{R}^q$ stetig differenzierbar. Weiters seien $x_0 \in G$, $y_0 \in H$ so, dass $F(x_0, y_0) = 0$ und $D_2F(x_0, y_0)$ sei ein Isomorphismus, wobei D_2F der Differentiation nach den y (den letzten q Variablen) entspricht. Dann existieren $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ und eine stetig differenzierbare Funktion $f : U_\delta(x_0) \to U_\varepsilon(y_0)$ mit*

- $f(x_0) = y_0$
- $\forall x \in U_\delta(x_0) : F(x, f(x)) = 0$
- *$f(x)$ ist das einzige Element in $U_\varepsilon(y_0)$, das diese Gleichung erfüllt*
- *f ist in x_0 differenzierbar und es gilt* $f'(x_0) = -(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0))^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)$.

1.5 Übungen

1. Erfülle $f : \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{C}$ die Bedingungen
   - $f(\cdot, t)$ ist integrierbar für alle $t \in [0,1]$.
   - $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ existiert für alle x, t
   - Es gibt ein $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit
   $$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \right| \leq g(x) \quad \text{für alle } x, t.$$

   Sei $t_0 \in [0,1]$ beliebig. Man verwende dann den Satz von der dominierten Konvergenz, angewandt auf $h_n(x) = \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0}$ mit $t_n \to t_0$ um zu zeigen, dass die Funktion $F(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x,t)dx$ differenzierbar bei t_0 ist und es gilt
   $$F'(t_0) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)dx.$$

2. Sei α ein Multiindex. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$ die Ungleichung
   $$|x^\alpha| \leq |x|^{|\alpha|}.$$

3. Es gilt für $\psi \in \mathcal{S}$
   $$\overline{D^\alpha \psi(x)} = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \overline{\psi(x)} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

4. Seien α, δ zwei Multiindizes. Dann gilt
   $$\partial^\delta \xi^\alpha = \begin{cases} \frac{\alpha!}{(\alpha-\delta)!} \xi^{\alpha-\delta} & \text{falls } \delta \leq \alpha, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

5. Für alle Multiindizes α und alle $f, g \in C^{|\alpha|}$ gilt
   $$D^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} (D^\beta f)(D^{\alpha-\beta} g).$$

6. Für alle Multiindizes α und alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt
   $$(x+y)^\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^\beta y^{\alpha-\beta}.$$

7. Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ beliebig und $h(t) = \sum_{|\alpha|<N} \frac{(1-t)^{|\alpha|} y^\alpha}{\alpha!} (\partial^\alpha f)(x+ty)$. Man zeige
   $$h'(t) = N \sum_{|\alpha|=N} \frac{(1-t)^{N-1}}{\alpha!} y^\alpha \partial^\alpha f(x+ty).$$

8. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig genau dann wenn

$$\lim_{y\to 0} \|\tau_y f - f\|_\infty = 0.$$

9. Es gilt $\int_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^n} g$ für alle $\varepsilon > 0$, wobei $g_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} g(x/\varepsilon)$.
10. Für $f \in L^1$ gilt die Ungleichung

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)| \le \|f\|_1 .$$

11. Es gilt für alle $1 \le p \le \infty$, dass $\mathcal{S} \subset L^p$. (Polarkoordinaten)
12. Ergänze die noch fehlenden Beweisschritte in Proposition 1.19.
13. Seien $f, g \in \mathcal{S}$. Dann ist $f * g$ ebenfalls in $\mathcal{S}$.
14. Man führe folgende Schritte von Beispiel 1.21 genauer aus
    (a) Für alle $\xi \in \mathbb{R}$ gilt

    $$e^{-\xi^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x+i\xi)^2}{2}} dx = e^{-\xi^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

    (b) $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = (2\pi)^{1/2}$. (Gauß Integral)
    (c) Aus Punkt (b) folgt $\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx = (\pi/a)^{1/2}$ für alle $a > 0$.
15. Alternativ zur Argumentation in Beispiel 1.21 kann die Fouriertransformation von $\psi(x) = e^{-x^2/2}$ ($x \in \mathbb{R}$) auch noch folgendermaßen berechnet werden. Man zeige, dass ψ und $\hat{\psi}$ beide die Differentialgleichung erster Ordnung (mit der gleichen Anfangsbedingung)

$$y'(\xi) + \xi y(\xi) = 0 \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}$$

erfüllen und folgere daraus, dass $\hat{\psi} = \psi$.
16. Beweise Proposition 1.22.
17. Sei $I_\varepsilon(x) = \int e^{ix\cdot\xi - \frac{\varepsilon^2|\xi|^2}{2}} \hat{f}(\xi) d\xi$. Dann gilt

$$I_\varepsilon(x) = f * \varphi_\varepsilon(x) \quad \text{mit } \varphi(x) = e^{-|x|^2/2}.$$

18. Sei $g \in L^1$ und sei $\hat{g} \in L^1$. Dann gilt

$$\hat{\hat{g}} = \overline{g}.$$

19. Zeige die Aussagen von Beispiel 1.28.
20. **Erweiterung von Operationen auf Distributionen.** Man erweitere die folgenden Operatoren, die ursprünglich nur auf Funktionenräumen (wie $\mathcal{S}$ oder L^1) definiert sind, auf temperierte Distributionen
    (a) τ_y für $y \in \mathbb{R}^n$,
    (b) M_y für $y \in \mathbb{R}^n$,
    (c) $\varphi \mapsto \varphi_t$ für $t > 0$,
    (d) $\varphi \mapsto \partial^\alpha \varphi$ für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.
21. Berechne $\widehat{\delta}$.
22. **Die Fouriertransformation von** sgn. Sei $F_0 := \mathrm{pv}\,\frac{1}{x}$, also

$$(F_0, \varphi) := \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Weiters seien $F_\varepsilon(x) = \frac{x}{x^2+\varepsilon^2}$ und $S_\varepsilon(x) = e^{-\varepsilon|x|}\,\mathrm{sgn}\, x$. Es gelten

(a) F_0 ist eine temperierte Distribution,

(b) $\lim_{\varepsilon\to 0} F_\varepsilon = F_0$ in $\mathcal{S}'$,

(c) $\widehat{S_\varepsilon} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} i F_\varepsilon$,

(d) $\widehat{\operatorname{sgn}} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} i F_0$ und somit

$$\widehat{F_0} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{i} \operatorname{sgn}.$$

23. **Die Fouriertransformation der Heaviside-Funktion.** Die Heaviside-Funktion ist definiert als

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x \geq 0, \\ 0, & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Dann gilt

(a) $H = \frac{1+\operatorname{sgn}}{2}$.

(b) $\widehat{H} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta - (2\pi)^{-1/2} i \operatorname{pv} \frac{1}{x}$.

24. **Bessel Potentiale.** Wir betrachten die Differentialgleichung

$$-\Delta u + u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

(a) Benutze Fouriertransformation, um zu zeigen, dass für eine Lösung dieser Gleichung gilt

$$u = \left(\frac{\widehat{f}}{1+|\xi|^2} \right)^{\check{}}.$$

(b) Es folgt also

$$u = (2\pi)^{-n/2}(f * B) \quad \text{mit} \quad \widehat{B} = \frac{1}{1+|\xi|^2}.$$

(c) Es gilt

$$B = (2\pi)^{-n/2} \int_0^\infty e^{-t} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi - t|\xi|^2} d\xi dt.$$

(Hinweis: $\frac{1}{1+|\xi|^2} = \int_0^\infty e^{-t(1+|\xi|^2)} dt$)

(d) Weiters haben wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi - t|\xi|^2} d\xi = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

(e) Kombiniere nun die vorherigen Schritte, um auf das Endergebnis

$$B(x) = 2^{-n/2} \int_0^\infty \frac{e^{-t-\frac{|x|^2}{4t}}}{t^{n/2}} dt$$

zu kommen.

25. **Grundlösung der Wärmeleitungsgleichung.** Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u &= g \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{0\}. \end{aligned}$$

(a) Benutze Fouriertransformation (nur in den Raumvariablen), um zu zeigen, dass für die Lösung u des Anfangswertproblems gilt

$$\widehat{u} = e^{-t|\xi|^2} \widehat{g}.$$

(b) Es gilt $u = (2\pi)^{-n/2}(g * F)$ mit $\widehat{F} = e^{-t|\xi|^2}$.

(c) Es gilt $(e^{-t|\xi|^2})^{\check{}} = (2t)^{-n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$.

(d) Wir erhalten also

$$u(x,t) = (4\pi t)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0.$$

2 Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten

Formulierung des Problems. Gegeben ist eine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und ein Differentialoperator

$$P(D) := \sum_{\alpha \leq m} a_\alpha D^\alpha, \quad a_\alpha \in \mathbb{C}.$$

Wir suchen eine Funktion (oder Distribution) u, sodass

$$P(D)u = f$$

gilt. Die Zahl m heißt die *Ordnung* des Differentialoperators $P(D)$.

Definition 2.1. *Der Differentialoperator $P(D)$ heißt* lokal lösbar bei $x_0 \in \mathbb{R}^n$*, falls eine Umgebung U von x_0 existiert, sodass $P(D)u = f$ für alle $f \in C^\infty$ mit* $\operatorname{supp} f \subseteq U$ *eine Lösung u besitzt.*

Definition 2.2. *Der Differentialoperator $P(D)$ heißt* elliptisch*, falls sein* Hauptsymbol

$$P_m(\xi) := \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \xi^\alpha$$

für alle $\xi \neq 0$ nicht verschwindet.

Proposition 2.3. *Sei $P(D)$ ein Differentialoperator der Ordnung m. Dann ist $P(D)$ genau dann elliptisch, wenn es Konstanten $A, C > 0$ gibt, sodass für alle $|\xi| > C$ die Ungleichung*

$$|P(\xi)| \geq A|\xi|^m$$

erfüllt ist.

Beweis. Sei $P(D)$ elliptisch. Da $P_m(\xi) \neq 0$ für $\xi \neq 0$ nimmt die stetige Funktion P_m auf der kompakten Menge S^{n-1} (Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$) ihr positives Minimum C_1 an. Die Funktion P_m ist außerdem homogen vom Grad m, das heißt für alle $\xi \in \mathbb{R}^n, t > 0$ gilt $P_m(t\xi) = t^m P_m(\xi)$, es gilt also für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$P_m(\xi) = |\xi|^m P\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) \geq C_1 |\xi|^m.$$

Außerdem ist $P(D) - P_m(D)$ vom Grad $m-1$ und erfüllt daher die Abschätzung

$$|P(\xi) - P_m(\xi)| \leq C_2 |\xi|^{m-1}$$

für ein $C_2 > 0$. Es folgt also

$$|P(\xi)| \geq |P_m(\xi)| - |P_m(\xi) - P(\xi)| \geq C_1|\xi|^m - C_2|\xi|^{m-1} \geq \frac{C_1}{2}|\xi|^m \quad \text{für } |\xi| \geq 2C_2C_1^{-1}.$$

Ist $P(D)$ nicht elliptisch, so gibt es ein $\xi_0 \neq 0$ mit $P_m(\xi_0) = 0$. Aufgrund der Homogenität also $P_m(t\xi_0) = 0$ für alle $t > 0$. Daraus folgt aber für alle Vielfachen ξ von ξ_0

$$|P(\xi)| \leq |P_m(\xi)| + |P(\xi) - P_m(\xi)| = |P(\xi) - P_m(\xi)| \leq C_2|\xi|^{m-1},$$

also gibt es keine Konstanten A, C sodass die Ungleichung $|P(\xi)| \geq A|\xi|^m$ für alle $|\xi| > C$ erfüllt ist. $\square$

Bemerkung 2.4. Es gilt auch, dass $P(D)$ genau dann elliptisch ist, wenn es Konstanten $A, C > 0$ gibt, sodass für alle $|\xi| > C$ die Ungleichung

$$|P(\xi)| \geq A(1 + |\xi|)^m$$

gilt. Dabei sind A und C nicht notwendigerweise dieselben Konstanten wie in Proposition 2.3. •

Satz 2.5. *Sei $P(D)$ ein elliptischer Differentialoperator der Ordnung m. Dann gilt*

1. *Es gibt ein $R \in C^\infty$ sodass für alle rechten Seiten $f \in \mathcal{S}$ ein $u_0 \in C^\infty$ mit*

   $$(P(D)u_0)(x) = f(x) + (R * f)(x), \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n$$

   existiert.

2. *Für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ist der Differentialoperator $P(D)$ lokal lösbar bei x_0.*

Bemerkung 2.6. Formal gilt aufgrund von Proposition 1.19 (Gleichung (1.9)) die Gleichung $P(D)u = f$ genau dann, wenn $P(\xi)\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)$. Durchdividieren und Fourierinversion liefert die formale Gleichung

$$u = \left(\frac{\hat{f}}{P}\right)^{\check{}}.$$

Problematisch sind hierbei natürlich die Nullstellen von P. Dies ist der Punkt, wo die Elliptizität ins Spiel kommt, da wir für ξ groß genug eine Abschätzung nach unten für $P(\xi)$ besitzen. •

Beweis. 1. Sei $0 \leq \chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit folgenden Eigenschaften

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |x| \geq 2C, \\ 0 & \text{falls } |x| \leq C, \end{cases}$$

wobei C die Konstante aus Bemerkung 2.4 bezeichnet. Dann definieren wir

$$u_0(x) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)} \chi(\xi) d\xi = \left(\frac{\hat{f}\chi}{P}\right)^{\check{}} = f * \left((2\pi)^{-n/2} \frac{\chi}{P}\right)^{\check{}}. \tag{2.1}$$

Wir werden nun zeigen, dass dieses $u_0(x)$ die Bedingung unter 1. erfüllt. Mit Proposition 1.19 folgt nämlich

$$(P(D)u_0)^{\hat{}}(\xi) = P(\xi) \cdot \widehat{u_0}(\xi) = \hat{f}(\xi)\chi(\xi) = \hat{f}(\xi) + \hat{f}(\xi)(\chi(\xi) - 1).$$

Weiters erhalten wir wieder aufgrund von Proposition 1.19

$$P(D)u_0 = f + (\hat{f}(\chi - 1))^{\check{}} = f + (2\pi)^{-n/2} f * (\chi - 1)^{\check{}},$$

also die Behauptung mit $R = (2\pi)^{-n/2}(\chi - 1)^{\check{}}$. (beachte, dass $R \in \mathcal{S}$, da $\chi - 1 \in C_c^\infty \subset \mathcal{S}$).

2. Sei $\delta > 0$ und $f \in \mathcal{S}$ so, dass $\operatorname{supp} f \subset U(x_0, \delta/2)$. Wir wollen nun $g \in \mathcal{S}$ finden mit $\operatorname{supp} g \subset U(x_0, \delta)$, sodass
$$g + \psi \cdot (R * (\varphi g)) = f. \tag{2.2}$$
Dabei ist ψ eine Funktion in C_c^∞ mit $\psi(x) = 1$ für $|x - x_0| < \delta/2$ und $\psi(x) = 0$ für $|x - x_0| > \delta$ und φ eine Funktion in C_c^∞ mit $\varphi(x) = 1$ für $|x - x_0| < \delta$ und $\varphi(x) = 0$ für $|x - x_0| > 2\delta$. Sind $\operatorname{supp} g \subset U(x_0, \delta)$ und $x \in U(x_0, \delta/2)$, so folgt also aus den Eigenschaften von ψ und φ und Gleichung (2.2)
$$g(x) + (R * g)(x) = f(x).$$
Wenden wir nun den ersten Teil des Satzes für die rechte Seite g (vorausgesetzt $g \in \mathcal{S}$) an, so erhalten wir eine Funktion u_0 mit
$$P(D)u_0(x) = g(x) + (R * g)(x) = f(x) \quad \text{für } x \in U(x_0, \delta/2). \tag{2.3}$$
Wir müssen nun nur noch zeigen, dass es ein g gibt, das (2.2) erfüllt. Dazu schreiben wir diese Gleichung um in
$$g(x) + \int \psi(x)R(x - y)\varphi(y)g(y)dy = f(x), \tag{2.4}$$
was äquivalent ist zu $(\mathrm{Id} + T)g = f$ mit dem Integraloperator $Tg(x) = \int \psi(x)R(x - y)\varphi(y)g(y)dy$. Betrachten wir T als Operator von L^2 nach L^2, so gilt
$$\|T\| \leq \int\int |\psi(x)R(x - y)\varphi(y)|^2 dxdy.$$
Wählen wir also δ so klein, dass dieses Integral kleiner als 1 wird, so ist $\mathrm{Id} + T$ invertierbar und es gilt
$$g = \sum_{k=0}^{\infty} (-T)^k f.$$
Aus (2.4) folgt, dass $g \in C_c^\infty$. Mit (2.3) folgt also die Behauptung des Satzes. □

Bemerkung 2.7. (i) Es ist sogar jeder Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten lokal lösbar mit einer C^∞-Funktion u. Dieses Resultat ist eng verbunden mit den Satz von *Malgrange-Ehrenpreis*, der garantiert, dass jeder Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten eine Grundlösung besitzt. Eine Distribution K heißt dabei Grundlösung eines Differentialoperators $P(D)$, falls $P(D)K = \delta$. Da δ neutral bezüglich der Faltung ist, erhalten wir für die Gleichung $P(D)u = f$ eine Lösung $u = K * f$, da
$$P(D)u = P(D)(K * f) = (P(D)K) * f = \delta * f = f.$$
(ii) Die Funktion $w = \left((2\pi)^{-n/2}\frac{\chi}{P}\right)^{\check{}}$ aus (2.1) heißt eine *Parametrix* des Differentialoperators $P(D)$. Sie ist eine Verallgemeinerung des Begriffs einer Grundlösung und sie erfüllt
$$P(D)w = \delta + R,$$
wobei R eine $C^\infty-$Funktion ist. Diese „approximierende Inverse“ lässt sich verallgemeinern auf *elliptische Pseudodifferentialoperatoren* (siehe Kapitel 3). •

2.1 Übungen

1. Zeige, dass $P(D)$ genau dann elliptisch ist, wenn es Konstanten $A', C' > 0$ gibt, sodass für alle $|\xi| > C'$ die Ungleichung
$$|P(\xi)| \geq A'(1 + |\xi|)^m$$
gilt.

2. Sei $P(\xi) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_i\xi_j + \sum_{i=1}^n b_i\xi_i + c$. Dann ist $P(D)$ genau dann elliptisch, wenn $A = (a_{ij})$ positiv oder negativ definit ist.

3. **Oberfläche der Einheitssphäre in** $\mathbb{R}^n$ Verwende die Formel für Integration in Polarkoordinaten für die Funktion $e^{-|x|^2}$, um für die Oberfläche der Einheitssphäre im $\mathbb{R}^n$ die Formel
$$\sigma(S^{n-1}) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$
zu zeigen, wobei $\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ die Gammafunktion bezeichnet.

4. **Volumen der Einheitskugel in** $\mathbb{R}^n$ Verwende abermals Integration in Polarkoordinaten, um zu zeigen, dass das Volumen ω_n der Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$ mit der Oberfläche der Einheitssphäre S^{n-1} über die Formel
$$n\omega_n = \sigma(S^{n-1})$$
in Beziehung steht.

5. **Grundlösung des Laplace-Operators** Sei $n \geq 3$ und F^ε, F definiert als
$$F(x) = \frac{|x|^{2-n}}{\sigma(S^{n-1})(2-n)}, \quad F^\varepsilon(x) = \frac{(|x|^2 + \varepsilon^2)^{(2-n)/2}}{\sigma(S^{n-1})(2-n)},$$
wobei $\sigma(S^{n-1}) = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ die Oberfläche der Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

   (a) $\Delta F^\varepsilon(x) = g_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}g(x/\varepsilon)$, wobei $g(x) = \frac{n}{\sigma(S^{n-1})}(|x|^2 + 1)^{-(n+2)/2}$.

   (b) Verwende Integration in Polarkoordinaten und die Substitution $s = r^2/(r^2 + 1)$, um $\int g = 1$ zu zeigen.

   (c) Es gilt $F^\varepsilon \to F$ in $\mathcal{S}'$ (dominierte Konvergenz).

   (d) Verwende Beispiel 1.31 um zu folgern $\Delta F = \delta$.

3 Pseudodifferentialoperatoren

3.1 Motivation, Definitionen

Wir erinnern an die Definition eines linearen Differentialoperators
$$P(x, D) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x)D^\alpha, \tag{3.1}$$
mit $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $a_\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Das zugehörige Symbol war definiert als
$$P(x, \xi) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x)\xi^\alpha, \tag{3.2}$$

mit $\xi \in \mathbb{R}^n$. Wir können mit der Fourierinversionsformel den Operator $P(x, D)$ in alternativer Form

$$(P(x,D)\varphi)(x) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D^\alpha \varphi(x) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) (\widehat{D^\alpha\varphi})\check{}(x) \tag{3.3}$$

$$= \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)(\xi^\alpha \hat{\varphi})\check{}(x) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{ix\cdot\xi} P(x,\xi)\hat{\varphi}(\xi) d\xi. \tag{3.4}$$

schreiben. Damit haben wir den partiellen Differentialoperator $P(x, D)$ mit Hilfe seines Symbols und der Fouriertransformation dargestellt. Diese Darstellung legt nahe, dass wir allgemeinere Operatoren als Differentialoperatoren bekommen können, wenn wir das Symbol $P(x, \xi)$ durch allgemeinere Symbole $\sigma(x, \xi)$, die keine Polynome in ξ mehr sind, ersetzen. Die Operatoren die man so erhält, werden Pseudodifferentialoperatoren genannt. Um eine brauchbare Klasse von Operatoren zu erhalten ist es notwendig, bestimmte Bedingungen an die Funktionen $\sigma(x, \xi)$ zu stellen. Viele verschiedene Bedingungen wären möglich, die zu verschiedenen Klassen von Pseudodifferentialoperatoren führen würden. Hier behandeln wir folgende Klasse

Definition 3.1 (Symbolklasse). *Sei $m \in \mathbb{R}$. Wir definieren die* Symbolklasse S^m *als die Menge aller Funktionen σ aus $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, sodass für alle Multiindizes α und β eine positive Konstante $C_{\alpha,\beta}$ existiert, für die gilt:*

$$\left|(D_x^\alpha D_\xi^\beta \sigma)(x,\xi)\right| \le C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\beta|}, \quad x,\xi \in \mathbb{R}^n.$$

Eine Funktion σ in S^m heißt Symbol der Ordnung *m.*

Bemerkung 3.2. Da $S^k \subset S^m$ für $k < m$, führen wir zusätzlich die Notation $S^{-\infty} := \bigcap_{m\in\mathbb{R}} S^m$ ein. •

Die Rechnung in (3.4) legt nun folgende Definition eines Pseudodifferentialoperators nahe.

Definition 3.3. *Sei $\sigma \in S^m$ für ein $m \in \mathbb{R}$. Der (zu σ gehörende)* Pseudodifferentialoperator *T_σ ist definiert durch*

$$(T_\sigma\varphi)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\sigma(x,\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi, \quad \varphi \in \mathcal{S}. \tag{3.5}$$

Beispiel 3.4. (i) $P(x, D)$ wie in (3.1) ist ein Pseudodifferentialoperator, wenn alle Koeffizientenfunktionen $a_\alpha(x)$ in C^∞ sind und alle Ableitungen dieser beschränkt sind. In der Tat gilt für $\gamma, \delta \in \mathbb{N}_0^n$

$$|D_x^\gamma D_\xi^\delta P(x,\xi)| \le \sum_{|\alpha|\le m} |D^\gamma a_\alpha(x)||\partial^\delta \xi^\alpha| \le \sum_{|\alpha|\le m} A_{\alpha,\gamma}\frac{\alpha!}{(\alpha-\delta)!}|\xi^{\alpha-\delta}|, \tag{3.6}$$

wobei

$$A_{\alpha,\gamma} := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |D^\gamma a_\alpha(x)|$$

gesetzt und die Identität

$$\partial^\delta \xi^\alpha = \begin{cases} \frac{\alpha!}{(\alpha-\delta)!}\xi^{\alpha-\delta} & \text{falls } \delta \leq \alpha, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{3.7}$$

verwendet wurde. Aus (3.6) und Definition 3.1 folgt nun, dass $P(x, D)$ tatsächlich ein Pseudodifferentialoperator ist.
(ii) Sei $\sigma(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{m/2}, m \in \mathbb{R}$. Dann ist $\sigma \in S^m$ und T_σ ist ein Pseudodifferentialoperator. T_σ bezeichnet man auch oft mit $(\mathrm{Id} - \Delta)^{m/2}$. •

3.2 Einfache Eigenschaften von Pseudodifferentialoperatoren

Proposition 3.5 (Identitätssatz)**.** *Seien $\sigma, \tau \in S^m$ und $(T_\sigma\varphi)(x) = (T_\tau\varphi)(x)$ für alle $\varphi \in \mathcal{S}$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt $\sigma = \tau$.*

Beweis. Die Annahme liefert unmittelbar

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \left[\sigma(x, \xi) - \tau(x, \xi)\right] \hat{\varphi}(\xi) d\xi = 0, \ \ \varphi \in \mathcal{S}.$$

Da die Fouriertransformation von $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{S}$ bijektiv ist, folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \left[\sigma(x, \xi) - \tau(x, \xi)\right] \varphi(\xi) d\xi = 0, \ \ \varphi \in \mathcal{S}.$$

Es folgt also für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$e^{ix\cdot\xi} \left[\sigma(x, \xi) - \tau(x, \xi)\right] \equiv 0$$

als Funktion von ξ (Übung!). Da aber $e^{ix\cdot\xi}$ nirgends verschwindet, folgt die Behauptung. □

Proposition 3.6. *Sei $\sigma \in S^m$. Dann gilt: T_σ bildet $\mathcal{S}$ stetig auf $\mathcal{S}$ ab.*

Beweis. Sei $\varphi \in \mathcal{S}$. Wir zeigen für alle Multiindizes α und β, dass

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \left(D^\beta \left(T_\sigma\varphi\right)\right)(x) \right| < \infty.$$

Die Stetigkeit von T_σ ergibt sich dann aus der erhaltenen Abschätzung. Unter Verwendung der Leibnizformel und partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}
(2\pi)^{n/2} x^\alpha \left(D^\beta \left(T_\sigma\varphi\right)\right)(x) &= x^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} D_x^\beta (e^{ix\cdot\xi}\sigma)\hat{\varphi}(\xi) d\xi \\
&= x^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\gamma\leq\beta} \binom{\beta}{\gamma} \xi^\gamma e^{ix\cdot\xi} (D_x^{\beta-\gamma}\sigma)\hat{\varphi}(\xi) d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\gamma\leq\beta} \binom{\beta}{\gamma} \xi^\gamma (D_\xi^\alpha e^{ix\cdot\xi})(D_x^{\beta-\gamma}\sigma)\hat{\varphi}(\xi) d\xi \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\gamma\leq\beta} \binom{\beta}{\gamma} e^{ix\cdot\xi} D_\xi^\alpha \left[(D_x^{\beta-\gamma}\sigma)\xi^\gamma\hat{\varphi}(\xi)\right] d\xi \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\gamma\leq\beta} \sum_{\delta\leq\alpha} \binom{\beta}{\gamma} \binom{\alpha}{\delta} \qquad (3.8) \\
&\qquad e^{ix\cdot\xi} \left(D_\xi^{\alpha-\delta} D_x^{\beta-\gamma}\sigma\right) D_\xi^\delta (\xi^\gamma \hat{\varphi}(\xi)) d\xi.
\end{aligned}$$

Verwenden wir nun Definition 3.1 und die Tatsache, dass $\sigma \in S^m$, so können wir positive Konstanten $C_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ finden, sodass

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha \left(D^\beta \left(T_\sigma\varphi\right)\right)(x)\right| \leq \sum_{\gamma\leq\beta}\sum_{\delta\leq\alpha} C_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|+|\delta|}|D_\xi^\delta(\xi^\gamma\hat{\varphi}(\xi))|d\xi.$$

Da $\varphi \in \mathcal{S}$, und somit $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}$, folgt die Behauptung. □

Bemerkung 3.7. Im Kontrast zu Proposition 3.6 gilt für $\sigma \in S^m$ und $\varphi \in C_c^\infty$ im allgemeinen *nicht* $T_\sigma\varphi \in C_c^\infty$. Sei etwa $\sigma(\xi) = e^{-|\xi|^2/2}$. Dann gilt

$$T_\sigma\varphi = \left(e^{-|\xi|^2/2}\hat{\varphi}(\xi)\right)^{\check{}} = e^{-|\cdot|/2} * \varphi$$

aufgrund von Beispiel 1.21. Ist etwa $\varphi(x) = \Phi(x)$, wobei Φ wie in (1.1) definiert ist, so gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$(T_\sigma\varphi)(x) > 0,$$

also $T_\sigma\varphi \notin C_c^\infty$. •

3.3 Asymptotische Entwicklung des Symbols

Definition 3.8. *Sei $\sigma \in S^m$. Wenn wir eine Folge $\sigma_j \in S^{m_j}$ finden können, mit*

$$m = m_0 > m_1 > m_2 > \ldots > m_j \to -\infty, \quad j \to \infty,$$

sodass

$$\sigma - \sum_{j=0}^{N-1}\sigma_j \in S^{m_N} \tag{3.9}$$

für alle positiven ganzen Zahlen N gilt, dann nennen wir $\sum_{j=0}^\infty \sigma_j$ eine asymptotische Entwicklung *von σ und wir schreiben*

$$\sigma \sim \sum_{j=0}^\infty \sigma_j$$

Satz 3.9. *Sei $m = m_0 > m_1 > m_2 > \ldots > m_j \to -\infty$, für $j \to \infty$ und $\sigma_j \in S^{m_j}$. Dann gibt es ein Symbol $\sigma \in S^{m_0}$ sodass $\sigma \sim \sum_{j=0}^\infty \sigma_j$. Ist τ ein anderes Symbol mit derselben asymptotischen Entwicklung, dann gilt $\sigma - \tau \in S^{-\infty}$.*

Beweis. Sei $\psi \in C^\infty$ mit $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi(x) = 0$ für $|x| \leq 1$ und $\psi(x) = 1$ für $|x| \geq 2$. Sei nun $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ mit $\varepsilon_0 < 1$ eine fallende Folge von positiven Zahlen, sodass für $|\alpha+\beta| \leq j$ die Ungleichung

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta\left[\psi(\varepsilon_j\xi)\sigma_j(x,\xi)\right]| \leq 2^{-j}(1+|\xi|)^{m_j+1-|\alpha|} \tag{3.10}$$

für alle $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ gilt. Um (3.10) zu beweisen, beachte dass aus den Eigenschaften von ψ (insbesondere aus $\operatorname{supp}\partial^\alpha[\psi(\varepsilon_j\cdot)] \subseteq [\varepsilon_j^{-1}, 2\varepsilon_j^{-1}]$ und aus der Vergleichbarkeit von ε_j und $1+|\xi|$ auf dem Träger von $\partial^\alpha\psi(\varepsilon_j\cdot)$) die Abschätzung

$$|\partial_\xi^\alpha[\psi(\varepsilon_j\xi)]| = \varepsilon_j^{|\alpha|}|\partial^\alpha\psi(\varepsilon_j\xi)| \leq C_\alpha(1+|\xi|)^{-|\alpha|}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \tag{3.11}$$

für die Konstante $C_\alpha = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \psi(\xi)|$ folgt. Der Rest ist dann eine Anwendung der Leibnizformel und ein geeignetes Wählen der ε_j. Das Symbol

$$\sigma(x,\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi(\varepsilon_j \xi)\sigma_j(x,\xi)$$

hat dann die gewünschte asymptotische Entwicklung. Wir zerlegen σ in

$$\sigma(x,\xi) = \sum_{j=0}^{j_0-1} \psi(\varepsilon_j\xi)\sigma_j(x,\xi) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \psi(\varepsilon_j\xi)\sigma_j(x,\xi) =: I(x,\xi) + J(x,\xi).$$

Da I eine endliche Summe ist, folgt mit (3.11) $I \in S^{m_0}$. Für J gilt mit zwei Multiindizes α, β und j_0 hinreichend groß mit (3.10)

$$\begin{aligned} |(D_\xi^\alpha D_x^\beta J)(x,\xi)| &\leq \sum_{j=j_0}^{\infty} |D_\xi^\alpha D_x^\beta [\psi(\varepsilon_j\xi)\sigma_j(x,\xi)]| \\ &\leq \sum_{j=j_0}^{\infty} 2^{-j}(1+|\xi|)^{m_j-|\alpha|+1} \leq 2^{-j_0+1}(1+|\xi|)^{m_0-|\alpha|}, \end{aligned}$$

also auch $J \in S^{m_0}$ und somit $\sigma = I + J \in S^{m_0}$. Es fehlt noch die asymptotische Entwicklung (3.9), die aber aus der Identität

$$(\sigma - \sum_{j=0}^{N-1} \sigma_j)(x,\xi) = \sum_{j=0}^{N-1} [\psi(\varepsilon_j\xi) - 1]\sigma_j(x,\xi) + \sum_{j=N}^{\infty} \psi(\varepsilon_j\xi)\sigma_j(x,\xi) =: K + L$$

folgt, da $K \in S^{-\infty}$ (da $\psi(\varepsilon_j\cdot) - 1 \in C_c^\infty$, folgt das mit Übung 3) und L mit derselben Argumentation wie oben für σ in S^{m_N} liegt. Nun noch zur Eindeutigkeit: Ist τ ein anderes Symbol mit der gleichen asymptotischen Entwicklung wie σ, so gilt für alle $N \in \mathbb{N}$

$$\sigma - \tau = [\sigma - \sum_{j=0}^{N-1} \sigma_j] - [\tau - \sum_{j=0}^{N-1} \sigma_j] \in S^{m_N},$$

also $\sigma - \tau \in S^{-\infty}$. □

3.4 Partition der Eins, Lokalisierung im Frequenzbereich

Satz 3.10 (Partition der Eins). *Es existiert eine Folge $(\varphi_k)_{k=0}^\infty$ in $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ sodass*

1. $0 \leq \varphi_k(\xi) \leq 1$ *für alle* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *und* $k \in \mathbb{N}_0$.
2. $\sum_{k=0}^\infty \varphi_k(\xi) = 1$ *für alle* $\xi \in \mathbb{R}^n$.
3. *Für alle* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *gilt für mindestens ein und höchstens zwei Indizes* $k \in \mathbb{N}$, *dass* $\varphi_k(\xi) \neq 0$.
4. $\operatorname{supp}(\varphi_0) \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 2\}$

5. $\operatorname{supp}(\varphi_k) \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^{k-1} \leq |\xi| \leq 2^{k+1}\}$ *für* $k \geq 1$.

6. *Für alle Multiindizes* α *existiert eine Konstante* $A_\alpha > 0$ *sodass für alle* $k \in \mathbb{N}_0$ *die Ungleichung*
$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |(\partial^\alpha \varphi_k)(\xi)| \leq A_\alpha 2^{-k|\alpha|}$$
erfüllt ist.

Beweis. Sei $\varphi_0 \in C_c^\infty$ beliebig mit $\varphi_0(\xi) = 1$ für $|\xi| \leq 1$ und mit $\varphi_0(\xi) = 0$ für $|\xi| \geq 2$. Wir definieren dann $\psi(\xi) = \varphi_0(\xi) - \varphi_0(2\xi)$ und in weiterer Folge für $k \geq 1$ $\varphi_k(\xi) = \psi(2^{-k}\xi)$. Dann sind alle geforderten Eigenschaften erfüllt. □

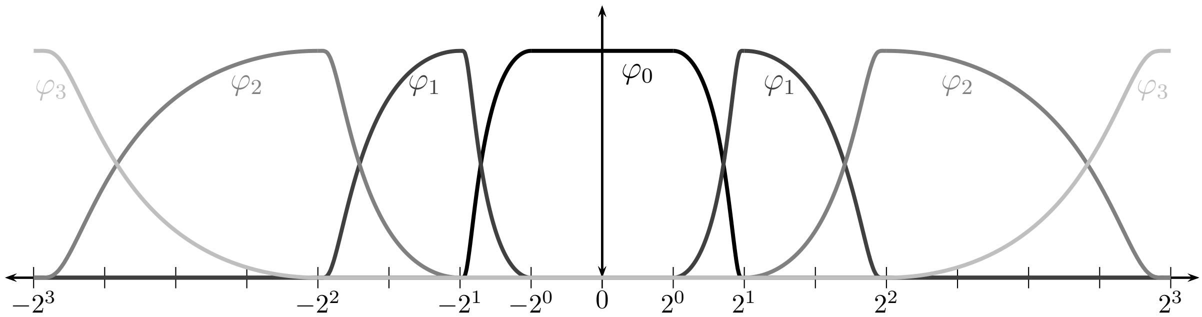

Abbildung 1: Partition der Eins mit den Eigenschaften von Satz 3.10

Basierend auf dieser Partition der Eins zerlegen wir den Frequenzbereich eines Symbols in dyadische Kreisringe und definieren

Definition 3.11. *Sei* $\sigma \in S^m$ *und* $k \in \mathbb{N}_0$, *dann schreiben wir:*

$$\sigma_k(x,\xi) := \sigma(x,\xi)\varphi_k(\xi), \tag{3.12}$$
$$K_k(x,z) := (2\pi)^{-n/2} \int e^{iz\cdot\xi}\sigma_k(x,\xi)d\xi = \check{\sigma_k(x,\cdot)}(z), \tag{3.13}$$

wobei φ_k *eine Partition der Eins der Bauart von Satz 3.10 ist.*

Bemerkung 3.12. (i) Der Grund für diese Zerlegung besteht darin, dass für $\sigma \in S^m$ das Integral $\int e^{iz\cdot\xi}\sigma(x,\xi)d\xi$ im allgemeinen nicht absolut konvergiert, bzw. als inverse Fouriertransformation einer langsam wachsenden Funktion nur eine temperierte Distribution ist.
(ii) Sei $x \in \mathbb{R}^n$ fix. Da $\psi(z) = K_k(x,z)$ die inverse Fouriertransformation von $\sigma_k(x,\cdot) \in C_c^\infty$ ist, folgt dass $\psi \in \mathcal{S}$. •

Für die Kerne K_k erhalten wir nun folgende Abschätzung

Proposition 3.13. *Sei* $\sigma \in S^m$, *dann gibt es für alle* $N \in \mathbb{N}$ *und alle Multiindizes* α, β *eine Konstante* A, *sodass die Abschätzung*
$$\int |z|^N |\partial_x^\beta \partial_z^\alpha K_k(x,z)| dz \leq A 2^{k(m+|\alpha|-N)}$$
für alle $k \in \mathbb{N}_0$ *und alle* $x \in \mathbb{R}^n$ *gilt.*

Beweis. **Schritt 1: Eine L^2-Form der Ungleichung.** Wir beweisen zuerst eine L^2-Form der Ungleichung. Dies hat den Vorteil, dass wir mit dem Satz von Plancherel Abschätzungen über K_k auf Abschätzungen über σ zurückführen können. Wir erhalten also für einen Multiindex γ mit Plancherel, der Leibnizformel und den Eigenschaften der Partition der Eins

$$\int |z^\gamma \partial_x^\beta \partial_z^\alpha K_k|^2 dz = \int |\partial_\xi^\gamma [\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma_k(x,\xi)]|^2 d\xi \tag{3.14}$$

$$= \int_{\operatorname{supp}\varphi_k} \left| \sum_{\gamma' \leq \gamma} \binom{\gamma}{\gamma'} \partial_\xi^{\gamma'} [\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma][\partial_\xi^{\gamma-\gamma'} \varphi_k(\xi)] \right|^2 d\xi. \tag{3.15}$$

Die Eigenschaften der Partition der Eins liefern eine Konstante $A_{\gamma-\gamma'}$ sodass $|\partial_\xi^{\gamma-\gamma'} \varphi_k(\xi)| \leq A_{\gamma-\gamma'} 2^{-k|\gamma-\gamma'|}$. Weiters ist $\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma$ ein Symbol in $S^{m+|\alpha|}$ und somit gilt die Abschätzung

$$|\partial_\xi^{\gamma'} [\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)]| \leq C(1+|\xi|)^{m+|\alpha|-|\gamma'|}$$

mit einer Konstanten C. Zusätzlich gilt auf dem Träger von φ_k per Definition $1+|\xi| \leq 2^{k+2}$. Wenn wir noch beachten, dass das Volumen der Menge $\operatorname{supp}\varphi_k$ nach Definition durch $\omega_n \cdot 2^{(k+1)n}$ beschränkt ist, wobei ω_n das Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet, so erhalten wir durch Zusammenfassen der Konstanten in ein $A_{\alpha,\beta,\gamma,m,n}$ und (3.15) aus diesen Abschätzungen

$$\int |z^\gamma (\partial_x^\beta \partial_z^\alpha K_k)(x,z)|^2 dz \leq A_{\alpha,\beta,\gamma,m,n} 2^{k(n+2m+2|\alpha|-2|\gamma|)}. \tag{3.16}$$

Nun folgt aus der Ungleichung (Übung!)

$$|z|^{2N} \leq n^N \sum_{|\gamma|=N} |z^\gamma|^2, \quad z \in \mathbb{R}^n \tag{3.17}$$

und (3.16) mit einer neuen Konstanten A_1 (nur abhängig von m, n, N, α, β) die L^2–Abschätzung

$$\int |z|^{2N} |\partial_x^\beta \partial_z^\alpha K_k(x,z)|^2 dz \leq n^N \sum_{|\gamma|=N} \int |z^\gamma \partial_x^\beta \partial_z^\alpha K_k(x,z)|^2 dz \leq A_1 2^{k(n+2m+2|\alpha|-2N)}.$$

Schritt 2: Die L^1–Form der Ungleichung Wir müssen nun das Integral

$$\int |z|^N |(\partial_x^\beta \partial_z^\alpha K_k)(x,z)| dz =: \int f_k(x,z) dz$$

abschätzen. Dazu spalten wir es in der Art

$$\int f_k(x,z)dz = \int_{|z|\leq 2^{-k}} f_k(x,z)dz + \int_{|z|>2^{-k}} f_k(x,z)dz =: I_1 + I_2$$

auf und schätzen beide Teile getrennt ab. Für I_1 folgt mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung und dem ersten Schritt des Beweises

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \left(\int f_k(x,z)^2 dz \right)^{1/2} \left(\int_{|z|\leq 2^{-k}} \right)^{1/2} \\ &\leq A_3 2^{k(\frac{n}{2}+m+|\alpha|-N)} 2^{-\frac{nk}{2}} = A_3 2^{k(m+|\alpha|-N)} \end{aligned}$$

mit einer neuen Konstanten A_3, die nur von m, n, N, α, β abhängt. Für I_2 folgt wieder mit Cauchy-Schwarz und der Aufspaltung $f_k = |z|^n f_k |z|^{-n}$

$$I_2 \leq \left(\int |z|^{2n} f_k^2(x,z) dz \right)^{1/2} \left(\int_{|z|>2^{-k}} |z|^{-2n} \right)^{1/2} =: J_1 \cdot J_2.$$

Nun gilt wiederum nach dem ersten Teil des Beweises $J_1 \leq A_4 2^{k(\frac{n}{2}+m+|\alpha|-N-n)}$ mit einer Konstanten A_4 und J_2 transformieren wir auf Polarkoordinaten

$$J_2^2 = |S^{n-1}| \int_{2^{-k}}^{\infty} r^{-2n} r^{n-1} dr = |S^{n-1}| 2^{nk}/n.$$

Dabei bezeichnet $|S^{n-1}|$ die Oberfläche der Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$. Es folgt also $I_2 \leq A_5 2^{k(m+|\alpha|-N)}$. Kombinieren wir dies mit der Abschätzung für I_1, so folgt die Behauptung der Proposition. $\square$

3.5 Produkt von Pseudodifferentialoperatoren

Analog zur Hintereinanderausführung von Differentialoperatoren wollen wir nun die Hintereinanderausführung (Produkt) von Pseudodifferentialoperatoren behandeln. Wie wir sehen werden ist das Produkt $T_\sigma T_\tau := T_\sigma \circ T_\tau$ von zwei Pseudodifferentialoperatoren wieder ein solcher mit einem Symbol λ, dessen asymptotische Entwicklung explizit angegeben werden kann. Zur Motivation betrachten wir dieses Produkt für die Symbole

$$\sigma = \sum_{|\alpha| \leq m_1} a_\alpha(x) \xi^\alpha, \quad \tau = \sum_{|\beta| \leq m_2} b_\beta(x) \xi^\beta.$$

Es ist also

$$T_\sigma = \sum_{|\alpha| \leq m_1} a_\alpha(x) D^\alpha, \quad T_\tau = \sum_{|\beta| \leq m_2} b_\beta(x) D^\beta.$$

Wenn wir einsetzen erhalten wir mit der Leibnizformel

$$T_\sigma T_\tau = \sum_{|\alpha| \leq m_1, |\beta| \leq m_2} a_\alpha(x) D^\alpha (b_\beta(x) D^\beta) = \sum_{\alpha, \beta} a_\alpha(x) \sum_{\mu \leq \alpha} \binom{\alpha}{\mu} (D^\mu b_\beta)(x) D^{\beta+\alpha-\mu} =: T_\lambda,$$

wobei λ das Symbol des Operators $T_\sigma T_\tau$ bezeichnet. Da

$$D_x^\mu \tau = \sum_{|\beta| \leq m_2} D^\mu b_\beta(x) \xi^\beta \quad \text{und} \quad D_\xi^\mu \sigma = \sum_{|\alpha| \leq m_1, \alpha \geq \mu} a_\alpha(x) (-i)^{|\mu|} \binom{\alpha}{\mu} \mu! \xi^{\alpha-\mu},$$

gilt

$$\lambda(x,\xi) = \sum_{|\mu| \leq m_1} \frac{i^{|\mu|}}{\mu!} D_x^\mu \tau(x,\xi) D_\xi^\mu \sigma(x,\xi) = \sum_{|\mu| \leq m_1} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!} \partial_x^\mu \tau(x,\xi) \partial_\xi^\mu \sigma(x,\xi).$$

Wir sehen auch, dass aus dieser Formel $\lambda \in S^{m_1+m_2}$ folgt (für $\sigma \in S^{m_1}$ und $\tau \in S^{m_2}$). Dies lässt sich auf Pseudodifferentialoperatoren verallgemeinern und es gilt folgender Satz.

Satz 3.14. *Seien $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma \in S^{m_1}$ und $\tau \in S^{m_2}$. Dann ist das Produkt $T_\sigma T_\tau$ wieder ein Pseudodifferentialoperator T_λ, wobei $\lambda \in S^{m_1+m_2}$ und es gilt die asymptotische Entwicklung*

$$\lambda - \sum_{|\mu|<N} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!}(\partial_\xi^\mu \sigma)(\partial_x^\mu \tau) \in S^{m_1+m_2-N} \quad \textit{für alle } N \in \mathbb{N}, \tag{3.18}$$

was wir auch als

$$\lambda \sim \sum_\mu \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!}(\partial_\xi^\mu \sigma)(\partial_x^\mu \tau)$$

schreiben (beachte Satz 3.9).

Bemerkung 3.15. (i) Wenn τ nicht von x abhängt, d.h. $\tau(x,\xi) = \tau(\xi)$, dann ist $\lambda(x,\xi) = \sigma(x,\xi)\tau(\xi)$.
(ii) Der führende Term der asymptotischen Entwicklung ist $\sigma(x,\xi)\tau(x,\xi)$, also gilt

$$\lambda - \sigma\tau \in S^{m_1+m_2-1}.$$

•

Bevor wir den Beweis zu Satz 3.14 beginnen, führen wir noch einige vorbereitende Rechnungen durch. Seien die Funktionen φ_k die in Satz 3.10 konstruierte Partition der Eins und σ_k, K_k wie in Definition 3.11. Dann gilt für $\varphi \in \mathcal{S}$

$$T_\sigma \varphi(x) = \sum_{k=0}^\infty T_{\sigma_k}\varphi(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Dabei ist die Konvergenz absolut und gleichmäßig für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Wir lokalisieren das Produkt $T_\sigma T_\tau$ und betrachten zunächst $T_{\sigma_k} T_\tau$. Es ergibt sich, da σ_k kompakten Träger hat

$$\begin{aligned}
T_{\sigma_k} T_\tau \varphi(x) &= (2\pi)^{-n/2} \int e^{ix\xi} \sigma_k(x,\xi) \widehat{(T_\tau \varphi)}(\xi) d\xi \\
&= (2\pi)^{-n} \int\int e^{ix\xi} e^{iy\xi} \sigma_k(x,\xi)(T_\tau\varphi)(y) dy d\xi \\
\text{Fubini} \rightarrow \quad &= (2\pi)^{-n} \int\int e^{i(x-y)\xi} \sigma_k(x,\xi) d\xi (T_\tau\varphi)(y) dy \\
&= (2\pi)^{n/2} \int K_k(x, x-y)(T_\tau\varphi)(y) dy \\
&= (2\pi)^{-n} \int K_k(x, x-y) \left(\int e^{i\xi y} \tau(y,\xi) \hat{\varphi}(\xi) d\xi \right) dy \\
\text{Fubini} \rightarrow \quad &= (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} \left(\int e^{-i(x-y)\xi} K_k(x, x-y) \tau(y,\xi) dy \right) \hat{\varphi}(\xi) d\xi \\
&= (2\pi)^{-n/2} \int e^{ix\xi} \lambda_k(x,\xi) \hat{\varphi}(\xi) d\xi,
\end{aligned}$$

wobei λ_k durch die letzte Gleichung definiert wurde als

$$\lambda_k(x,\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-i(x-y)\xi} K_k(x, x-y) \tau(y,\xi) dy \tag{3.19}$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int e^{-iz\xi} K_k(x,z) \tau(x-z,\xi) dz. \tag{3.20}$$

λ_k ist also das Symbol des Operators $T_{\sigma_k} T_\tau$. Dies legt nahe, dass $T_\sigma T_\tau$ das Symbol

$$\lambda(x,\xi) := \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k(x,\xi)$$

besitzt. Wir müssen also zeigen, dass die definierende Reihe tatsächlich konvergiert, dass $T_\lambda = T_\sigma T_\tau$ und λ die in der Behauptung von Satz 3.14 formulierten Eigenschaften besitzt.

Beweis von Satz 3.14. Sei λ_k wie in Gleichung 3.20. Dann gilt nach der Taylorformel (Proposition 1.3)

$$\tau(x-z,\xi) = \sum_{|\mu|<N_1} \frac{(-z)^\mu}{\mu!} \partial_x^\mu \tau(x,\xi) + R_{N_1}(x,z,\xi)$$

wobei R_{N_1} das Integralrestglied

$$R_{N_1}(x,z,\xi) = N_1 \sum_{|\mu|=N_1} \frac{(-z)^\mu}{\mu!} \int_0^1 (1-t)^{N_1-1} (\partial_x^\mu \tau)(x-tz,\xi)dt.$$

bezeichnet. Setzen wir nun diese Formel für τ in die Formel (3.20) für λ_k ein, so folgt mit dem Verhalten der Fouriertransformation bezüglich Ableitungen die Darstellung

$$\lambda_k(x,\xi) = \sum_{|\mu|<N_1} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!} \partial_\xi^\mu \sigma_k(x,\xi) \partial_x^\mu \tau(x,\xi) + T_{N_1}^{(k)}(x,\xi)$$

wobei

$$T_{N_1}^{(k)}(x,\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-iz\xi} K_k(x,z) R_{N_1}(x,z,\xi)dz.$$

Sei nun $N \in \mathbb{N}$ beliebig und $N_1 > N$ geeignet. Wir zeigen

$$\left| D_x^\alpha D_\xi^\beta \left(\sum_{k=0}^{\infty} T_{N_1}^{(k)} \right)(x,\xi) \right| \leq C(1+|\xi|)^{m_1+m_2-N-|\beta|}. \tag{3.21}$$

Es gilt dann nämlich aufgrund von

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k - \sum_{|\mu|<N_1} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!} (\partial_\xi^\mu \sigma)(\partial_x^\mu \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} T_{N_1}^{(k)}$$

und

$$\sum_{N \leq |\mu| < N_1} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!} (\partial_\xi^\mu \sigma)(\partial_x^\mu \tau) \in S^{m_1+m_2-N}$$

dass $\lambda := \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \in S^{m_1+m_2}$ und λ die asymptotische Entwicklung (3.18) erfüllt. Es bleibt also nur noch (3.21) zu zeigen. Zu β und N wählen wir nun eine natürliche Zahl M, sodass

$$(1+|\xi|)^{m_2-2M} \leq (1+|\xi|)^{m_1+m_2-N-|\beta|} \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.22}$$

Dann wählen wir N_1 so groß, dass $m_1 + 2M - N_1 < 0$. Dann folgt mit Lemma 3.16 und (3.22)

$$\begin{aligned} \left| D_x^\alpha D_\xi^\beta \left(\sum_{k=0}^{\infty} T_{N_1}^{(k)} \right)(x,\xi) \right| &\leq C \sum_{k=0}^{\infty} (1+|\xi|)^{m_1+m_2-N-|\beta|} 2^{k(m_1+2M-N_1)} \\ &\leq C(1+|\xi|)^{m_1+m_2-N-|\beta|}, \end{aligned}$$

also die noch fehlende Ungleichung (3.21). $\square$

Lemma 3.16 (Abschätzung für $T^{(k)}_{N_1}$)**.** *Sei $N_1 \in \mathbb{N}$ beliebig. Für alle $M \in \mathbb{N}$ und alle Multiindizes α, β gibt es eine Konstante C sodass*

$$|D^\alpha_x D^\beta_\xi T^{(k)}_{N_1}(x,\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{m_2-2M} 2^{k(m_1+2M-N_1)}$$

für alle $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ und alle $k \in \mathbb{N}$.

Beweis. Es gilt nach Definition

$$T^{(k)}_{N_1}(x,\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-iz\xi} K_k(x,z) R_{N_1}(x,z,\xi) dz.$$

Wir unterscheiden die Fälle $|\xi| \leq 1$ und $|\xi| > 1$. Im ersten Fall kann man direkt Lemma 3.17 und Proposition 3.13 anwenden um die Behauptung zu erhalten. Der zweite Fall gestaltet sich in der Notation schwieriger, deshalb skizzieren wir nur den Fall $\alpha, \beta = 0$. Die wesentliche Idee ist aber partielle Integration. Bis auf Konstanten gilt dann

$$\begin{aligned} T^{(k)}_{N_1}(x,\xi) &= \int e^{-iz\xi} K_k(x,z) R_{N_1}(x,z,\xi) dz = \int \frac{D^\gamma_z e^{-iz\xi}}{\xi^\gamma} K_k(x,z) R_{N_1}(x,z,\xi) dz \\ &= \int \frac{e^{-iz\xi}}{\xi^\gamma} D^\gamma_z (K_k(x,z) R_{N_1}(x,z,\xi)) dz. \end{aligned}$$

Nach Anwendung der Leibnizformel ist ein typischer Term dieses Ausdrucks gegeben durch

$$\int \frac{e^{-iz\xi}}{\xi^\gamma} D^{\gamma'}_z K_k(x,z) D^{\gamma-\gamma'}_z R_{N_1}(x,z,\xi) dz, \tag{3.23}$$

wobei $\gamma' \leq \gamma$. Wählen wir γ mit $|\gamma| = 2M$ und so, dass $|\xi|^{|\gamma|}$ mit $|\xi^\gamma|$ vergleichbar ist, so können wir (3.23) betragsmäßig weiter mit

$$\int |\xi|^{-|\gamma|} |D^{\gamma'}_z K_k(x,z)| |D^{\gamma-\gamma'}_z R_{N_1}(x,z,\xi)| dz$$

abschätzen. Nun wenden wir wieder Lemma 3.17 und Proposition 3.13 an und erhalten die Behauptung. □

Lemma 3.17 (Abschätzung für R_{N_1})**.** *Sei $N_1 \in \mathbb{N}$ beliebig. Für alle Multiindizes α, β, γ gibt es eine Konstante C, sodass*

$$|\partial^\gamma_z \partial^\alpha_x \partial^\beta_\xi R_{N_1}(x,z,\xi)| \leq C \left(\sum_{\gamma' \leq \gamma} |z|^{N_1-|\gamma'|} \right) (1+|\xi|)^{m_2-|\beta|}$$

für alle $x, z, \xi \in \mathbb{R}^n$.

Beweis. Es gilt nach Definition

$$R_{N_1}(x,z,\xi) = N_1 \sum_{|\mu|=N_1} \frac{(-z)^\mu}{\mu!} \int_0^1 (1-t)^{N_1-1} (\partial^\mu_x \tau)(x-tz,\xi) dt,$$

also folgt mit der Leibnizformel

$$\begin{aligned} \partial^\gamma_z \partial^\alpha_x \partial^\beta_\xi R_{N_1}(x,z,\xi) &= N_1 \sum_{|\mu|=N_1} \int_0^1 (1-t)^{N_1-1} \sum_{\gamma' \leq \gamma} \binom{\gamma}{\gamma'} \frac{\partial^{\gamma'}_z (-z)^\mu}{\mu!} \\ &\qquad (\partial^{\mu+\alpha+\gamma-\gamma'}_x \partial^\beta_\xi \tau)(x-tz,\xi)(-t)^{|\gamma|-|\gamma'|} dt. \end{aligned}$$

Aufgrund von (3.7) und $\tau \in S^{m_2}$ folgt die Behauptung. □

3.6 Die Adjungierte eines Pseudodifferentialoperators

Definition 3.18. *Sei $\sigma \in S^m$. Ein Operator $T_\sigma^* : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ heißt eine* formale Adjungierte *des Pseudodifferentialoperators T_σ, falls für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ gilt*

$$\langle T_\sigma \varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, T_\sigma^* \psi \rangle .$$

Die formale Adjungierte ist eindeutig bestimmt, falls sie existiert. Zur Motivation betrachten wir die Adjungierte eines Differentialoperators mit Symbol

$$\sigma = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha .$$

Es folgt mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \langle T_\sigma \varphi, \psi \rangle &= \int T_\sigma \varphi \overline{\psi} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int a_\alpha(x) D^\alpha \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \int \varphi(x) D^\alpha (a_\alpha \overline{\psi})(x) dx = \langle \varphi, T_\sigma^* \psi \rangle \end{aligned}$$

und somit nach Übung 3 aus Kapitel 1.5

$$T_\sigma^* \psi(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha (\overline{a_\alpha} \psi)(x) = \sum_{|\alpha| \leq m, \mu \leq \alpha} \binom{\alpha}{\mu} D^\mu \overline{a_\alpha}(x) D^{\alpha - \mu} \psi(x).$$

T_σ^* hat also das Symbol

$$\sum_{|\alpha| \leq m, \mu \leq \alpha} \binom{\alpha}{\mu} D^\mu \overline{a_\alpha}(x) \xi^{\alpha - \mu} = \sum_{|\alpha| \leq m, \mu \leq \alpha} \frac{1}{\mu!} D^\mu \overline{a_\alpha}(x) \partial^\mu \xi^\alpha = \sum_{|\mu| \leq m} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!} \partial_x^\mu \partial_\xi^\mu \overline{\sigma}.$$

Für allgemeinere Pseudodifferentialoperatoren gilt nun folgender Satz

Satz 3.19. *Für alle $\sigma \in S^m$ existiert ein $\tau \in S^m$ sodass $T_\tau = T_\sigma^*$. Außerdem gilt für alle $N \in \mathbb{N}$*

$$\tau(x, \xi) - \sum_{|\mu| < N} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!} \left(\partial_x^\mu \partial_\xi^\mu \overline{\sigma} \right) (x, \xi) \in S^{m-N},$$

also in asymptotischer Notation

$$\tau \sim \sum_\mu \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!} \partial_x^\mu \partial_\xi^\mu \overline{\sigma}.$$

Bemerkung 3.20. (i) Wenn $\sigma(x, \xi) = \sigma(\xi)$ nur von ξ abhängt, so gilt $\tau(x, \xi) = \overline{\sigma}(\xi)$.
(ii) Für $N = 1$ erhalten wir aus diesem Satz $\tau(x, \xi) - \overline{\sigma}(x, \xi) \in S^{m-1}$. •

Satz 3.19 erlaubt es, den Definitionsbereich von Pseudodifferentialoperatoren von $\mathcal{S}$ auf $\mathcal{S}'$ auszudehnen und wir definieren für $\sigma \in S^m$, $S \in \mathcal{S}', \varphi \in \mathcal{S}$

$$(T_\sigma S, \varphi) := (S, \overline{T_\sigma^* \overline{\varphi}}),$$

wobei T_σ^* die Adjungierte des Operators T_σ bezeichnet. $T_\sigma S$ ist dann eine temperierte Distribution.

3.7 Die Parametrix eines elliptischen Pseudodifferentialoperators

Wir verallgemeinern den Elliptizitätsbegriff von Differentialoperatoren auf Pseudodifferentialoperatoren. Die folgende Definition ist eine Verallgemeinerung der früheren, siehe Proposition 2.3 und die Bemerkung danach.

Definition 3.21. *Sei $m \in \mathbb{R}$. Ein Symbol $\sigma \in S^m$ heißt elliptisch, wenn es ein $A > 0$ und ein $R > 0$ gibt, sodass für alle $x \in \mathbb{R}^n$* und *$\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $|\xi| > R$ gilt*

$$|\sigma(x, \xi)| \geq A(1 + |\xi|)^m.$$

In Analogie zu Satz 2.5 erhalten wir nun ein Resultat für elliptische Pseudodifferentialoperatoren

Satz 3.22. *Seien $m \in \mathbb{R}$, $\sigma \in S^m$ elliptisch. Dann existieren $\tau \in S^{-m}$ und $\eta, \delta \in S^{-\infty}$ sodass*

$$T_\tau T_\sigma = \mathrm{Id} + T_\eta, \tag{3.24}$$
$$T_\sigma T_\tau = \mathrm{Id} + T_\delta. \tag{3.25}$$

Bemerkung 3.23. Satz 3.22 besagt also, dass ein elliptischer Pseudodifferentialoperator T_σ invertiert werden kann mit Fehlertermen T_δ und T_η mit $\delta, \eta \in S^{-\infty}$. Dies sind die unendlich glättenden Symbole und aus diesem Grund wird T_τ *approximierende Inverse* oder *Parametrix* genannt. •

Beweis von Satz 3.22. Um ein geeignetes Symbol $\tau \in S^{-m}$ zu finden, konstruieren wir eine Folge $\tau_j \in S^{-m-j}$ für $j \in \mathbb{N}_0$, sodass $\tau \sim \sum_j \tau_j$. Wir beginnen mit (3.24).

Schritt 1: Definition der τ_j Sei $R > 0$ für $\sigma \in S^m$ so gewählt, dass Definition 3.21 mit einem A erfüllt ist. Zusätzlich wählen wir eine C^∞ Funktion ψ mit $\psi(\xi) = 1$ für $|\xi| \geq 2R$ und $\psi(\xi) = 0$ für $|\xi| \leq R$. Dann definieren wir

$$\tau_0(x, \xi) := \begin{cases} \frac{\psi(\xi)}{\sigma(x,\xi)}, & |\xi| > R, \\ 0, & |\xi| \leq R \end{cases}$$

und induktiv für $l \geq 1$

$$\tau_l := -\left[\sum_{|\gamma|+j=l, j<l} \frac{(-i)^{|\gamma|}}{\gamma!} (\partial_x^\gamma \sigma)(\partial_\xi^\gamma \tau_j)\right] \tau_0.$$

Es gilt dann (Übung, beachte dass σ elliptisch ist) $\tau_j \in S^{-m-j}$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$.

Schritt 2: τ erfüllt die Behauptung (3.24) Nach Satz 3.9 existiert ein Symbol $\tau \in S^{-m}$ mit $\tau \sim \sum \tau_j$. Auf das Produkt $T_\tau T_\sigma$ wenden wir nun Satz 3.14 an und wir erhalten für das Symbol $\lambda \in S^0$ des Produkts

$$\lambda - \sum_{|\gamma|<N} \frac{(-i)^{|\gamma|}}{\gamma!} (\partial_x^\gamma \sigma)(\partial_\xi^\gamma \tau) \in S^{-N} \quad \text{für alle } N \in \mathbb{N}.$$

Für τ gilt aber $\tau - \sum_{j=0}^{N-1} \tau_j \in S^{-m-N}$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Es folgt also

$$\lambda - \sum_{|\gamma|<N} \frac{(-i)^{|\gamma|}}{\gamma!} (\partial_x^\gamma \sigma) \sum_{j=0}^{N-1} (\partial_\xi^\gamma \tau_j) =: \lambda - \rho \in S^{-N} \quad \text{für alle } N \in \mathbb{N}. \tag{3.26}$$

Wir formen nun ρ um auf

$$\begin{aligned} \rho &= \tau_0\sigma + \sum_{l=1}^{N-1} \left[\tau_l \sigma + \sum_{|\gamma|+j=l, j<l} \frac{(-i)^{|\gamma|}}{\gamma!} (\partial_\xi^\gamma \tau_j)(\partial_x^\gamma \sigma) \right] \\ &\quad + \sum_{|\gamma|+j\geq N, |\gamma|<N, j<N} \frac{(-i)^{|\gamma|}}{\gamma!} (\partial_\xi^\gamma \tau_j)(\partial_x^\gamma \sigma). \end{aligned} \tag{3.27}$$

Nach Definition der τ_j ist für $|\xi| \geq 2R$ erstens $\tau_0\sigma = 1$ und zweitens verschwindet der zweite Term in der rechten Seite von (3.27). Nun gilt weiter $(\partial_\xi^\gamma \tau_j)(\partial_x^\gamma \sigma) \in S^{-N}$ für $|\gamma| + j \geq N$, also erhalten wir schließlich

$$\rho - 1 \in S^{-N} \quad \text{für alle } N \in \mathbb{N}$$

und nach (3.26)

$$\lambda - 1 \in S^{-N} \quad \text{für alle } N \in \mathbb{N}.$$

Mit $\eta = \lambda - 1$ gilt also (3.24).

Schritt 3: Mit dem gleichen τ gilt auch (3.25) Ein ähnliches Argument liefert ein anderes Symbol $\kappa \in S^{-m}$ mit

$$T_\sigma T_\kappa = I + R', \quad \text{wobei } R' \in S^{-\infty}.$$

Daraus und aus (3.24) folgt

$$T_\kappa + RT_\kappa = T_\tau + T_\tau R' \quad \text{mit } R = T_\eta.$$

Nun sind RT_κ und $T_\tau R'$ Pseudodifferentialoperatoren mit Symbol in $S^{-\infty}$, also

$$T_\kappa = T_\tau + R'' \quad \text{mit } R'' = T_\tau R' - RT_\kappa \in S^{-\infty}$$

und schließlich

$$T_\sigma T_\tau = I + S \quad \text{mit } S = R' - T_\sigma R'' \in S^{-\infty},$$

also Behauptung (3.25). □

3.8 L^p-Beschränktheit von Pseudodifferentialoperatoren

Satz 3.24. *Seien $\sigma \in S^0$ und $1 < p < \infty$. Dann ist $T_\sigma : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ ein stetiger linearer Operator.*

Um diesen Satz zu beweisen, benötigen wir einige Lemmata und einen wichtigen Satz über Fouriermultiplikatoren, den wir nicht beweisen werden (siehe Vorlesung Singuläre Integrale):

Satz 3.25. *Sei $m \in C^k(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ mit $k > n/2$ eine beschränkte Funktion, sodass es eine positive Konstante B gibt mit*

$$|(D^\alpha m)(\xi)| \leq B|\xi|^{-|\alpha|} \quad \text{für alle } \xi \neq 0, |\alpha| \leq k.$$

Sei für $\varphi \in \mathcal{S}$ der Operator T definiert durch

$$(T\varphi)(x) := (2\pi)^{-n/2} \int e^{ix\xi} m(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)d\xi = (m\widehat{\varphi})\check{}.$$

Dann gibt es für alle $1 < p < \infty$ ein C sodass für alle $\varphi \in \mathcal{S}$ die L^p–Ungleichung

$$\|T\varphi\|_p \leq CB \|\varphi\|_p$$

gilt.

Lemma 3.26. *Seien $\sigma \in S^0$ und $K(x,z) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{iz\xi}\sigma(x,\xi)d\xi$ im distributionellen Sinn ($\sigma(x,\cdot)$ ist eine temperierte Distribution und $K(x,\cdot)$ die inverse Fouriertransformation davon). Dann gilt*

1. *Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist $K(x,\cdot)$ eine Funktion definiert auf $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$,*
2. *Für jedes hinreichend große $N \in \mathbb{N}$ existiert eine Konstante C_N sodass*
$$|K(x,z)| \leq C_N|z|^{-N} \quad \text{für alle } z \neq 0,$$
3. *Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $\varphi \in \mathcal{S}$, die in einer Umgebung von x verschwinden, gilt*
$$(T_\sigma\varphi)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int K(x, x-z)\varphi(z)dz. \tag{3.28}$$

Bemerkung 3.27. Punkt 3 besagt, dass $k(x,z) := K(x,x-z) = \sigma(x,\cdot)\check{}(x-z)$ der *Distributionskern* des Pseudodifferentialoperators T_σ ist. Außerdem ist (3.28) die Darstellung von T_σ als *singulärer Integraloperator.* •

Beweis von Lemma 3.26. Sei α ein Multiindex mit $|\alpha| > n$. Dann gilt (Übung!)

$$(-iz)^\alpha K(x,z) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{i\xi z}(\partial_\xi^\alpha \sigma)(x,\xi)d\xi$$

im distributionellen Sinn. Nun ist aber der Integrand auf der rechten Seite in L^1, also ist $(iz)^\alpha K(x,z)$ eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}^n$ (Riemann-Lebesgue Lemma) und es gibt eine Konstante C mit

$$|z^\alpha||K(x,z)| \leq C \quad \text{für alle } x, z \in \mathbb{R}^n.$$

Das heißt, Teil 1 des Lemmas folgt direkt und Teil 2 folgt nach Anwendung der Ungleichung in (3.17).
Um Teil 3 zu beweisen, definieren wir zuerst die temperierte Distribution L_x für fixes x durch

$$(L_x, \psi) = \int \sigma(x,\xi)\psi(\xi)d\xi, \quad \text{für alle } \psi \in \mathcal{S}.$$

Dann folgt aus der Definition eines Pseudodifferentialoperators und aus Proposition 1.19

$$\begin{aligned}(T_\sigma\varphi)(x) &= (2\pi)^{-n/2}\int e^{ix\xi}\sigma(x,\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi = (2\pi)^{-n/2}(L_x, M_x\hat{\varphi})\\ &= (2\pi)^{-n/2}(L_x, \widehat{\tau_{-x}\varphi}) = (2\pi)^{-n/2}(\widehat{L_x}, \tau_{-x}\varphi).\end{aligned}$$

Verschwindet nun $\psi \in \mathcal{S}$ in einer Umgebung von 0, so gilt nach Teil 1 dieses Lemmas

$$(\widehat{L_x}, \psi) = \int K(x,-z)\psi(z)dz.$$

Für $\varphi \in \mathcal{S}$, das in einer Umgebung von x verschwindet gilt also

$$\begin{aligned}(T_\sigma\varphi)(x) &= (2\pi)^{-n/2}\int K(x,-z)(\tau_{-x}\varphi)(z)dz = (2\pi)^{-n/2}\int K(x,-z)\varphi(x+z)dz\\ &= (2\pi)^{-n/2}\int K(x,x-z)\varphi(z)dz.\end{aligned}$$

Wir erhalten also Teil 3 des Lemmas. □

Um den Beweis von Satz 3.24 vorzubereiten, benötigen wir noch ein paar Definitionen und ein weiteres Lemma.
Wir schreiben $\mathbb{R}^n$ als Vereinigung von Einheitswürfeln

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}^n} Q_m,$$

wobei Q_m der Würfel mit Zentrum in m ist, dessen Kanten parallel zu den Koordinatenachsen sind und Länge 1 besitzen. Sei weiters η eine $C_c^\infty-$Funktion mit $\eta(x) = 1$ für alle $x \in Q_0$; dann definieren wir für alle $m \in \mathbb{Z}^n$ das Symbol σ_m durch

$$\sigma_m(x,\xi) := \eta(x-m)\sigma(x,\xi), \quad \text{für alle } x,\xi \in \mathbb{R}^n.$$

Es gilt $T_{\sigma_m} = \eta(x-m)T_\sigma$, da η nur von x abhängt und deshalb die Ungleichung

$$\int_{Q_m} |T_\sigma\varphi|^p \leq \int_{\mathbb{R}^n} |T_{\sigma_m}\varphi|^p. \tag{3.29}$$

Weiters benötigen wir noch die partielle Fouriertransformation von σ_m bezüglich der $x-$Variable und wir bezeichnen sie mit

$$\widehat{\sigma}_m^1(\lambda,\xi) := (2\pi)^{-n/2}\int e^{-i\lambda x}\sigma_m(x,\xi)dx \quad \text{für alle } \lambda,\xi \in \mathbb{R}^n.$$

Es gilt dann

Lemma 3.28. *Für alle Multiindizes α und alle $N \in \mathbb{N}$ existiert eine positive Konstante C, sodass die Ungleichung*

$$|(D_\xi^\alpha\widehat{\sigma}_m^1)(\lambda,\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{-|\alpha|}(1+|\lambda|)^{-N}, \quad \textit{für alle } \lambda,\xi \in \mathbb{R}^n \textit{ gilt.}$$

Beweisidee. Zuerst zeigt man die Ungleichung

$$|(-i\lambda)^{\beta}(D_{\xi}^{\alpha}\widehat{\sigma}_{m}^{1})(\lambda,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{-|\alpha|} \quad \text{für alle } \lambda,\xi \in \mathbb{R}^n,$$

wobei β ein beliebiger Multiindex ist und $C_{\alpha,\beta}$ eine Konstante, die nur von α und β abhängt. Dazu braucht man partielle Integration und die Leibnizformel. Anschließend liefert die Ungleichung (1.5) im Beweis von Bemerkung 1.14 die Behauptung. □

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir zum Beweis von Satz 3.24.

Beweis von Satz 3.24. **Schritt 1: L^p-Beschränktheit von T_{σ_m}** Sei $m \in \mathbb{Z}^n$. σ_m hat kompakten Träger in x. Also gilt mit der Definition eines Pseudodifferentialoperators, der Fourierinversionsformel und Fubini

$$\begin{aligned}
(T_{\sigma_m}\varphi)(x) &= (2\pi)^{-n/2}\int e^{ix\xi}\sigma_m(x,\xi)\widehat{\varphi}(\xi)d\xi && (3.30)\\
&= (2\pi)^{-n}\int e^{ix\xi}\left[\int e^{ix\lambda}\widehat{\sigma}_{m}^{1}(\lambda,\xi)d\lambda\right]\widehat{\varphi}(\xi)d\xi && (3.31)\\
&= (2\pi)^{-n}\int e^{ix\lambda}\left[\int e^{ix\xi}\widehat{\sigma}_{m}^{1}(\lambda,\xi)\widehat{\varphi}(\xi)d\xi\right]d\lambda && (3.32)\\
&=: (2\pi)^{-n/2}\int e^{ix\lambda}(T_\lambda\varphi)(x)d\lambda. && (3.33)
\end{aligned}$$

Die Abschätzung in Lemma 3.28 zeigt nun die Voraussetzung von Satz 3.25, für alle $N \in \mathbb{N}$ gibt es also eine Konstante C_N, sodass

$$\|T_\lambda\varphi\|_p \leq C_N(1+|\lambda|)^{-N}\|\varphi\|_p, \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{S}.$$

T_λ kann also zu einem stetigen linearen Operator auf L^p erweitert werden. Nach Definition von T_λ, der Minkowski-Ungleichung für Integrale (Proposition 1.1) und der L^p-Beschränktheit von T_λ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|T_{\sigma_m}\varphi\|_p &= (2\pi)^{-n/2}\left[\int\left|\int e^{ix\lambda}(T_\lambda\varphi)(x)d\lambda\right|^p dx\right]^{1/p}\\
&\leq (2\pi)^{-n/2}\int\left[\int |(T_\lambda\varphi)(x)|^p dx\right]^{1/p} d\lambda\\
&= (2\pi)^{-n/2}\int \|T_\lambda\varphi\|_p\, d\lambda\\
&\leq C_N(2\pi)^{-n/2}\int(1+|\lambda|)^{-N}d\lambda\, \|\varphi\|_p
\end{aligned}$$

für alle $\varphi \in \mathcal{S}$. Ist N hinreichend groß, so zeigt das die L^p-Beschränktheit von T_{σ_m}.

Schritt 2 Sei Q_m^{**} der Würfel mit doppelter Seitenlänge wie Q_m und Q_m^* ein Würfel wie in Abbildung 2 mit $\operatorname{dist}(Q_m, \mathbb{R}^n\backslash Q_m^*) > \delta$. Weiters sei $\psi \in C_c^\infty$ mit $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi = 1$ auf Q_m^* und $\psi = 0$ auf $\mathbb{R}^n\backslash Q_m^{**}$. Ein beliebiges $\varphi \in \mathcal{S}$ splitten wir auf in

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \quad \text{wobei } \varphi_1 := \varphi\cdot\psi, \varphi_2 := \varphi\cdot(1-\psi).$$

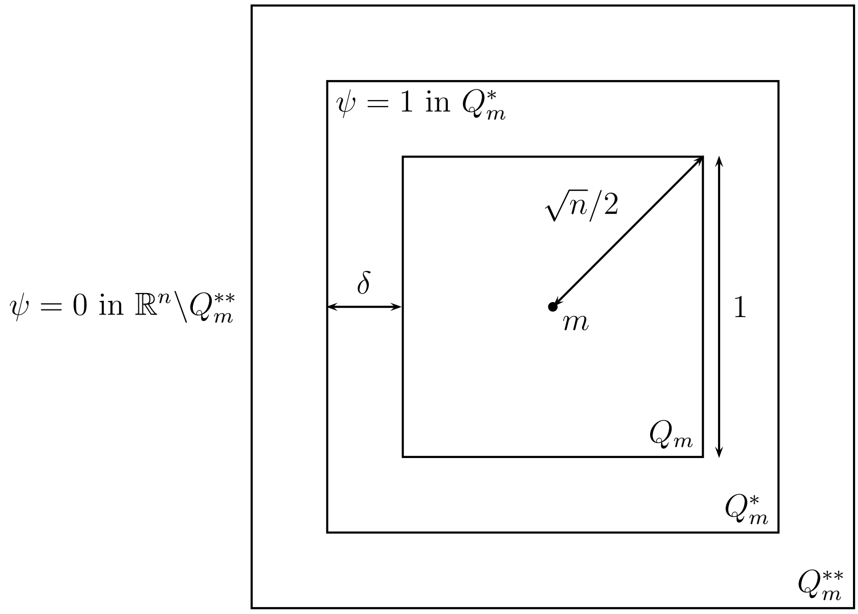

Abbildung 2: Situation in Schritt 2 des Beweises

Natürlich gilt dann $\operatorname{supp} \varphi_1 \subset Q_m^{**}$, $\operatorname{supp} \varphi_2 \subset \mathbb{R}^n \backslash Q_m^*$. Wir schätzen das Integral

$$I_m := \int_{Q_m} |T_\sigma \varphi|^p$$

basierend auf dieser Zerlegung nach oben ab. Es gilt nach Schritt 1 und (3.29)

$$\begin{aligned} I_m &= \int_{Q_m} |T_\sigma \varphi_1 + T_\sigma \varphi_2|^p && (3.34)\\ &\le 2^p \left(\int_{Q_m} |T_\sigma \varphi_1|^p + \int_{Q_m} |T_\sigma \varphi_2|^p \right) && (3.35)\\ &\le 2^p C \|\varphi_1\|_p^p + 2^p \int_{Q_m} |T_\sigma \varphi_2|^p && (3.36)\\ &=: 2^p C \|\varphi_1\|_p^p + 2^p J_m. && (3.37) \end{aligned}$$

Schritt 3: Abschätzung von J_m Da im Integranden von J_m die Funktion $T_\sigma \varphi_2$ vorkommt, schätzen wir zuerst diese ab. Aufgrund von Lemma 3.26,2. existiert für alle $N \in \mathbb{N}$ hinreichend groß eine Konstante C, sodass für $x \in Q_m$

$$\begin{aligned} |(T_\sigma \varphi_2)(x)| &= (2\pi)^{-n/2} \left| \int_{\mathbb{R}^n} K(x, x-z) \varphi_2(z) dz \right| && (3.38)\\ &= (2\pi)^{-n/2} \left| \int_{\mathbb{R}^n \backslash Q_m^*} K(x, x-z) \varphi_2(z) dz \right| && (3.39)\\ &\le C \int_{\mathbb{R}^n \backslash Q_m^*} |x-z|^{-2N} |\varphi_2(z)| dz. && (3.40) \end{aligned}$$

Sei nun $\mu := \sqrt{n}$. Dann gibt es eine Konstante C_μ, sodass

$$(\mu + |m-z|)^N (\mu + |x-z|)^N \le C_\mu^{-1} |x-z|^{2N} \quad \text{für alle } x \in Q_m, z \in \mathbb{R}^n \backslash Q_m^*.$$

(Übung! Beachte dabei, dass $|x-z| \geq \delta$.) Es folgt also mit (3.40) für $x \in Q_m$

$$|(T_\sigma\varphi_2)(x)| \leq C \cdot C_\mu \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_m^*} (\mu + |x-z|)^{-N}(\mu + |m-z|)^{-N}|\varphi_2(z)|dz.$$

Mit der Minkowski Ungleichung für Integrale (Proposition 1.1) erhalten wir nun, da $\mu = \sqrt{n} \geq 1$ und aufgrund der Hölder Ungleichung für $p^{-1} + p'^{-1} = 1$

$$\begin{aligned}
J_m^{1/p} &\leq C \cdot C_\mu \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_m^*} \left[\int_{Q_m} (\mu + |x-z|)^{-Np}(\mu + |m-z|)^{-Np}|\varphi_2(z)|^p dx\right]^{1/p} dz \\
&= C \cdot C_\mu \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_m^*} \frac{|\varphi_2(z)|}{(\mu + |m-z|)^N} \left[\int_{Q_m} (\mu + |x-z|)^{-Np} dx\right]^{1/p} dz \\
&\leq C \cdot C_\mu \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_m^*} \frac{|\varphi_2(z)|}{(\mu + |m-z|)^N} \mu^{-N}|Q_m|^{1/p} dz \\
&\leq C \cdot C_\mu \left[\int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_m^*} (\mu + |m-z|)^{-Np'/2} dz\right]^{1/p'} \left[\int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_m^*} \frac{|\varphi_2(z)|^p}{(\mu + |m-z|)^{Np/2}} dz\right]^{1/p}
\end{aligned}$$

Es folgt also, dass für alle hinreichend großen natürlichen Zahlen N eine Konstante C_J existiert (die nur von N, n und p abhängt), sodass

$$J_m \leq C_J \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_m^*} \frac{|\varphi_2(z)|^p}{(\mu + |m-z|)^{Np/2}} dz. \tag{3.41}$$

Schritt 4: Zusammenfassen der Ergebnisse Nun folgt aus (3.37) und aus der Ungleichung in (3.41), dass

$$I_m = \int_{Q_m} |T_\sigma \varphi|^p \leq 2^p C \int_{Q_m^{**}} |\varphi|^p + 2^p C_J \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_m^*} \frac{|\varphi_2(z)|^p}{(\mu + |m-z|)^{Np/2}} dz.$$

Wir summieren über m und erhalten (nach Zusammenfassen der Konstanten, die nach wie vor nur von n, p, N abhängen)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |T_\sigma \varphi|^p &\leq C \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \int_{Q_m^{**}} |\varphi|^p + 2^p C_J \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_m^*} \frac{|\varphi_2(z)|^p}{(\mu + |m-z|)^{Np/2}} dz & (3.42) \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^p + 2^p C_J \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_m} \frac{|\varphi_2(z)|^p}{(\mu + |m-z|)^{Np/2}} dz & (3.43) \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^p + 2^p C_J \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \sum_{l \neq m} \int_{Q_l} \frac{|\varphi_2(z)|^p}{(\mu + |m-z|)^{Np/2}} dz. & (3.44)
\end{aligned}$$

Es gilt weiter, dass (Übung!)

$$\mu + |m-z| \geq \frac{1}{2} + |m-l| \quad \text{für alle } z \in Q_l \text{ und } l \neq m.$$

Also erhalten wir für den zweiten Teil in (3.44)

$$\begin{aligned}
& \sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\sum_{l\neq m}\int_{Q_l}\frac{|\varphi_2(z)|^p}{(\mu+|m-z|)^{Np/2}}dz \\
\leq\ & \sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\sum_{l\neq m}(\frac{1}{2}+|m-l|)^{-Np/2}\int_{Q_l}|\varphi_2|^p \\
\leq\ & \sum_{l\in\mathbb{Z}^n}\int_{Q_l}|\varphi_2|^p\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}(\frac{1}{2}+|m-l|)^{-Np/2} \\
=\ & \sum_{l\in\mathbb{Z}^n}\int_{Q_l}|\varphi_2|^p\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}(\frac{1}{2}+|m|)^{-Np/2} \\
=\ & \sum_{m\in\mathbb{Z}^n}(\frac{1}{2}+|m|)^{-Np/2}\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi_2|^p.
\end{aligned}$$

Es gilt also mit (3.44) die Abschätzung

$$\|T_\sigma\varphi\|_p^p\leq\left[C+2^pC_J\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}(\frac{1}{2}+|m|)^{-Np/2}\right]\|\varphi\|_p^p.$$

Da diese Reihe für hinreichend großes N konvergiert, erhalten wir die L^p-Beschränktheit von T_σ auf $\mathcal{S}$ und aufgrund der Dichtheit von $\mathcal{S}$ in L^p kann T_σ zu einem linearen beschränkten Operator auf L^p erweitert werden. □

3.9 Sobolevräume und Pseudodifferentialoperatoren

Sei $s\in\mathbb{R}$. Dann definieren wir den Pseudodifferentialoperator J_s als den Operator mit Symbol

$$\sigma_s(\xi)=(1+|\xi|^2)^{s/2}.$$

Dann ist $\sigma_s\in S^s$. J_s heißt ein *Bessel Potential* der Ordnung $-s$. Es gilt für alle $u\in\mathcal{S}'$, dass

$$J_su=(\sigma_s\widehat{u})\check{}.$$

Wir definieren nun den Sobolevraum H^s

$$H^s:=\{u\in\mathcal{S}':J_su\in L^2\}.$$

Es gilt also nach Plancherel $u\in H^s$ genau dann wenn

$$\int(1+|\xi|^2)^s|\widehat{u}(\xi)|^2d\xi<\infty.$$

Auf der anderen Seite gilt für $u\in\mathcal{S}'$, dass $D^\alpha u\in L^2$ genau dann wenn

$$\int|\xi^\alpha|^2|\widehat{u}(\xi)|^2d\xi<\infty.$$

Man sieht also, dass für $k\in\mathbb{N}$ eine temperierte Distribution u genau dann in H^k ist, wenn alle Ableitungen bis zur Ordnung k von u wieder in L^2 liegen. Man kann also sozusagen die Glätte einer Distribution über ihre Zugehörigkeit in diverse H^s messen. H^s ist nun ein Hilbertraum mit dem inneren Produkt

$$(f, g)_{(s)} := \int J_s f(\xi) \overline{J_s g(\xi)} d\xi = \int (1 + |\xi|^2)^s \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} d\xi$$

und der Norm

$$\|f\|_{(s)} = \|J_s f\|_2 .$$

Es gilt weiters, dass J_s eine surjektive Isometrie von H^{t+s} nach H^t ist und es ist $J_s^{-1} = J_{-s}$. Somit erhalten wir

Satz 3.29. *Sei $\sigma \in S^m$. Dann ist $T_\sigma : H^{m+s} \to H^s$ ein beschränkter linearer Operator für alle $s \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Sei $S = J_s T_\sigma J_{-m-s}$,

$$\begin{tikzcd} L^2 \arrow[r, "S"] & L^2 \\ H^{m+s} \arrow[u, "J_{s+m}"] \arrow[r, "T_\sigma"'] & H^s \arrow[u, "J_s"'] \end{tikzcd}$$

dann ist $S = J_s T_\sigma J_{-m-s}$ ein Pseudodifferentialoperator, dessen Symbol in S^0 liegt, da $\sigma_s \in S^s, \sigma \in S^m$ und $\sigma_{-m-s} \in S^{-m-s}$ und nach Satz 3.14 das Produkt in S^0 ist. Aus Satz 3.24 folgt die Beschränktheit von $S : L^2 \to L^2$. Das heißt aber, dass

$$T_\sigma = J_{-s} S J_{m+s} : H^{m+s} \to H^s$$

auch beschränkt ist. □

3.10 Übungen

1. Seien $\sigma \in S^{m_1}$ und $\tau \in S^{m_2}$. Dann gilt $\sigma\tau \in S^{m_1+m_2}$.
2. Für $\sigma \in S^m$ ist $D_x^\alpha D_\xi^\beta \sigma \in S^{m-|\beta|}$ für alle Multiindizes α, β.
3. Sei $\sigma \in S^m$ und $\varphi \in \mathcal{S}$. Das Symbol
$$\tau(x, \xi) = \sigma(x, \xi)\varphi(\xi)$$
ist in $S^{-\infty}$.
4. Sei $\sigma(x, \xi) = (1 + |\xi|^2)^{m/2}$. Dann ist $\sigma \in S^m$.
5. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, sodass
$$\int f(x)\varphi(x) dx = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{S}.$$
Dann gilt $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.
6. Zeige, dass es eine Folge (ε_j) gibt, sodass für alle $|\alpha + \beta| \le j$ die Ungleichung in (3.10) erfüllt ist.
7. Zeige, dass die Partition der Eins, die im Beweis von Satz 3.10 definiert wurde, auch tatsächlich die Behauptungen des Satzes erfüllt.
8. Sei $N \in \mathbb{N}$. Dann gilt
$$|z|^{2N} \le n^N \sum_{|\gamma|=N} |z^\gamma|^2 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{R}^n.$$

9. Sei $q \in C^\infty$ mit $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |D^\alpha q(x)| < \infty$ für alle Multiindizes α. Sei σ das Symbol $\sigma(x,\xi) = q(x)$ für alle $x, \xi \in \mathbb{R}^n$. Sei weiters τ ein beliebiges anderes Symbol. Benutze Satz 3.14, um die Symbole der Operatoren $T_\sigma T_\tau$ und $T_\tau T_\sigma$ zu berechnen.
10. Sei $\sigma \in S^{m_1}$ und $\tau \in S^{m_2}$. Dann ist das Symbol des Kommutators $T_\sigma T_\tau - T_\tau T_\sigma$ in $S^{m_1+m_2-1}$.
11. Jeder Pseudodifferentialoperator hat eine eindeutige formale Adjungierte.
12. Seien σ und τ zwei Symbole. Dann gilt $(T_\sigma^*)^* = T_\sigma$ und $(T_\sigma T_\tau)^* = T_\tau^* T_\sigma^*$.
13. Seien T_σ,T_τ elliptische Pseudodifferentialoperatoren. Dann ist das Produkt $T_\sigma T_\tau$ ebenfalls elliptisch.
14. Die formale Adjungierte eines elliptischen Pseudodifferentialoperators ist wieder elliptisch.
15. Seien τ_l definiert wie im ersten Schritt des Beweises von Satz 3.22. Man zeige, dass $\tau_l \in S^{-m-l}$ für alle $l \in \mathbb{N}_0$.
16. Zwei Parametrices eines elliptischen Pseudodifferentialoperators unterscheiden sich nur um einen unendlich glättenden (mit Symbol in $S^{-\infty}$) Pseudodifferentialoperator.
17. Im Beweis von Satz 3.24 haben wir gezeigt, dass
$$\|T_\sigma \varphi\|_p \leq C \|\varphi\|_p \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{S}.$$
T_σ kann also zu einem beschränkten linearen Operator auf L^p erweitert werden. Zeige, dass diese Erweiterung mit der Erweiterung $T_\sigma : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$, eingeschränkt auf L^p, übereinstimmt.
18. Sei $\sigma(x,\xi) \in S^0$ ein Symbol, das nicht verschwindet und nur von x abhängt. Zeige, dass $T_\sigma : L^p \to L^p$ nicht kompakt ist.
19. Sei $u \in H^s$ mit $s > n/2+k$, wobei $k \in \mathbb{N}$. Dann ist u fast überall gleich einer C^k-Funktion. (Hinweis: Zeige $\xi^\alpha \widehat{u} \in L^1$ für $|\alpha| \leq k$ und verwende das Riemann-Lebesgue Lemma.)
20. Wir rechtfertigen nun die Nomenklatur „unendlich glättend“ für ein Symbol in $S^{-\infty}$. Sei also $\sigma \in S^{-\infty}$ und $u \in H^{-\infty}$. Dann gilt $T_\sigma u \in H^\infty$.
21. Sei σ ein elliptisches Symbol in S^m. Sei $u \in L^2$ eine Lösung der Pseudodifferentialgleichung $T_\sigma u = f$ für $f \in L^2$. Dann gilt $u \in H^m$.

4 Oszillierende Integrale

4.1 Motivation: Hochfrequente Asymptotik der Wellengleichung

Sei $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Wir analysieren das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= 0 \\ u(x,0) &= g(x) \\ u_t(x,0) &= 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Dabei ist $\Delta = \partial_{x_1}^2 + ... + \partial_{x_n}^2$ nur bezüglich der Raumvariablen $x_1, \ldots, x_n$ zu bilden. Wenn wir auf dieses Anfangswertproblem die Fouriertransformation (nur bezüglich der Raumvariablen x_i) anwenden, erhalten wir

$$\begin{aligned} \hat{u}_{tt}(\xi,t) + |\xi|^2 \hat{u}(\xi,t) &= 0 \\ \hat{u}(\xi,0) &= \hat{g}(\xi) \\ \hat{u}_t(\xi,0) &= 0, \end{aligned}$$

also eine gewöhnliche Differentialgleichung mit Anfangsbedingungen. Diese hat die Lösung

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{g}(\xi)\cos(|\xi|t).$$

Wir erhalten also als Lösung für u

$$u(x,t) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \frac{\hat{g}(\xi)}{2} (e^{i|\xi|t} + e^{-i|\xi|t}) d\xi. \tag{4.2}$$

Bemerkung 4.1 (Fourierintegraloperatoren)**.** Dies ist der Spezialfall eines *Fourierintegraloperators*, der die grundlegende Form

$$(T\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\phi(x,\xi)} a(x,\xi) \widehat{\varphi}(\xi) d\xi$$

besitzt, wobei $a \in S^m$ für ein $m \in \mathbb{R}$. Pseudodifferentialoperatoren sind also in gewissem Sinne ein Spezialfall von Fourierintegraloperatoren. Man kann (allgemeinere) Fourierintegraloperatoren dazu verwenden, auch für Anfangswertprobleme für eine hyperbolische Gleichung mit variablen Koeffizienten eine Parametrix anzugeben. (siehe Kapitel 5.2) •

Wir betrachten nun das Anfangswertproblem (4.1) für spezielle Anfangsbedingungen g^ε, wobei

$$g^\varepsilon(x) = a(x) e^{\frac{ip(x)}{\varepsilon}}.$$

Dabei ist $\varepsilon > 0$, $a, p \in C_c^\infty$ und wir setzen zusätzlich voraus, dass $Dp \neq 0$ auf dem Träger von a. Basierend auf Formel (4.2) werden wir nun die Lösung u^ε von (4.1) mit der Anfangsbedingung g^ε angeben und uns danach die Asymptotik der Formel für u^ε mit $\varepsilon \to 0$ ansehen.
Setzen wir also g^ε in die Formel (4.2) ein, so erhalten wir

Proposition 4.2. *Seien*

$$\begin{aligned} \phi_0(x,\xi,z,t) &= (x-z)\xi + t\,|\xi| + p(z) \\ \phi_1(x,\xi,z,t) &= (x-z)\xi - t\,|\xi| + p(z) \end{aligned}$$

und

$$I_j(x,t) = \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} a(z) e^{\frac{i}{\varepsilon}\phi_j(x,\xi,z,t)} dz d\xi \tag{4.3}$$

für $j \in \{0,1\}$. Dann gilt

$$u^\varepsilon(x,t) = \frac{1}{2} \left[I_0(x,t) + I_1(x,t) \right].$$

Beweis. Übung! □

4.2 Methode der stationären Phase

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Asymptotik (für $\varepsilon \to 0$) von Integralen der Form

$$J_\varepsilon := \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{\varepsilon}\phi(y)} a(y) dy, \tag{4.4}$$

wobei $\varepsilon > 0$, $a \in C_c^\infty$ und $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.
Wir werden sehen, dass die Beiträge von J_ε für $\varepsilon \to 0$ nur von den kritischen (stationären) Punkten von ϕ abhängen. y ist dabei ein *kritischer (stationärer)* Punkt von ϕ, falls der

Gradient $D\phi$ von ϕ an der Stelle y verschwindet. Falls nun y ein kritischer Punkt von ϕ ist, so heißt er *degeneriert*, falls die Hessematrix $D^2\phi$ von ϕ an der Stelle y singulär ist. Wir werden eine asymptotische Formel für J_ε für alle Phasen ϕ, die keinen degenerierten kritischen Punkt besitzen, angeben. Dazu betrachten wir drei Schritte

Schritt 1 Lineare Phase: $\phi(y) = y \cdot p$.

Schritt 2 Quadratische Phase: $\phi(y) = y \cdot Ay = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i y_j$.

Schritt 3 Rückführung von allgemeinen Phasen ohne degenerierten kritischen Punkt auf Schritt 1 und 2 (Lemma von Morse).

4.2.1 Lineare Phase

Zunächst betrachten wir eine lineare Phase, sei also $\phi(y) = y \cdot p$ mit $p \in \mathbb{R}^n$. Dann haben wir folgendes Resultat

Satz 4.3 (Asymptotik für lineare Phasen)**.** *Sei $a \in C_c^\infty$ und $p \in \mathbb{R}^n, p \neq 0$. Dann gilt:*

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists c_k > 0\ \forall \varepsilon > 0 : \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{\varepsilon} y \cdot p} a(y) dy \right| \leq c_k \varepsilon^k.$$

Das Integral fällt also schneller als jede beliebige Potenz von ε.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $p_1 \neq 0$ voraussetzen (ansonsten führen wir folgende Rechnung mit einem anderen $p_i \neq 0$ durch). Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Mit partieller Integration folgt dann

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{\varepsilon} y \cdot p} a(y) dy \right| &= \left| \left(\frac{\varepsilon}{ip_1} \right)^k \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{y_1}^k (e^{\frac{i}{\varepsilon} y \cdot p}) a(y) dy \right| \\
&= \left| \left(\frac{\varepsilon}{ip_1} \right)^k \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{\varepsilon} y \cdot p} \partial_{y_1}^k a(y) dy \right| \\
&\leq \varepsilon^k \frac{1}{|p_1|^k} |\mathrm{supp}(a)| \left\| \partial_{y_1}^k a \right\|_\infty \\
&=: \varepsilon^k c_k,
\end{aligned}$$

also die Behauptung. □

4.2.2 Quadratische Phase

Satz 4.4 (Asymptotik für quadratische Phasen)**.** *Sei $a \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ und A eine reelle, symmetrische und invertierbare $n \times n$-Matrix.*
Weiters sei

$$J_\varepsilon = (2\pi\varepsilon)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{2\varepsilon} y \cdot Ay} a(y) dy.$$

Dann gilt

$$\exists c\ \forall \varepsilon > 0 : \left| J_\varepsilon - a(0) \frac{e^{i \frac{\pi}{4} \operatorname{sign} A}}{|\det A|^{1/2}} \right| \leq c\varepsilon,$$

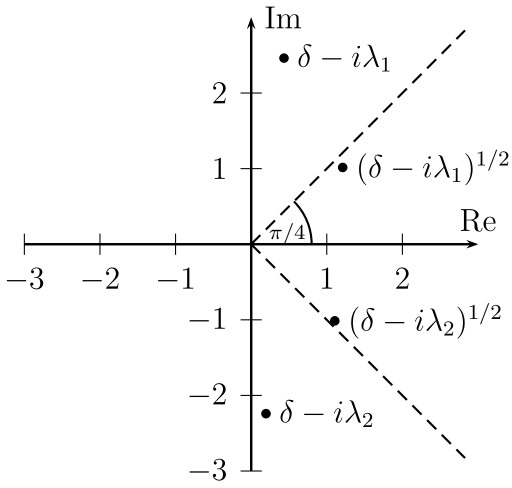

Abbildung 3: Typische Positionen von $\delta - i\lambda$ und $(\delta - i\lambda)^{1/2}$

das heißt

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon = a(0)\frac{e^{i\frac{\pi}{4}\operatorname{sign} A}}{|\det A|^{1/2}}.$$

Die Signatur ($\operatorname{sign} A$) *einer Matrix A gibt die Anzahl der positiven Eigenwerte von A minus die Anzahl der negativen an.*

Für den eigentlichen Beweis werden noch einige Hilfsmittel benötigt

Lemma 4.5. *Sei $\delta > 0$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. $h_\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert als*

$$h_\delta(x) = e^{i\lambda x^2 - \delta x^2}.$$

Dann gilt

$$\sqrt{2\pi}\widehat{h_\delta}(\xi) = \sqrt{\pi}\frac{e^{\frac{\xi^2}{4(i\lambda-\delta)}}}{(\delta - i\lambda)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{und} \quad \sqrt{2\pi}\lim_{\delta\to 0}\widehat{h_\delta}(\xi) = \sqrt{\pi}\frac{e^{\frac{\xi^2}{4i\lambda}}}{(-i\lambda)^{\frac{1}{2}}},$$

wobei $(-i\lambda)^{1/2}$ bzw. $(\delta - i\lambda)^{1/2}$ die Wurzel w von $-i\lambda$ bzw. $\delta - i\lambda$ bezeichnen, für die $\operatorname{Re} w > 0$.

Beweis. Nach Definition gilt

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi}\widehat{h_\delta}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x^2 - \delta x^2 - ix\xi} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{(i\lambda-\delta)\left(x^2 - ix\frac{\xi}{i\lambda-\delta}\right)} dx \\
&= e^{\frac{\xi^2}{4(i\lambda-\delta)}} \int_{\mathbb{R}} e^{(i\lambda-\delta)\left(x - i\frac{\xi}{2(i\lambda-\delta)}\right)^2} dx \\
&= \frac{e^{\frac{\xi^2}{4(i\lambda-\delta)}}}{(\delta - i\lambda)^{1/2}} \int_\Gamma e^{-z^2} dz, \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

wobei $\Gamma := \left\{z = (\delta - i\lambda)^{\frac{1}{2}}\left(x - \frac{i\xi}{2(i\lambda-\delta)}\right) : x \in \mathbb{R}\right\}$ und mit $(\delta - i\lambda)^{1/2}$ diejenige komplexe Wurzel w von $(\delta - i\lambda)$ gemeint ist, für die $\operatorname{Re} w > 0$ gilt. Γ ist also eine Gerade in der komplexen Ebene die die reelle Achse mit einem Winkel $< \pi/4$ schneidet (siehe Abbildung 3). Dies ist der Fall, da $\mathrm{Re}(-i\lambda + \delta) = \delta > 0$. Daraus folgt aber, dass man das Integral über Γ auf ein Integral über die reelle Achse deformieren kann (Cauchyscher Integralsatz) und wir erhalten

$$\frac{e^{\frac{\xi^2}{4(i\lambda-\delta)}}}{(\delta - i\lambda)^{1/2}} \int_\Gamma e^{-z^2} dz = \frac{e^{\frac{\xi^2}{4(i\lambda-\delta)}}}{(\delta - i\lambda)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \frac{\pi^{1/2}}{(\delta - i\lambda)^{1/2}} e^{\frac{\xi^2}{4(i\lambda-\delta)}}.$$

Also folgt insgesamt

$$\sqrt{2\pi} \lim_{\delta\to 0} \widehat{h_\delta}(\xi) \;=\; \lim_{\delta\to 0} \left(\frac{\pi}{\delta - i\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\xi^2}{4(i\lambda-\delta)}} = \left(\frac{\pi}{-i\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\xi^2}{4i\lambda}},$$

wobei $(-i\lambda)^{\frac{1}{2}}$ die Wurzel w von $-i\lambda$ bezeichnet mit $\mathrm{Re}\, w > 0$. □

Lemma 4.6. *Seien* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}\setminus \{0\}$ *und* $\delta > 0$.
Weiters seien

$$\Lambda := \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \quad \textit{und} \quad k_\delta(x) := e^{ix\cdot\Lambda x - \delta|x|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann gelten

$$(2\pi)^{n/2}\, \widehat{k_\delta}(\xi) = \pi^{\frac{n}{2}} \prod_{j=1}^n \frac{e^{\frac{\xi_j^2}{4(i\lambda_j-\delta)}}}{(\delta - i\lambda_j)^{1/2}}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

und

$$(2\pi)^{n/2} \lim_{\delta\to 0} \widehat{k_\delta}(\xi) = \pi^{\frac{n}{2}} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}\,\mathrm{sign}\,\Lambda}}{|\det \Lambda|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{i}{4}\xi\cdot\Lambda^{-1}\xi}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis. Nach Definition, dem Satz von Fubini und Lemma 4.5 gilt

$$\begin{aligned}
(2\pi)^{n/2}\, \widehat{k_\delta}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\Lambda x - \delta|x|^2 - ix\cdot\xi} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n e^{i\lambda_j x_j^2 - \delta x_j^2 - ix_j\xi_j} dx_1 \cdots dx_n \\
&= \prod_{j=1}^n \left[\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda_j x_j^2 - \delta x_j^2 - ix_j\xi_j} dx_j\right] = \pi^{n/2} \prod_{j=1}^n \frac{e^{\frac{\xi_j^2}{4(i\lambda_j-\delta)}}}{(\delta - i\lambda_j)^{1/2}}.
\end{aligned}$$

Nun wenden wir wieder Lemma 4.5 an und erhalten (beachte, dass $\mathrm{Re}(-i\lambda_j)^{1/2} > 0$)

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta\to 0} (2\pi)^{n/2}\, \widehat{k_\delta}(\xi) &= \prod_{j=1}^n \left(\frac{\pi}{-i\lambda_j}\right)^{1/2} e^{\frac{\xi_j^2}{4i\lambda_j}} = e^{-\frac{i}{4}\xi\cdot\Lambda^{-1}\xi} \prod_{j=1}^n \left(\frac{\pi}{-i\lambda_j}\right)^{1/2} = \\
&= \pi^{n/2} e^{-\frac{i}{4}\xi\cdot\Lambda^{-1}\xi} \prod_{j=1}^n \frac{1}{|\lambda_j|^{1/2} e^{-\,\mathrm{sgn}(\lambda_j) i\pi/4}} = \pi^{n/2} e^{-\frac{i}{4}\xi\cdot\Lambda^{-1}\xi} \frac{e^{i\pi\,\mathrm{sign}\,\Lambda/4}}{|\det\Lambda|^{1/2}}.
\end{aligned}$$

Das ist die Behauptung des Lemmas. □

Lemma 4.7. *Sei A eine reelle, symmetrische und invertierbare $n \times n$-Matrix und*

$$k_\delta^A(x) := e^{ix\cdot Ax - \delta|x|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann gilt

$$(2\pi)^{n/2} \lim_{\delta\to 0} \widehat{k_\delta^A}(\xi) = \pi^{\frac{n}{2}} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}\,\mathrm{sign}\, A}}{|\det A|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{i}{4}\xi\cdot A^{-1}\xi}.$$

Beweis. Wir diagonalisieren A und schreiben $A = U^T \Lambda U$ mit einer orthogonalen ($U^T = U^{-1}$) Matrix U und der Diagonalmatrix Λ, bestehend aus den Eigenwerten von A. Dann gilt mit der Substitution $z = Ux$ ($\det U = 1$)

$$\begin{aligned} (2\pi)^{n/2}\widehat{k_\delta^A}(\xi) &= \int e^{ix\cdot Ax - \delta|x|^2 - ix\xi} dx = \int e^{ix\cdot U^T\Lambda Ux - \delta|x|^2 - ix\xi} dx \\ &= \int e^{iz\cdot\Lambda z - \delta|z|^2 - iU^Tz\cdot\xi} dz = \int e^{iz\cdot\Lambda z - \delta|z|^2 - iz\cdot U\xi} dz = (2\pi)^{n/2}\widehat{k_\delta^\Lambda}(U\xi). \end{aligned}$$

Auf dieses letzte Integral wenden wir nun Lemma 4.6 an und erhalten

$$\begin{aligned} \lim_{\delta\to 0}(2\pi)^{n/2}\widehat{k_\delta^A}(\xi) &= \lim_{\delta\to 0}(2\pi)^{n/2}\widehat{k_\delta^\Lambda}(U\xi) = \pi^{n/2}\frac{e^{i\frac{\pi}{4}\,\mathrm{sign}\,\Lambda}}{|\det \Lambda|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{i}{4}(U\xi)\cdot\Lambda^{-1}U\xi} \\ &= \pi^{n/2}\frac{e^{i\frac{\pi}{4}\,\mathrm{sign}\, A}}{|\det A|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{i}{4}\xi\cdot A^{-1}\xi}, \end{aligned}$$

da $\mathrm{sign}\,\Lambda = \mathrm{sign}\, A$ und $\det\Lambda = \det A$. □

Lemma 4.8. *Sei A eine reelle, symmetrische und invertierbare $n \times n$-Matrix. Weiters sei*

$$k_\delta^\varepsilon(x) = e^{\frac{i}{2\varepsilon}x\cdot Ax - \delta|x|^2}.$$

Dann gilt

$$\lim_{\delta\to 0}\widehat{k_\delta^\varepsilon}(y) = \varepsilon^{\frac{n}{2}}\frac{e^{i\frac{\pi}{4}\,\mathrm{sign}\, A}}{|\det A|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{i\varepsilon}{2}y\cdot A^{-1}y}.$$

Beweis. Wende Lemma 4.7 an. (Übung!) □

Nun kommen wir zum Beweis von Satz 4.4 und erinnern daran, dass wir die Asymptotik für $\varepsilon \to 0$ des Integrals

$$J_\varepsilon = (2\pi\varepsilon)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{2\varepsilon}y\cdot Ay} a(y)dy$$

für eine symmetrische invertierbare Matrix betrachten.

Beweis von Satz 4.4. Es gilt nach dem Satz von Lebesgue ($a \in C_c^\infty$) mit der Bezeichnung k_δ^ε von Lemma 4.8

$$\begin{aligned} J_\varepsilon &= (2\pi\varepsilon)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{2\varepsilon}y\cdot Ay} a(y)dy \\ &= (2\pi\varepsilon)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\delta\to 0}\left[e^{\frac{i}{2\varepsilon}y\cdot Ay - \delta|x|^2}\right] a(y)dy \\ &= (2\pi\varepsilon)^{-n/2}\lim_{\delta\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} k_\delta^\varepsilon(y)a(y)dy. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Mit Proposition 1.22 und einer weiteren Anwendung des Lebesgueschen Konvergenzsatzes (beachte die Form von $\widehat{k^\varepsilon_\delta}$ und dass $\hat{a} \in \mathcal{S}$) folgt

$$\begin{aligned} J_\varepsilon &= (2\pi\varepsilon)^{-n/2} \lim_{\delta\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{k^\varepsilon_\delta}(\xi)\hat{a}(\xi)d\xi \\ &= (2\pi\varepsilon)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\delta\to 0} \widehat{k^\varepsilon_\delta}(\xi)\hat{a}(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

Nun wenden wir Lemma 4.8 an und erhalten

$$J_\varepsilon = (2\pi)^{-n/2} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}\operatorname{sign} A}}{|\det A|^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\frac{\varepsilon}{2}\xi\cdot A^{-1}\xi}\hat{a}(\xi)d\xi.$$

Der Mittelwertsatz angewandt auf die Exponentialfunktion im Integranden in Abhängigkeit von ε liefert schließlich eine Konstante C mit (beachte $(2\pi)^{-n/2}\int \hat{a}(\xi)d\xi = a(0)$)

$$\left| J_\varepsilon - a(0)\frac{e^{i\frac{\pi}{4}\operatorname{sign} A}}{|\det A|^{1/2}} \right| \leq C\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |\hat{a}(\xi)| d\xi. \tag{4.7}$$

Da $\hat{a} \in \mathcal{S}$, gilt $\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2|\hat{a}(\xi)|d\xi < \infty$ und die Behauptung folgt. □

4.2.3 Lemma von Morse

In diesem Abschnitt werden wir den allgemeinen Fall (Phasen ϕ ohne degenerierte kritische Punkte) auf eine lineare bzw. quadratische Phase zurückführen. Dies geschieht durch eine Variablentransformation und wir müssen unterscheiden zwischen nicht kritischen und nicht degenerierten kritischen Punkten.

Satz 4.9 (Variablentransformation)**.** *Sei $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in C^∞ und weiters sei $D\phi(0) \neq 0$. Dann existiert eine C^∞-Funktion $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, sodass*

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(0) &= 0 \\ D\mathbf{F}(0) &= I \\ \phi(\mathbf{F}(x)) &= \phi(0) + D\phi(0)\cdot x \quad \textit{für } |x| \textit{ hinreichend klein.} \end{aligned}$$

Satz 4.10 (Lemma von Morse)**.** *Sei $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in C^∞ und 0 ein nicht degenerierter kritischer Punkt, das heißt $D\phi(0) = 0$ und $\det D^2\phi(0) \neq 0$. Dann existiert eine C^∞-Funktion $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, sodass*

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(0) &= 0 \\ D\mathbf{F}(0) &= I \\ \phi(\mathbf{F}(x)) &= \phi(0) + \tfrac{1}{2}x\cdot D\phi(0)\cdot x \quad \textit{für } |x| \textit{ hinreichend klein.} \end{aligned}$$

Beweis von Satz 4.9. Wir definieren $\mathbf{r}_n := D\phi(0) \neq 0$. Wir können die Menge $O = \{\mathbf{r}_n\}$ mit Vektoren $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_{n-1}$ erweitern, sodass O eine orthogonale Basis von $\mathbb{R}^n$ ist. Wir definieren die Funktion $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch

$$\mathbf{f}(x, y) := (\mathbf{r}_1\cdot(y-x), \ldots, \mathbf{r}_{n-1}\cdot(y-x), \phi(y) - \phi(0) - D\phi(0)\cdot x).$$

Wir betrachten nun die Ableitung der Funktion nach y (Jacobimatrix) und erhalten

$$D_y\mathbf{f}(0,0) = \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n \end{pmatrix}.$$

Daher ist $D_y f(0,0)$ invertierbar und wir können den impliziten Funktionensatz (Satz 1.33) anwenden. Dieser garantiert die Existenz einer Funktion $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{F}(0) = 0$, sodass $\mathbf{f}(x, \mathbf{F}(x)) = 0$ für alle $|x|$ hinreichend klein. Setzt man in $\mathbf{f}$ ein, so erhält man

$$\begin{cases} (\mathbf{F}(x) - x) \cdot \mathbf{r}_k = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n-1) \\ \phi(\mathbf{F}(x)) = \phi(0) + D\phi(0) \cdot x. \end{cases} \tag{4.8}$$

Mit der Definition von $\mathbf{r}_n$ und durch differenzieren von (4.8) erhalten wir

$$(D\mathbf{F}(0) - I)\mathbf{r}_k = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

Nachdem aber $\{\mathbf{r}_i\}_{i=1}^n$ eine orthogonale Basis von $\mathbb{R}^n$ ist gilt $D\mathbf{F}(0) - I = 0$ also $D\mathbf{F}(0) = I$, womit die Aussage bewiesen ist. □

Beweis von Satz 4.10. **Schritt 1: Vorbereitung** Für ein fixes $x \in \mathbb{R}^n$ sei $\Psi(t) := \phi(tx)$, also $\Psi(1) = \phi(x)$. Wir erhalten dann

$$\Psi(1) = \Psi(0) + \Psi'(0) + \int_0^1 (1-t)\Psi''(t)dt$$

aufgrund der Taylorformel (Proposition 1.3). Durch Differenzieren ergibt sich $\Psi''(t) = x \cdot D^2\phi(tx)x$ und wir können somit $\phi(x)$ schreiben als

$$\phi(x) = \phi(0) + \frac{1}{2} x \cdot A(x)x \quad \text{mit} \quad A(x) := 2\int_0^1 (1-t)D^2\phi(tx)dt. \tag{4.9}$$

Es gilt $A(0) = D^2\phi(0)$, daher ist $A(0)$ regulär. Da die Determinante einer Matrix stetig von ihren Einträgen abhängt und $A(x)$ eine glatte Funktion ist können wir auch annehmen, dass $\det A(x) \neq 0$ für hinreichend kleines $|x|$.

Schritt 2: $D^2\phi(0)$ ist diagonal Wir nehmen an, dass $D^2\phi(0)$ eine Diagonalmatrix ist und zeigen die Behauptung. Dazu beweisen wir mit Induktion, dass für alle $m \in \{0, 1, \ldots, n\}$ eine glatte Funktion $\mathbf{F}_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ existiert, sodass

$$\begin{cases} \mathbf{F}_m(0) = 0,\ D\mathbf{F}_m(0) = I \text{ und} \\ \phi(\mathbf{F}_m(x)) = \phi(0) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m \phi_{x_i x_i}(0)x_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=m+1}^n a_m^{i,j}(x)x_i x_j, \end{cases} \tag{4.10}$$

für ein hinreichend kleines $|x|$ und $A_m(x) = (a_m^{i,j}(x))_{i,j=1}^n$ glatt und symmetrisch. Differenzieren der beiden Seiten in der zweiten Zeile von (4.10) liefert

$$a_m^{ij}(0) = \phi_{x_i x_j}(0) \quad \text{für } i, j = m+1, \ldots, n,$$

also insbesondere $a_m^{m+1,m+1}(x) \neq 0$ für $|x|$ hinreichend klein.

1. Für $m = 0$ folgt (4.10) aus (4.9) mit $\mathbf{F}_0(x) = x$ und $A_0(x) = A(x)$.
2. Es gelte also (4.10) für ein beliebiges $m \in \{0, \ldots, n-1\}$. Wir schreiben $\phi_m(x) := \phi(\mathbf{F}_m(x))$. Wir definieren die Abbildung $T_{m+1} \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ durch

$$\begin{aligned} T_{m+1}(y) \;=\; & (y_1, \ldots, y_m, \\ & \left(\frac{a_m^{m+1,m+1}(y)}{\phi_{x_{m+1}x_{m+1}}(0)}\right)^{1/2} \left(y_{m+1} + \sum_{j=m+2}^{n} y_j \frac{a_m^{m+1,j}(y)}{a_m^{m+1,m+1}(y)}\right), \\ & y_{m+2}, \ldots, y_n) \end{aligned} \tag{4.11}$$

für hinreichend kleine $|y|$. Mit der Induktionsvoraussetzung und der Kurzschreibweise $x = T_{m+1}(y)$ folgt dann (Übung!)

$$\phi_m(y) = \phi(0) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \phi_{y_iy_i}(0)y_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=m+1}^{n} a_m^{i,j}(y)y_iy_j \tag{4.12}$$

$$= \phi(0) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m+1} \phi_{x_ix_i}(0)x_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=m+2}^{n} b_{m+1}^{i,j}(y)x_ix_j, \tag{4.13}$$

wobei

$$b_{m+1}^{i,j}(y) := \begin{cases} a_m^{i,j}(y) - \frac{a_m^{m+1,i}(y)a_m^{m+1,j}(y)}{a_m^{m+1,m+1}(y)} & i,j \in \{m+2, \ldots, n\} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aus der Definition von T_{m+1} folgt (beachte dass $D^2\phi(0)$ diagonal ist)

$$T_{m+1}(0) = 0 \quad \text{und} \quad DT_{m+1}(0) = I.$$

Mit dem Hauptsatz über inverse Funktionen (Satz 1.32) existiert damit die Umkehrfunktion T_{m+1}^{-1} von T_{m+1} lokal um 0 und sie ist glatt. Also folgt aus (4.13)

$$\phi(\mathbf{F}_m(T_{m+1}^{-1}(x)) = \phi(0) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m+1} \phi_{x_ix_i}(0)x_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=m+2}^{n} a_{m+1}^{i,j}(x)x_ix_j \tag{4.14}$$

mit $a_{m+1}^{i,j} := b_{m+1}^{i,j} \circ T_{m+1}^{-1}$. Es folgt also die Behauptung für $m+1$ mit $\mathbf{F}_{m+1} := \mathbf{F}_m \circ T_{m+1}^{-1}$.
3. Der Fall $m = n$ ist die Aussage des Satzes.

Schritt 3: $D^2\phi(0)$ ist nicht diagonal Ist $D^2\phi(0)$ keine Diagonalmatrix, so existiert aber eine orthogonale Matrix U sodass $U^TD^2\phi(0)U$ diagonal ist. Wir definieren dann

$$\phi_d(x) := \phi(Ux)$$

und wenden Schritt 2 auf diese Funktion an, denn $D^2\phi_d(0) = U^TD^2\phi(0)U$ ist eine Diagonalmatrix. Wir erhalten eine Funktion $\mathbf{F_d}$ mit

$$\phi_d(\mathbf{F_d}(x)) = \phi_d(0) + \frac{1}{2}x \cdot D^2\phi_d(0)x \quad \text{für } |x| \text{ hinreichend klein.}$$

Das bedeutet aber nach Definition von ϕ_d

$$\phi(U\mathbf{F_d}(x)) = \phi(0) + \frac{1}{2}x \cdot U^T D^2\phi(0)Ux \quad \text{für } |x| \text{ hinreichend klein.}$$

Mit $\mathbf{F}(x) := U\mathbf{F_d}(U^T x)$ folgt die Behauptung. □

Bemerkung 4.11. Eine ähnliche Konstruktion wie im Beweis des Morse-Lemmas tritt bei der Durchführung der Cholesky-Diagonalisierung $A = LL^T$ für symmetrische positiv definite Matrizen A auf. Ist nun also die Matrix A symmetrisch und positiv definit, so gilt $a_{ii} > 0$ (wäre $a_{ii} \leq 0$, so wäre $e_i \cdot Ae_i = a_{ii} \leq 0$ im direkten Widerspruch zur positiven Definitheit). Ferner führen wir die quadratische Form $Q_0(x) = x \cdot Ax$ ein. Wir definieren nun

$$r_{1k} := \frac{a_{1k}}{\sqrt{a_{11}}}. \tag{4.15}$$

Mit den neuen Koeffizienten $a'_{ij} = a_{ij} - r_{1i}r_{1j}$ erhalten wir dann

$$\begin{aligned} Q_0(x) - \left(\sum_{k=1}^{n} r_{1k}x_k\right)^2 &= \sum_{j,k=1}^{n}\left[a_{jk}x_jx_k - \frac{a_{1k}a_{1j}}{a_{11}}x_jx_k\right] \\ &= \sum_{j=2}^{n}\sum_{k=2}^{n}(a'_{jk})x_kx_j =: Q_1(x), \end{aligned}$$

wobei Q_1 eine neue quadratische Form ist. Nachdem bereits $Q_0(x)$ positiv war, ist es auch $Q_1(x)$. Angenommen es wäre $Q_1(x) \leq 0$, für ein bestimmtes $(x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Unabhängig von der Wahl von x_1 gilt

$$Q_0(x) = Q_1(x) + \left(\sum_{i=1}^{n} r_{1k}x_k\right)^2. \tag{4.16}$$

Mit der Wahl $x_1 = -\frac{1}{r_{11}}\sum_{k=2}^{n} r_{1k}x_k$ ist dann der quadratische Teil von (4.16) gleich 0 und somit ist dann auch $Q_0(x) \leq 0$ im Widerspruch zur positiven Definitheit von A. Damit gilt nun aber $a'_{22} > 0$ und wir können genauso wie vorher für $Q(x)$ vorgehen. Mit Induktion erhalten wir dann die positiven quadratischen Formen

$$Q_i(x) = Q_0 - \sum_{j=1}^{i}\left(\sum_{k=j}^{n} r_{jk}x_k\right)^2 \quad \text{für } i = 1, \ldots, n-1. \tag{4.17}$$

In Gleichung (4.17) kann man sehr gut die Analogie zur Gleichung (4.10) aus dem Beweis des Morse-Lemmas sehen. Wir wissen weiterhin, dass Q_{n-1} nur mehr von der Variablen x_n abhängt und da die Form quadratisch sein muss erhalten wir

$$Q_{n-1}(x) = (r_{nn}x_n)^2, \tag{4.18}$$

mit geeigneter Setzung von r_{nn}. Mit der Beziehung (4.17) sieht man, dass

$$Q_0(x) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=j}^{n} r_{jk}x_k\right)^2. \tag{4.19}$$

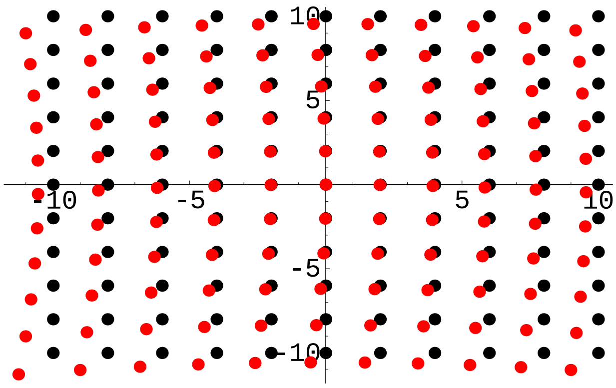

Abbildung 4: Variablentransformation von Beispiel 4.12

Um nun die Cholesky-Faktorisierung der Matrix A zu erhalten schreiben wir die durch die Abspaltung erhaltenen Koeffizienten in eine Matrix

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}. \tag{4.20}$$

Offenbar gilt $(Rx)_j = \sum_{k=j}^{n} r_{jk}x_k$ und damit $Q_0(x) = \|Rx\|^2 = x \cdot R^T Rx$. Weiters gilt aber, dass $Q_0(x) = x \cdot Ax$ und damit insgesamt

$$A = R^T R, \tag{4.21}$$

was der Cholesky-Zerlegung von A entspricht. •

Beispiel 4.12. Wir betrachten die Funktion $\phi(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + \frac{x_1^2+x_2^2}{100}$. $(0, 0)$ ist kein kritischer Punkt und wir können somit eine Koordinatentransformation im Ursprung nach Satz 4.9 finden. Hierzu gehen wir wie im Beweis vor und betrachten die Funktion

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) = (x_1 - y_1 - x_2 + y_2, y_1 + y_2 - x_1 - x_2 + \frac{y_1^2 + y_2^2}{100}).$$

Im Beweis wird an dieser Stelle der implizite Funktionensatz angegeben, was in unserem Fall heißt wir müssen die Gleichung $f(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$ nach y_1, y_2 lösen. Dies ist in diesem Fall analytisch möglich und führt auf eine Funktion $\mathbf{F}$, sodass $\mathbf{F}(0) = 0, D\mathbf{F}(0) = I$ und $\phi(\mathbf{F}(x)) = \phi(0) + D\phi(0) \cdot x$. Zur Veranschaulichung dieser Funktion betrachten wir Punkte im Intervall $[-10, 10]^2$ und betrachten die Auswirkungen von $\mathbf{F}$ darauf. Siehe hierzu Abbildung 4. Die roten Punkte sind die mit $\mathbf{F}$ transformierten Stellen des schwarzen Gitters. •

Beispiel 4.13. Wir betrachten die Funktion $\phi(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + \frac{x_1^4+x_2^4}{100}$. Der Punkt $(0, 0)$ ist hier ein nicht degenerierter kritischer Punkt. Wollen wir eine Variablentransformation im Ursprung durchführen, um die Funktion rein quadratisch zu machen, so müssen wir

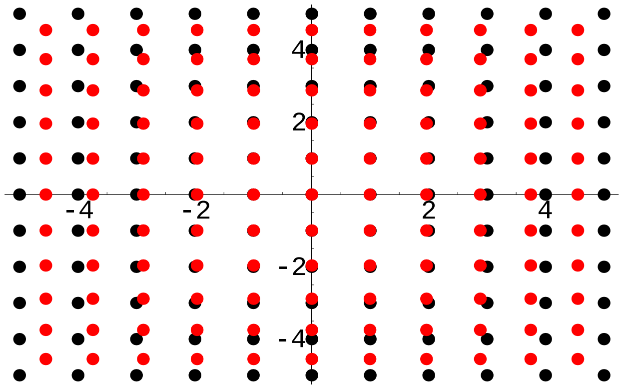

Abbildung 5: Variablentransformation von Beispiel 4.13

nach dem Lemma von Morse (Lemma 4.10) vorgehen. Wir erhalten

$$D^2\phi(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 2+\frac{3x_1^2}{25} & 0 \\ 0 & 2+\frac{3x_2^2}{25} \end{pmatrix}.$$

Dadurch haben wir auch die Matrixfunktion A aus dem Beweis des Morse-Lemmas. Nachdem diese bereits diagonal ist brauchen wir keine Koordinatentransformation mehr durchführen. Weiters bestimmen wir die Funktionen T_1, T_2 und invertieren sie. Es ist also $\mathbf{F}_1 = T_1^{-1}$ und $\mathbf{F} = \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_1 \circ T_2^{-1}$ die gewünschte Koordinatentransformation. Die Wirkung von $\mathbf{F}$ ist in Abbildung 5 gegeben. Die roten Punkte sind wieder wie im vorigen Beispiel die transformierten. •

Wir wenden uns nun wieder der Asymptotik der Integrale der Form

$$J_\varepsilon = (2\pi\varepsilon)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{\varepsilon}\phi(y)} a(y)dy \quad \varepsilon \to 0 \tag{4.22}$$

mit $a \in C_c^\infty$ und $\phi \in C^\infty$ so, dass kein kritischer Punkt von ϕ degeneriert ist. Seien $\{y_1, \ldots, y_N\}$ die kritischen Punkte von ϕ innerhalb des Trägers von a. Es ist also

$$\{y_1, \ldots, y_N\} = \{y \in \mathbb{R}^n : y \in \operatorname{supp}(a),\ D\phi(y) = 0,\ \det D^2\phi(y) \neq 0\}. \tag{4.23}$$

Dies führt dann auf folgenden

Satz 4.14. *Sei $\zeta \in C^\infty$, sodass ζ in einer Umgebung aller kritischen Punkte verschwindet. Dann gilt*

$$\forall m \exists c_m \forall \varepsilon > 0 \ : \ \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{\phi(y)}{\varepsilon}} a(y)\zeta(y)dy \right| \leq c_m \varepsilon^m. \tag{4.24}$$

Beweis. Die Idee ist die Rückführung des Integrals auf lineare Phasen (Satz 4.3) mittels der Variablentransformation in Satz 4.9. Wir definieren $M := \operatorname{supp} a \cap \operatorname{supp} \zeta$ und sei für $z \in M$ der Radius $r(z) > 0$ so, dass es einen Diffeomorphismus

$$\mathbf{F} : \mathbf{F}^{-1}(B(z, r(z))) \to B(z, r(z))$$

gibt mit

$$\mathbf{F}(0) = z, \quad D\mathbf{F}(0) = I \tag{4.25}$$

$$\phi(\mathbf{F}(x)) = \phi(z) + D\phi(z) \cdot x \quad \text{für alle } x \in \mathbf{F}^{-1}(B(z, r(z))). \tag{4.26}$$

Dies folgt aus Satz 4.9 und aus dem Satz über inverse Funktionen (Satz 1.32), da $\det D\mathbf{F}(0) = 1$. Da die Menge M kompakt ist, ist M Überdeckung von endlich vielen solchen Kugeln

$$M \subseteq \bigcup_{j=1}^{K} B(z_j, r(z_j)).$$

Nun wählen wir eine Partition der Eins für M bezüglich der Überdeckung durch die Kugeln $\{B(z_j, r(z_j))\}_{j=1}^K$, wir bekommen also Funktionen $\{\varphi_j\}_{j=1}^K$, für die gilt

$$\operatorname{supp}\varphi_j \subset B(z_j, r(z_j)), \quad \sum_{j=1}^{K} \varphi_j(x) = 1 \text{ für alle } x \in M, \quad \varphi_j \in C_c^\infty$$

für alle $1 \leq j \leq K$. Es gilt also mit dieser Partition der Eins und dem Transformationssatz für Integrale

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\phi(y)/\varepsilon} a(y)\zeta(y)dy &= \sum_{j=1}^{K} \int_{B(z_j, r(z_j))} \varphi_j(y) e^{i\phi(y)/\varepsilon} a(y)\zeta(y)dy \\
&= \sum_{j=1}^{K} \int_{\mathbf{F}^{-1}(B(z_j, r(z_j)))} \varphi_j(\mathbf{F}(x)) e^{i\phi(\mathbf{F}(x))/\varepsilon} a(\mathbf{F}(x))\zeta(\mathbf{F}(x)) \det D\mathbf{F}(x)dx.
\end{aligned}$$

Nach der Wahl der Funktionen $\mathbf{F}$ folgt aus (4.26) weiter

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\phi(y)/\varepsilon} a(y)\zeta(y)dy = \sum_{j=1}^{K} e^{i\phi(y_j)/\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_j(\mathbf{F}(x)) e^{iD\phi(y_j)\cdot x/\varepsilon} a(\mathbf{F}(x))\zeta(\mathbf{F}(x)) \det D\mathbf{F}(x)dx,$$

wenn wir $\varphi_j(\mathbf{F}(x)) = 0$ setzen für $x \notin \mathbf{F}^{-1}(B(z_j, r(z_j)))$. Nun wenden wir Satz 4.3 für lineare Phasen mit der Amplitude $\varphi_j \circ \mathbf{F} \cdot a \circ \mathbf{F} \cdot \zeta \circ \mathbf{F} \cdot \det D\mathbf{F} \in C_c^\infty$ an und erhalten die Behauptung. □

Satz 4.15. *Sei $k \in \{1, \ldots, N\}$. $\zeta_k \in C_c^\infty$ wählen wir so, dass ζ_k überall verschwindet außer in einer (hinreichend kleinen) Umgebung von y_k (dem k-ten kritischen Punkt von ϕ) und $\zeta_k(y_k) = 1$. Dann gilt*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left| (2\pi\varepsilon)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{\varepsilon}\phi(y)} a(y)\zeta(y)dy - e^{\frac{i\phi(y_k)}{\varepsilon}} \frac{1}{|\det D^2\phi(y_k)|^{1/2}} e^{\frac{i\pi}{4}\operatorname{sign}(D^2\phi(y_k))} a(y_k) \right| = 0.$$

Beweis. Sei $\operatorname{supp}\zeta_k \subset B(y_k, r(y_k))$ mit $r(y_k)$ so, dass

$$\mathbf{F} : \mathbf{F}^{-1}(B(y_k, r(y_k))) \to B(y_k, r(y_k))$$

ein Diffeomorphismus ist mit

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(0) &= y_k, \quad D\mathbf{F}(0) = I, && (4.27)\\
\phi(\mathbf{F}(x)) &= \phi(y_k) + \frac{1}{2} x \cdot D^2\phi(y_k)x \quad \text{für alle } x \in \mathbf{F}^{-1}(B(y_k, r(y_k))). && (4.28)
\end{aligned}$$

Dies folgt aus dem Lemma von Morse (Satz 4.10) und aus dem Satz über inverse Funktionen (Satz 1.32). Es gilt dann mit $J_\varepsilon = (2\pi\varepsilon)^{-n/2}\int_{B(y_k,r(y_k))} e^{i\phi(y)/\varepsilon}a(y)\zeta(y)dy$ nach (4.28)

$$\begin{aligned} J_\varepsilon &= (2\pi\varepsilon)^{-n/2}\int_{\mathbf{F}^{-1}(B(y_k,r(y_k)))} e^{i\phi(\mathbf{F}(x))/\varepsilon}a(\mathbf{F}(x))\zeta(\mathbf{F}(x))\det D\mathbf{F}(x)dx \\ &= (2\pi\varepsilon)^{-n/2}e^{i\phi(y_k)/\varepsilon}\int_{\mathbf{F}^{-1}(B(y_k,r(y_k)))} e^{\frac{i}{2\varepsilon}x\cdot D^2\phi(y_k)x}a(\mathbf{F}(x))\zeta(\mathbf{F}(x))\det D\mathbf{F}(x)dx. \end{aligned}$$

Beachtet man nun $a(\mathbf{F}(0))\zeta(\mathbf{F}(0))\det D\mathbf{F}(0) = a(y_k)\cdot 1\cdot 1 = a(y_k)$, so folgt mit Satz 4.4 die Behauptung. □

Kombinieren wir nun Satz 4.14 und Satz 4.15 so erhalten wir die folgende Aussage über die Asymptotik des Integrals in (4.4)

Satz 4.16. *Sei $a \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\{y_1,\dots,y_N\}$ seien die nicht degenerierten (und auch die einzigen) kritischen Punkte von ϕ. Dann gilt*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|(2\pi\varepsilon)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{\varepsilon}\phi(y)}a(y)dy - \sum_{k=1}^N \frac{e^{\frac{i\phi(y_k)}{\varepsilon}}}{|\det D^2\phi(y_k)|^{1/2}}e^{\frac{i\pi}{4}\operatorname{sign}(D^2\phi(y_k))}a(y_k)\right| = 0. \tag{4.29}$$

4.3 Anwendung auf die Wellengleichung

Die Lösung des Anfangswertproblems vor Proposition 4.2 war durch eben diese gegeben durch

$$u^\varepsilon(x,t) = \frac{1}{2}[I_0(g^\varepsilon) + I_1(g^\varepsilon)](x,t),$$

wobei

$$I_j(g^\varepsilon)(x,t) = \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} a(z)e^{i\phi_j(x,\xi,z,t)/\varepsilon}dzd\xi \qquad j\in\{0,1\}$$

und

$$\begin{aligned} \phi_0(x,\xi,z,t) &= (x-z)\xi + t\,|\xi| + p(z), \\ \phi_1(x,\xi,z,t) &= (x-z)\xi - t\,|\xi| + p(z). \end{aligned}$$

Mithilfe der Methode der stationären Phase sind wir nun in der Lage, eine asymptotische Formel für die Lösung $u^\varepsilon(x,t)$ mit $\varepsilon\to 0$ zu finden. Wir haben folgenden

Satz 4.17. *Sei $D^2_{\xi,z}\phi_j$ die Hessematrix der Funktion ϕ_j bezüglich der $2n$ Variablen ξ, z. Für alle $x\in\mathbb{R}^n$ und alle t hinreichend klein gilt*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|u^\varepsilon(x,t) - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^1 a(z_j)e^{i\phi_j(x,z_j,\xi_j,t)/\varepsilon}\frac{e^{i\frac{\pi}{4}\operatorname{sign} D^2_{\xi,z}\phi_j(x,z_j,\xi_j,t)}}{|\det D^2_{\xi,z}\phi_j(x,z_j,\xi_j,t)^{1/2}|}\right| = 0,$$

wobei (ξ_j,z_j) für $j\in\{0,1\}$ die jeweils einzigen kritischen Punkte von $\phi_j(x,\cdot,t)$ sind.

Beweisidee. Aus der Definition von ϕ_j erhalten wir

$$\begin{aligned} D_\xi\phi_j &= (x-z) + (-1)^j t\frac{\xi}{|\xi|}, \quad \xi\neq 0, \\ D_z\phi_j &= -\xi + Dp(z), \end{aligned} \tag{4.30}$$

wobei $D_\xi \phi_j$ bzw. $D_z \phi_j$ den Gradienten der Funktion ϕ_j nach den Variablen ξ bzw. z bezeichnet. Wir definieren

$$G_j(x,t,\xi,z) := \begin{pmatrix} D_\xi \phi_j \\ D_z \phi_j \end{pmatrix}.$$

Die Jacobimatrix $D_{\xi,z} G_j$ von G_j nach den Variablen ξ, z ergibt sich zu

$$D_{\xi,z} G_j = D^2_{\xi,z} \phi_j = \begin{pmatrix} (-1)^j \frac{t}{|\xi|}\left(I - \frac{\xi \otimes \xi}{|\xi|^2}\right) & -I \\ -I & D^2 p(z) \end{pmatrix}.$$

Wir erinnern nun an die Voraussetzung $Dp(z) \neq 0$ für alle $z \in \operatorname{supp} a$. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ beliebig und $t_0 = 0$ ist $(\xi_j^0, z_j^0) = (Dp(x_0), x_0)$ die einzige Lösung von

$$G_j(x_0, 0, \xi, z) = 0.$$

Nun ist $|\det D_{\xi,z} G_j(x_0, 0, \xi_j^0, z_j^0)| = 1$ und somit liefert der implizite Funktionensatz eine Umgebung U von $(x_0, 0)$, eine Umgebung V von $(Dp(x_0), x_0)$ und Funktionen $(\xi_j(x,t), z_j(x,t))$ sodass $(\xi_j(x,t), z_j(x,t))$ für $(x,t) \in U$ die einzige Lösung von

$$G_j(x,t,\xi,z) = 0$$

in der Menge V ist. Da aber aus $D_\xi \phi_j = 0$ folgt, dass für zwei Lösungen $(\xi_1, z_1), (\xi_2, z_2)$ dieser Gleichung gilt $|z_1 - z_2| \leq 2t$, wählen wir t hinreichend klein, sodass $(\xi_1, z_1), (\xi_2, z_2)$ beide in V enthalten sind. Also hat für t hinreichend klein und $x \in \operatorname{supp} a$ die Gleichung

$$G_j(x,t,\xi,z) = 0$$

eine eindeutige Lösung $(\xi_j(x,t), z_j(x,t))$. ϕ_j hat also für t hinreichend klein höchstens einen kritischen Punkt. Wir möchten nun Satz 4.16 anwenden. Die Funktion $(\xi, z) \mapsto a(z)$ hat aber keinen kompakten Träger, man muss also $a(z)$ mit einer Funktion $\varphi(\xi)$ multiplizieren und die entstehenden Restterme abschätzen. Dies kann mit einigem Rechenaufwand formal durchgeführt werden. Anschaulich liefern Punkte (ξ, z), die außerhalb einer Kugel mit hinreichend großem Radius liegen, keinen Beitrag mehr zum Integral, da dies keine kritischen Punkte der Phase ϕ sind. $\square$

4.4 Übungen

1. Beweise Formel (4.2).

2. Beweise Proposition 4.2.

3. Sei Γ eine Gerade in der komplexen Ebene, die die $x-$Achse mit einem Winkel $< \pi/4$ schneidet. Dann gilt
$$\int_\Gamma e^{-z^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

4. Beweise Lemma 4.8.

5. Beweise den Übergang von (4.13) auf (4.12).

5 Ergänzungen

5.1 Zusammenhang zwischen Wellengleichung und Eikonalgleichung

Wir erinnern noch einmal an das Anfangswertproblem (4.1), das folgendermaßen aussah

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta_x u &= 0 \\ u(x,0) &= g(x) \\ u_t(x,0) &= 0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Wenn wir nun die Funktionen

$$\rho_0(x,t,\xi) := x \cdot \xi + t|\xi| \tag{5.2}$$

$$\rho_1(x,t,\xi) := x \cdot \xi - t|\xi| \tag{5.3}$$

definieren, lässt sich die Lösung (4.2) dieses Problems darstellen als

$$u(x,t) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\hat{g}(\xi)}{2} e^{i\rho_0(x,t,\xi)} d\xi + (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\hat{g}(\xi)}{2} e^{i\rho_1(x,t,\xi)} d\xi.$$

Die Frage ist nun, welche Differentialgleichung ρ_0 und ρ_1 erfüllen. Wir erhalten aus der Definition von ρ_j

$$\rho_j(x,0,\xi) = x \cdot \xi, \quad \partial_t \rho_j(x,t,\xi) = (-1)^j |\xi|, \quad \partial_{x_k} \rho_j(x,t,\xi) = \xi_k \text{ für } k = 1,\dots,n.$$

Man sieht sofort, dass $(\partial_t \rho_j)^2 = \sum_{k=1}^n (\partial_{x_k} \rho_j)^2$, ρ_j erfüllt also die *Eikonalgleichung*

$$\partial_t \rho_j = \pm |D_x \rho_j|.$$

Sie ist ein Spezialfall der *Hamilton-Jacobi-Gleichung*

$$\rho_t = H(D_x \rho, x), \quad H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R} \text{ gegeben,}$$

einem Anfangswertproblem 1. Ordnung. Die charakteristischen Gleichungen dieser partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung sind die *Hamiltonschen Bewegungsgleichungen*

$$\dot{x} = D_p H(p,x), \tag{5.4}$$

$$\dot{p} = -D_x H(p,x). \tag{5.5}$$

Für die Bewegung eines Punktteilchens mit Masse m in einem konservativen Kraftfeld $f(x) = -D\phi(x)$ mit Potential $\phi(x)$ ist die Hamilton-Funktion H gegeben durch

$$H(p,x) = \frac{|p|^2}{2m} + \phi(x)$$

und die Gleichungen (5.4),(5.5) führen auf die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = f(x).$$

5.2 Wellengleichung mit variablen Koeffizienten

Voraussetzungen Sei $B(x) = (b_{ij}(x))_{i,j=1}^n$ positiv definit. Es gilt also

$$\exists c \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}^n \forall y \in \mathbb{R}^n : \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) y_i y_j \geq c|y|^2.$$

Es gelte außerdem dass $b_{ij}(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ wobei $1 \leq i, j \leq n$. Seien $\rho_\pm(x, t, y)$ Lösungen der folgenden Eikonalgleichung für alle $y \in \mathbb{R}^n$

$$\partial_t \rho_\pm = \pm\sqrt{(D\rho_\pm) \cdot B(x)(D\rho_\pm)} = \pm(\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) \partial_{x_i} \rho_\pm \partial_{x_j} \rho_\pm)^{1/2}$$

mit geeigneten Anfangsbedingungen.
Bezüglich der Lösungen der Wellengleichung mit den Koeffizienten b_{ij} gilt nun folgender

Satz 5.1. *Unter obigen Voraussetzungen existieren unendlich glättende Operatoren $I_\pm$ (mit Symbolen in $S^{-\infty}$) und Amplituden $a_\pm(x, t, y)$, die die Abschätzungen $|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_t^\gamma a(x, t, y)| \leq A_{\alpha,\beta,\gamma}(1 + |\xi|)^{-|\beta|}$ erfüllen, sodass*

$$u(x, t) = \sum_\pm \left[\int_{\mathbb{R}^n} a_\pm(x, t, y) e^{i\rho_\pm(x,t,y)} \hat{g}(y) dy + I_\pm(g) \right]$$

die Wellengleichung

$$u_{tt}(x, t) - \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) u_{x_i x_j}(x, t) = 0, \quad u(x, 0) = g(x), \quad u_t(x, 0) = 0$$

löst.

5.3 Homogenisierung elliptischer Gleichungen

Wir definieren den Sobolevraum

$$H^1(U) := \{f \in L^2(U) : Df \in L^2(U)\} \tag{5.6}$$

mit der Norm

$$\|f\|_{H^1(U)} := \|f\|_{L^2(U)} + \|Df\|_{L^2(U)}$$

wobei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt mit glattem Rand. Weiters sei $H_0^1(U)$ der abgeschlossene Teilraum der Funktionen $f \in H^1(U)$, für die gilt, dass $f = 0$ (im Sinne des Spuroperators) auf ∂U. Äquivalent ist $H_0^1(U)$ der Abschluss von $C_c^\infty(U)$ in $H^1(U)$. Nun definieren wir noch $H^{-1}(U)$ als den Dualraum von $H_0^1(U)$, ausgestattet mit der Operatornorm.
Wir betrachten die linearen elliptischen Differentialgleichungen

$$-\operatorname{div}\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) Du^\varepsilon\right) = f \quad \text{in } U \tag{5.7}$$

$$u^\varepsilon = 0 \quad \text{auf } \partial U, \tag{5.8}$$

für $f \in H^{-1}(U)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir werden sehen, dass u^ε einen Grenzwert in einer gewissen Topologie besitzt und wir möchten eine Differentialgleichung angeben, von der dieser Limes eine schwache Lösung ist. Dazu betrachten wir zuerst den allgemeinen Fall überblicksmäßig und formulieren das Resultat und anschließend wird der Spezialfall $U = (0,1)$ untersucht. Im speziellen betrachten wir für $Y = [0,1]^n$ die Elliptizitätsbedingung

$$\forall y \in Y \forall \xi \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle A(y)\xi, \xi \rangle \geq \nu |\xi|^2 \tag{5.9}$$

für ein $\nu > 0$. Weiters soll gelten, dass $|A(y)| \leq C$ und

$$y \mapsto A(y) \text{ ist periodisch bezüglich } Y.$$

Wir erinnern an den Satz von Lax-Milgram:

Satz 5.2. *Sei a eine stetige Bilinearform auf einem Hilbertraum H und $F \in H'$. Es gelte weiters, dass a elliptisch ist mit Konstante α, d.h. $a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2$ für alle $u \in H$. Dann hat die Gleichung*

$$a(u,v) = F(v) \quad v \in H$$

eine eindeutige Lösung $u \in H$ und es gilt

$$\|u\| \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|$$

Sei nun $u^\varepsilon \in H_0^1(U)$ die (nach dem Satz von Lax-Milgram und Gleichung (5.9) existente und eindeutige) schwache Lösung von (5.7). Das bedeutet, es gilt

$$\int_U \langle A(x/\varepsilon) Du, Dv \rangle \, dx = \int_U fv dx$$

für alle $v \in H_0^1(U)$. Aus dem Satz von Lax-Milgram folgt außerdem

$$\sup_{\varepsilon > 0} \|u^\varepsilon\|_{H_0^1(U)} \leq \frac{1}{\nu} \|f\|_{H^{-1}(U)} < \infty. \tag{5.10}$$

Die Menge $\{u^\varepsilon : \varepsilon > 0\} \subset H_0^1$ ist also beschränkt. Da man aber in einem unendlichdimensionalen Hilbertraum im allgemeinen aus einer beschränkten Menge keine normkonvergente Teilfolge extrahieren kann, muss man sich mit einer schwächeren Topologie begnügen und wir definieren

Definition 5.3. *Eine Folge (x_n) in einem Hilbertraum H heißt* schwach konvergent *zu einem Grenzwert x (i.Z. $x_n \rightharpoonup x$), falls*

$$\langle x_n, y \rangle \to \langle x, y \rangle$$

für alle $y \in H$.

Ein Resultat aus der Funktionalanalysis besagt, dass beschränkte Mengen in Hilberträumen schwach kompakt sind, das heißt es gilt

Satz 5.4. *Sei (x_n) eine beschränkte Folge in einem Hilbertraum H. Dann existiert eine Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) und ein Element $x \in H$, sodass $x_{n_k} \rightharpoonup x$.*

Aus (5.10) und diesem Satz folgt also, dass eine Folge $\varepsilon_k \to 0$ existiert, sodass

$$u^{\varepsilon_k} \rightharpoonup u \quad \text{in } H_0^1(U). \tag{5.11}$$

Dieser schwache Limes u erfüllt ebenfalls eine Differentialgleichung, die im nächsten Satz angegeben wird.

Satz 5.5 (L. Tartar, 1977). *Der schwache Limes u obiger Folge löst das homogenisierte Problem*

$$-\operatorname{div}\left(\tilde{A}Du\right) = f \quad \text{in } U \tag{5.12}$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial U \tag{5.13}$$

wobei $\tilde{A} = (\tilde{a}_{il})_{i,l=1}^n$ und

$$\tilde{a}_{il} = \int_Y \sum_{j=1}^n a_{ij}(y)(\delta_{jl} + w^l_{y_j}(y))dy \quad \text{mit } 1 \le i, l \le n.$$

w^l sei hierbei für $l = 1, \dots, n$ eine (existente) Lösung des adjungierten Korrekturproblems

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(A^T Dw^l\right) = \sum_{i=1}^n (a_{il}(y))_{y_i} & \text{in } \mathbb{R}^n \\ w^l \ Y\text{-periodisch.} \end{cases}$$

Wir werden den folgenden Spezialfall von Satz 5.5 beweisen:

Satz 5.6. *Sei u^ε die eindeutige Lösung des Problems*

$$-\frac{d}{dx}\left(a^\varepsilon \frac{du^\varepsilon}{dx}\right) = f \quad \text{in } (0,1), \tag{5.14}$$

$$u^\varepsilon(0) = u^\varepsilon(1) = 0. \tag{5.15}$$

Dabei ist $a : (0,1) \to \mathbb{R}$ eine beschränkte positive $(0,1)-$periodische Funktion mit

$$0 < \alpha \le a(x) \le \beta < \infty,$$

$a^\varepsilon(x) := a(x/\varepsilon)$ und $f \in H^{-1}(0,1)$. Sei u^ε die Lösung des Problems (5.14). Dann hat die Folge u^ε einen schwachen Limes u^0 und u^0 ist die eindeutige Lösung des Problems

$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\int_0^1 a(y)^{-1}dy}\frac{du^0}{dx}\right) = f \quad \text{in } (0,1), \tag{5.16}$$

$$u^0(0) = u^0(1) = 0. \tag{5.17}$$

Beweis. Wie in (5.11) erhalten wir aus der Voraussetzung $a(x) \ge \alpha > 0$ eine Teilfolge ε_k die wir wieder mit ε bezeichnen und ein $u \in H_0^1(0,1)$, sodass

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{in } H_0^1(0,1) \quad \text{und} \quad \|u^\varepsilon\|_{H_0^1(0,1)} \le \frac{1}{\alpha}\|f\|_{H^{-1}(0,1)}. \tag{5.18}$$

Das bedeutet, dass $u^\varepsilon \rightharpoonup u$ und $u^{\varepsilon\prime} \rightharpoonup u'$ in $L^2(0,1)$. Definiere nun

$$\xi^\varepsilon := a^\varepsilon u^{\varepsilon\prime}.$$

Dann erfüllt ξ^ε die Gleichung

$$-\xi^{\varepsilon\prime} = f \quad \text{in } (0,1). \tag{5.19}$$

Aus (5.18) und der Voraussetzung $a(x) \leq \beta$ folgt nun

$$\|\xi^\varepsilon\|_{L^2(0,1)} \leq \beta/\alpha \, \|f\|_{L^2(0,1)} \,, \tag{5.20}$$

also die L^2-Beschränktheit der Folge ξ^ε, somit erhalten wir (bis auf eine Teilfolge) ein $\xi^0 \in L^2(0,1)$ mit

$$\xi^\varepsilon \rightharpoonup \xi^0 \quad \text{in } L^2(0,1).$$

Weiters gilt für ξ^0:

$$-\xi^{0\prime} = f \tag{5.21}$$

Aus (5.19) und (5.20) folgt, dass die Folge (ξ^ε) beschränkt in $H^1(0,1)$ ist. Aus dem Sobolev-Rellichschen Einbettungssatz folgt also, dass (ξ^ε) kompakt ist in $L^2(0,1)$. Es existiert also eine Teilfolge (wieder bezeichnet mit ξ^ε), sodass

$$\xi^\varepsilon \to \xi^0 \quad \text{in } L^2(0,1).$$

Jetzt können wir die Relation zwischen ξ^0 und u^0 angeben. Nach Definition gilt

$$u^{\varepsilon\prime} = \frac{1}{a^\varepsilon}\xi^\varepsilon. \tag{5.22}$$

Wir wenden nun Satz 5.8 auf die Folge $1/a^\varepsilon$ an und erhalten

$$1/a^\varepsilon \rightharpoonup \int_0^1 \frac{1}{a(x)} dx \quad \text{in } L^2(0,1).$$

Nach Voraussetzung ist $1/\beta \leq 1/a^\varepsilon \leq 1/\alpha$ auf $(0,1)$, somit insbesondere $1/a \in L^\infty(0,1)$, also gilt zusätzlich

$$\langle 1/a^\varepsilon, u\rangle \to \int_0^1 \frac{1}{a(x)} dx \int_0^1 u(x) dx$$

nicht nur für $u \in L^2(0,1)$ sondern auch für $u \in L^1(0,1)$. Proposition 5.7 angewandt auf (5.22) liefert nun

$$u^{\varepsilon\prime} \rightharpoonup \int_0^1 \frac{1}{a(x)} dx \cdot \xi^0 \quad \text{in } L^2(0,1).$$

Da $u^{\varepsilon\prime}$ aber schwach gegen $u^{0\prime}$ konvergiert, folgt

$$u^{0\prime} = \int_0^1 \frac{1}{a(x)} dx \cdot \xi^0.$$

Ausnutzen von (5.21) liefert schließlich die Behauptung des Satzes. □

Proposition 5.7. *Sei H ein Hilbertraum, $x_n \to x$ in H und $y_n \rightharpoonup y$ in H. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle = \langle x, y\rangle \,.$$

Beweis. Da schwach konvergente Folgen beschränkt sind (dies ist eine Konsequenz des uniform boundedness priciples) ist das eine einfache Folgerung aus der Gleichung

$$\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle = \langle x_n - x, y_n \rangle + \langle x, y_n - y \rangle$$

und der Definition von schwacher Konvergenz. □

Satz 5.8. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine $(0,1)$-periodische Funktion in $L^2(0,1)$. Definieren wir die Funktion*

$$f_\varepsilon(x) := f(x/\varepsilon),$$

so gilt

$$f_\varepsilon \rightharpoonup \int_0^1 f(y)dy \quad \text{in } L^2(0,1)$$

Beweis. Wir führen lediglich die Idee des Beweises durch. Es reicht, die schwache Konvergenz lediglich auf charakteristischen Funktionen zu testen (siehe Definition für schwache Konvergenz). Es reicht also zu zeigen, dass

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \langle f_\varepsilon, 1_I \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_I f_\varepsilon = |I| \int_0^1 f(y)dy$$

für alle Intervalle $I \subset (0,1)$. Nun gilt

$$\int_I f(x/\varepsilon)dx = \varepsilon \int_{I/\varepsilon} f(y)dy.$$

Die Menge I/ε kann nun dargestellt werden als Vereinigung eines Intervalls mit ganzzahligen Endpunkten und einer Menge mit Maß < 2. Wir schreiben also

$$I/\varepsilon = [k_\varepsilon, l_\varepsilon] \cup U$$

mit $|U| < 2$ und somit erhalten wir

$$\varepsilon \int_{I/\varepsilon} f(y)dy = \varepsilon \int_{k_\varepsilon}^{l_\varepsilon} f(y)dy + \varepsilon \int_U f(y)dy.$$

Da f $(0,1)$ periodisch ist wird das zu

$$\varepsilon \int_{I/\varepsilon} f(y)dy = \varepsilon(l_\varepsilon - k_\varepsilon) \int_0^1 f(y)dy + \varepsilon \int_U f(y)dy.$$

Nun konvergiert aber $\varepsilon(l_\varepsilon - k_\varepsilon)$ gegen $|I|$ und

$$\int_U |f(y)|dy \leq |U|^{1/2} \left(\int_U |f(y)|^2 \right)^{1/2} \leq 2 \, \|f\|_{L^2(0,1)} .$$

Zusammenfassen liefert also mit

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \int_{I/\varepsilon} f(y)dy = |I| \int_0^1 f(y)dy$$

die Behauptung des Satzes. □

A Anwendungen von Satz 3.25

A.1 Die Hilberttransformation

Wir definieren die Hauptwertdistribution $\operatorname{pv}\frac{1}{x} \in \mathcal{S}'$ durch

$$(\operatorname{pv}\frac{1}{x}, \varphi) := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x \quad \text{für } \varphi \in \mathcal{S}.$$

Tatsächlich ist $\operatorname{pv}\frac{1}{x} \in \mathcal{S}'$, denn

$$\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

und der Mittelwertsatz liefert die Behauptung $(\operatorname{pv}\frac{1}{x}, \varphi) \to 0$ für $\varphi \to 0$. Die Faltung einer Distribution mit einer Schwartzfunktion kann auch punktweise definiert werden und deshalb definieren wir nun die *Hilberttransformation*

$$(H\varphi)(x) := (\operatorname{pv}\frac{1}{x} * \varphi)(x) = (\operatorname{pv}\frac{1}{x}, \tau_x\widetilde{\varphi}),$$

wobei $(\tau_y f)(x) = f(x-y)$ und $\tilde{f}(x) = f(-x)$. Wir erhalten also

$$(H\varphi)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{\varphi(x-y)}{y}\,\mathrm{d}y = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-z|>\varepsilon} \frac{\varphi(z)}{x-z}\,\mathrm{d}z.$$

Dies ist der Prototyp eines singulären (Faltungs-)integralopertors. Um Satz 3.25 anwenden zu können, berechnen wir nun die Fouriertransformation von $\operatorname{pv}\frac{1}{x}$, denn

$$\widehat{\operatorname{pv}\frac{1}{x} * \varphi} = \widehat{\operatorname{pv}\frac{1}{x}}\widehat{\varphi},$$

der Operator H ist also ein Fouriermultiplikator. In Übung 22 von Kapitel 1.5 berechneten wir diese Fouriertransformation als die Signumfunktion. Hier wollen wir allerdings eine andere Methode vorstellen. Einerseits ist $x\operatorname{pv}\frac{1}{x} = 1$ in $\mathcal{S}'$, es folgt also mit der Fourierinversionsformel

$$(\widehat{x\operatorname{pv}\frac{1}{x}}, \varphi) = \int \widehat{\varphi} = (2\pi)^{1/2}\varphi(0). \tag{A.1}$$

Andererseits erhalten wir mit

$$\widehat{x\operatorname{pv}\frac{1}{x}} = i(\widehat{\operatorname{pv}\frac{1}{x}})',$$

dass

$$(\widehat{x\operatorname{pv}\frac{1}{x}}, \varphi) = -i(\widehat{\operatorname{pv}\frac{1}{x}}, \varphi'). \tag{A.2}$$

Mit der Signumfunktion gilt weiters

$$-i(\operatorname{sgn} x, \varphi') = 2i\varphi(0),$$

deshalb erhalten wir aus (A.1) und (A.2), dass $\widehat{\mathrm{pv}\,\frac{1}{x}} = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{sgn}$. Es folgt also, dass für $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\widehat{H\varphi} = \widehat{\mathrm{pv}\,\frac{1}{x}} * \varphi = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{sgn}\cdot\widehat{\varphi},$$

somit erhalten wir aus Plancherel

$$\|H\varphi\|_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\|\varphi\|_2\,,$$

also die L^2 Beschränktheit der Hilberttransformation. Die Signumfunktion als Fouriermultiplikator erfüllt zudem die Voraussetzungen von Satz 3.25, wir erhalten also auch die L^p Beschränktheit der Hilberttransformation für alle $1 < p < \infty$.

A.1.1 Eigenschaften/Anwendungen der Hilberttransformation

Sei $\mathbb{R}^2_+ = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t > 0\}$ die obere Halbebene. Der Realteil $P_t(x)$ von $\frac{i}{\pi z}$ $(z = x + it)$ heißt *Poissonkern* für $\mathbb{R}^2_+$ und der Imaginärteil $Q_t(x)$ heißt *konjugierter Poissonkern* für $\mathbb{R}^2_+$. Es gilt nämlich für $f \in L^p(\mathbb{R})$, dass $u(x,t) := (P_t * f)(x)$ harmonisch ist auf $\mathbb{R}^2_+$ und $\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = f(x)$ fast überall und mit $v(x,t) := (Q_t * f)(x)$ gilt

$$F(z) := u(x,t) + iv(x,t) = \frac{i}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{z-y}\,\mathrm{d}y$$

ist eine analytische Funktion auf $\mathbb{R}^2_+$. Man kann dann zeigen

Proposition A.1. *Sei $\varphi \in \mathcal{S}$. Dann gilt $Q_t * \varphi = P_t * (H\varphi)$. Die harmonische Erweiterung von $H\varphi$ ist also nichts anderes als die konjugiert harmonische Erweiterung von φ.*

Die Hilberttransformation kann auch dazu benutzt werden, um die L^p Konvergenz der Partialsummen von Fourierreihen zu zeigen. Das stetige Analogon dazu ist die Partialsumme

$$S_R f(x) := (2\pi)^{-1/2}\int_{|\xi|<R} \widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}\,\mathrm{d}\xi.$$

Satz A.2. *Für $1 < p < \infty$ gilt $\|S_R f - f\|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0$ für alle $f \in L^p(\mathbb{R})$.*

Beweis. Man kann elementar zeigen, dass $\|S_R\varphi - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0$ für alle $\varphi \in C_c^\infty$ gilt. Sei nun $f \in L^p(\mathbb{R})$. Wir wählen eine Funktion in $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ mit $\|f - \varphi\|_p < \varepsilon$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\limsup_{R\to\infty} \|S_R f - f\|_p &\leq \limsup_{R\to\infty}\Big[\|S_R f - S_R\varphi\|_p + \|S_R\varphi - \varphi\|_p + \|\varphi - f\|_p\Big]\\ &\leq \sup_R \|S_R\|_{L^p\to L^p}\,\varepsilon + 2\varepsilon\end{aligned}$$

für R hinreichend groß. Da $\|S_R\|_{L^p\to L^p} = \|S_1\|_{L^p\to L^p}$ für alle R, müssen wir nur noch zeigen, dass S_1 von L^p nach L^p beschränkt ist. Nun ist $\chi_{(-1,1)} = \chi_{(0,\infty)}(1-\xi)\chi_{(0,\infty)}(\xi - 1) = \frac{1+\mathrm{sgn}(1-\xi)}{2}\frac{1+\mathrm{sgn}(\xi-1)}{2}$, also $S_1 = H_1 H_2$ mit

$$\widehat{H_1\varphi}(\xi) = \frac{1+\mathrm{sgn}(1-\xi)}{2}\widehat{\varphi}(\xi) \quad \text{und} \quad \widehat{H_2\varphi}(\xi) = \frac{1+\mathrm{sgn}(\xi-1)}{2}\widehat{\varphi}(\xi).$$

Man kann berechnen, dass

$$H_1\varphi(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} e^{ix} H(e^{-i\cdot}\varphi)(x),$$

wobei H die Hilberttransformation ist. H_2 hat eine ähnliche Darstellung und $\|H_1\|_p \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|H\|_p$. Aus der L^p Beschränktheit von H folgt nun die L^p Beschränktheit von S_1 und somit die Behauptung des Satzes. □

Bemerkung A.3. Der obige Satz gilt nur für $n = 1$. Für $\mathbb{R}^n$ mit $n > 1$ gilt die L^p-Beschränktheit dieser „Kugel“partialsummen *nur* für $p = 2$ (in diesem Fall ist sie klar mit Plancherel). Anders ist die Situation für „Würfel“partialsummen

$$\widetilde{S_R} f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\max\{|\xi_1|,\ldots,|\xi_n|\} \leq 1} e^{ix\xi} f(\xi)\, \mathrm{d}\xi.$$

Das obige Argument kann für den mehrdimensionalen Fall verallgemeinert werden und man erhält die L^p-Beschränktheit von $\widetilde{S_R}$. •

A.2 Die Riesz-Transformation

Das mehrdimensionale Analogon zur Hilbertransformation ist die $j-$te *Riesztransformation*

$$R_j f = c_n \,\mathrm{pv}\, \frac{x_j}{|x|^{n+1}} * f \quad \text{für } 1 \leq j \leq n$$

mit einer geeigneten Konstanten c_n. Dieser Limes existiert für $f \in \mathcal{S}$, da aus $\int_{|y|>\varepsilon} \frac{y_j}{|y|^{d+1}}\, \mathrm{d}y = 0$ folgt

$$R_j f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} f(y) \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}}\, \mathrm{d}y = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} (f(y) - f(x)) \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}}\, \mathrm{d}y.$$

Hier kann man auf f wieder den Mittelwertsatz anwenden, und mit $|f(y) - f(x)|$ kürzt sich dann ein $|x - y|$. Der restliche Integrand ist dann absolut integrierbar. R_j hat einen ähnlichen Fouriermultiplikator wie H, es gilt

Proposition A.4. *Für $\varphi \in \mathcal{S}$ gilt*

$$\widehat{R_j\varphi}(\xi) = i \frac{\xi_j}{|\xi|} \widehat{\varphi}(\xi).$$

Nun folgt wieder aus Satz 3.25 die L^p-Beschränktheit von R_j für $1 < p < \infty$.

A.2.1 Eine Anwendung der Riesztransformation

Proposition A.5. *Es existiert eine Konstante C, sodass für alle $f \in \mathcal{S}$ und $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ die Ungleichung*

$$\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \right\|_p \leq C \|\Delta f\|_p$$

gilt.

Beweis. Es gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = -R_j R_k \Delta f.$$

Dies folgt leicht durch Fouriertransformation, denn

$$\widehat{\partial_j \partial_k f} = i\xi_j \widehat{\partial_k f} = -\xi_j \xi_k \widehat{f}$$

und da $\widehat{\Delta f} = -|\xi|^2 \widehat{f}$

$$\widehat{R_j R_k \Delta f} = \frac{i\xi_j}{|\xi|}\frac{i\xi_k}{|\xi|}\widehat{\Delta f} = \xi_j \xi_k \widehat{f},$$

also die Behauptung. □

B Hermite-Funktionen

B.1 Definitionen, einfache Eigenschaften

Definition B.1. *Die lineare Abbildung $A : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ ist definiert als*

$$(A\varphi)(x) := x\varphi(x) - \varphi'(x).$$

Bemerkung B.2. Wir schreiben in Zukunft $A = M - D$, wobei $(M\varphi)(x) = x\varphi(x)$ der Multiplikationsoperator und $D\varphi(x) = \varphi'(x)$ der Differentiationsoperator sind. •

Proposition B.3. *Bezüglich des von L^2 induzierten Skalarprodukts auf $\mathcal{S}$ ist der Operator*

$$(A^*\varphi)(x) := x\varphi(x) + \varphi'(x) = (M + D)\varphi(x)$$

die Adjungierte von A.

Beweis. Es gilt mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \langle A\varphi, \psi \rangle &= \int x\varphi(x)\overline{\psi(x)}\, \mathrm{d}x - \int \varphi'(x)\overline{\psi(x)}\, \mathrm{d}x \\ &= \int \varphi(x)\overline{x\psi(x)}\, \mathrm{d}x + \int \varphi(x)\overline{\psi'(x)}\, \mathrm{d}x = \langle \varphi, A^*\psi \rangle . \quad \square \end{aligned}$$

Proposition B.4. *Für den Kommutator $[A^*, A] := A^*A - AA^*$ gilt*

$$[A^*, A] = 2\,\mathrm{Id}\,.$$

Weiters gilt für $n \geq 1$

$$A^*A^n - A^nA^* = 2nA^{n-1} \quad \text{für alle } n \geq 1,$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} A^*A &= (M + D)(M - D) = M^2 - MD + DM - D^2, \\ AA^* &= (M - D)(M + D) = M^2 + MD - DM - D^2, \end{aligned}$$

also folgt mit $DM = \mathrm{Id} + MD$ (Produktregel)

$$A^*A - AA^* = 2\,\mathrm{Id}\,.$$

Wenden wir Induktion an, so erhalten wir

$$A^*A^{n+1} - A^{n+1}A^* = (A^*A^n - A^nA^*)A + A^n(A^*A - AA^*) = 2(n+1)A^n. \qquad \square$$

Definition B.5. *(**Hermite-Funktionen** Wir definieren die* Hermite-Funktionen h_n *durch*

$$h_0(x) := c_0 e^{-x^2/2} \quad (c_0 := \pi^{-1/4})$$

und weiter für $n \geq 1$

$$h_n := c_n A^n h_0$$

Bemerkung B.6. Wir setzen c_n später so, dass $\|h_n\|_2 = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. •

Proposition B.7. *Es gelten*

$$\begin{aligned} A^*h_0 &= 0 \\ Ah_n &= \frac{c_n}{c_{n+1}} h_{n+1} \quad \textit{für } n \geq 0 \\ A^*h_n &= \frac{2c_n n}{c_{n-1}} h_{n-1} \quad \textit{für } n \geq 1 \\ A^*Ah_n &= 2(n+1)h_n \quad \textit{für } n \geq 0 \\ AA^*h_n &= 2nh_n \quad \textit{für } n \geq 1 \end{aligned}$$

Beweis. $A^*h_0 = 0$ folgt sofort aus der Definition von A^* und von h_0. Weiters gilt

$$Ah_n = c_n A^{n+1} h_0 = \frac{c_n}{c_{n+1}} h_{n+1}$$

und nach Proposition B.4 und $A^*h_0 = 0$

$$A^*h_n = c_n A^*A^n h_0 = c_n(A^nA^* + 2nA^{n-1})h_0 = \frac{2nc_n}{c_{n-1}} h_{n-1}.$$

Daraus erhalten wir

$$A^*Ah_n = \frac{c_n}{c_{n+1}} A^*h_{n+1} = 2\frac{c_n}{c_{n+1}}\frac{c_{n+1}}{c_n}(n+1)h_n = 2(n+1)h_n$$

und

$$AA^*h_n = \frac{2c_n n}{c_{n-1}} Ah_{n-1} = 2nh_n. \qquad \square$$

B.2 Entwicklung in Hermite-Reihen

Satz B.8. *Mit $c_n = \pi^{-1/4} 2^{-n/2} (n!)^{-1/2}$ bilden die Hermite-Funktionen ein Orthonormalsystem.*

Beweis. Es gilt $\langle h_0, h_0\rangle = 1$. Aus Proposition B.7 folgt dann

$$\begin{aligned}\langle h_n, h_n\rangle &= \frac{1}{2n}\langle AA^*h_n, h_n\rangle = \frac{1}{2n}\langle A^*h_n, A^*h_n\rangle \\ &= \frac{1}{2n}\frac{4c_n^2n^2}{c_{n-1}^2}\langle h_{n-1}, h_{n-1}\rangle .\end{aligned}$$

Mit dem Anfangswert $c_0 = \pi^{-1/4}$ folgt aus der Bedingung $\langle h_n, h_n\rangle = 1$ die behauptete Darstellung. Wir bemerken noch $c_n/c_{n-1} = (2n)^{-1/2}$. Abschließend gilt noch für $n \neq m$

$$\begin{aligned}\langle h_n, h_m\rangle &= \frac{1}{2(n+1)}\langle A^*Ah_n, h_m\rangle = \frac{1}{2(n+1)}\langle h_n, A^*Ah_m\rangle , \\ &= \frac{2(m+1)}{2(n+1)}\langle h_n, h_m\rangle ,\end{aligned}$$

also $\langle h_n, h_m\rangle = 0$, was die Behauptung des Satzes beweist. □

Bemerkung B.9. Die Menge der Hermite-Funktionen bilden sogar eine Orthonormal*basis*, denn wir zeigen, dass aus $\varphi \in \mathcal{S}$ und $\langle \varphi, h_n\rangle = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ folgt, dass $\varphi = 0$:
Es gilt nach dem Satz von der dominierten Konvergenz

$$\sqrt{2\pi}\widehat{\varphi e^{-x^2/2}} = \int \varphi(x)e^{-x^2/2}e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-i\xi)^k}{k!}\int \varphi(x)x^k e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x.$$

Nun ist für alle $k \in \mathbb{N}_0$ das Integral $\int \varphi(x)x^k e^{-x^2/2}dx = 0$, da $x^k e^{-x^2/2}$ eine endliche Linearkombination der Hermite-Funktionen ist. Somit folgt $\widehat{\varphi e^{-x^2/2}} \equiv 0$ und aus der Fourier Inversionsformel $\varphi e^{-x^2/2} \equiv 0$, also $\varphi \equiv 0$. •

Für $f \in L^2$ gilt also

$$f = \sum_{n=0}^{\infty}\langle f, h_n\rangle h_n \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}).$$

Man kann sogar zeigen, dass für $\varphi \in \mathcal{S}$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\langle \varphi, h_n\rangle h_n$ in $\mathcal{S}$ gegen φ konvergiert, was bedeutet, dass

$$\lim_{n\to\infty}\varphi - \sum_{j=0}^{n}\langle \varphi, h_j\rangle h_j = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Dazu gilt folgender Satz

Satz B.10. *Ist $\varphi \in \mathcal{S}$, dann ist $\langle \varphi, h_n\rangle$ schnell fallend (das heißt für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $\lim_{n\to\infty} n^k\langle \varphi, h_n\rangle = 0$) und es gilt*

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\langle \varphi, h_n\rangle h_n(x),$$

wobei die Reihe und allen ihren Ableitungen absolut und gleichmäßig konvergiert. Ist umgekehrt c_n eine schnell fallende Folge, so ist $\varphi(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n h_n(x) \in \mathcal{S}$ und es gilt $c_n = \langle \varphi, h_n\rangle$.

Beweis. 1. **$\langle \varphi, h_n \rangle$ ist schnell fallend:**
Es gilt

$$\begin{aligned} [2(n+1)]^k \left|\langle \varphi, h_n \rangle\right| &= \left|\left\langle \varphi, (A^*A)^k h_n \right\rangle\right| = \left|\left\langle (A^*A)^k \varphi, h_n \right\rangle\right| \\ &\leq \left\|(A^*A)^k \varphi\right\|_2 < \infty \end{aligned}$$

Es ist also $n^k \langle \varphi, h_n \rangle$ für jedes k beschränkt und die Behauptung von 1. folgt.

2. **Für eine schnell fallende Folge c_n konvergiert die Reihe $\psi = \sum_{n=0}^{\infty} c_n h_n$ zusammen mit ihren Ableitungen absolut und gleichmäßig gegen eine Funktion in $\mathcal{S}$:**
Wir benötigen zuerst eine (gleichmäßige) Abschätzung für $h_n(x)$. Dazu bemerke, dass

$$|h_n(x)|^2 = \int_{-\infty}^{x} (h_n^2)'(t)\ \mathrm{d}t \leq 2 \int_{\mathbb{R}} |h_n(t)||h_n'(t)|\ \mathrm{d}t \leq 2\,\|h_n\|_2\,\|h_n'\|_2 = 2\,\|h_n'\|_2$$

Damit gilt

$$|h_n(x)|^2 \leq 2\,\|h_n'\|_2 = \|(A^* - A)h_n\|_2 = \sqrt{2}\left\|\sqrt{n}h_{n-1} - \sqrt{n+1}h_{n+1}\right\|_2.$$

Wir erhalten also eine Konstante K mit $|h_n(x)| \leq K n^{1/4}$. Da die Koeffizienten c_n schnell fallen, konvergiert die Reihe absolut und gleichmäßig. Da sich nun die Ableitungen der einzelnen Hermite-Funktionen wieder als endliche Linearkombinationen von Hermitefunktionen darstellen lassen (dadurch erhöht sich zwar der Exponent bei n in der Abschätzung von h_n^l in Abhängigkeit von l, dies ist aber ohne Belang, da c_n schnell fällt) erhalten wir die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} c_n h_n^{(l)}(x)$ und die Gleichheit

$$\psi^{(l)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n h_n^{(l)}(x) \quad \text{für alle } l \in \mathbb{N}.$$

Analog sieht man nun, dass $x^k \psi^{(l)}$ gleichmäßig in x beschränkt ist für alle k, l und somit ist $\psi \in \mathcal{S}$.

3. **Für dieses ψ gilt $c_n = \langle \psi, h_n \rangle$**
Der Satz von Fubini liefert

$$\langle \psi, h_n \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} c_k h_k, h_n \right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \langle h_k, h_n \rangle = c_n,$$

da die Hermitefunktionen ein ONS sind.

4. **Für $\varphi \in \mathcal{S}$ ist $\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi, h_n \rangle h_n$:**
Sei $\psi := \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi, h_n \rangle h_n$. Dann folgt aus obigen Betrachtungen, dass $\psi \in \mathcal{S}$ und $\langle \psi, h_n \rangle = \langle \varphi, h_n \rangle$. Aus der Vollständigkeit der Hermite-Funktionen folgt nun die Behauptung. □

Bemerkung B.11. In der Tat folgt daraus die Konvergenz von $\sum_{j=0}^{\infty} \langle \varphi, h_j \rangle h_j$ gegen φ in $\mathcal{S}$, denn die Folge $A_n := \sum_{j=0}^{n} \langle \varphi, h_j \rangle h_j$ ist Cauchy in $\mathcal{S}$ (dazu beachte, dass die Funktionen $x^k h_j^{(l)}$ für $k, l \in \mathbb{N}$ endliche Linearkombinationen der h_n sind und $\langle \varphi, h_j \rangle$ eine schnell fallende Folge ist). Nun folgt aus der Vollständigkeit von $\mathcal{S}$ und aus der gleichmäßigen Konvergenz von $\sum_{j=0}^{\infty} \langle \varphi, h_j \rangle h_j$ gegen φ die Behauptung. •

B.3 Hermite-Funktionen als Eigenfunktionen der Fouriertransformation

Satz B.12. *Die Hermite-Funktionen sind Eigenfunktionen der Fouriertransformation und es gilt*

$$\widehat{h_n} = (-i)^n h_n$$

Beweis. Es ist $\widehat{h_0} = h_0$ (Beispiel 1.21). Weiters gilt

$$\mathcal{F}A = -iA\mathcal{F}.$$

Um das zu beweisen, erinnern wir an die Formeln

$$(\widehat{x\varphi})(\xi) = i\widehat{\varphi}'(\xi), \quad (\widehat{\varphi'})(\xi) = i\xi\widehat{\varphi}(\xi).$$

Nun erhalten wir

$$(\mathcal{F}A\varphi)(\xi) = \widehat{x\varphi}(\xi) - \widehat{\varphi'}(\xi) = i\widehat{\varphi}'(\xi) - i\xi\widehat{\varphi}(\xi) = (-iA\mathcal{F}\varphi)(\xi).$$

Mit dieser Operatoridentität erhalten wir mit Induktion

$$\mathcal{F}h_{n+1} = \frac{c_{n+1}}{c_n}\mathcal{F}Ah_n = -i\frac{c_{n+1}}{c_n}A\mathcal{F}h_n = (-i)^{n+1}\frac{c_{n+1}}{c_n}Ah_n = (-i)^{n+1}h_{n+1},$$

also die Behauptung des Satzes. □

Bemerkung B.13. Aus diesem Satz folgt mit der Stetigkeit der Fouriertransformation, dass die Fouriertransformation bezüglich der Basis $\{h_n\}$ Diagonalgestalt hat. Wir erhalten also für

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi, h_n \rangle \, h_n,$$

dass

$$\widehat{\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi, h_n \rangle \, (-i)^n h_n,$$

•

Bemerkung B.14. Die temperierten Distributionen sind die stetigen linearen Funktionale auf $\mathcal{S}$ und werden (als Dualraum) mit $\mathcal{S}'$ bezeichnet. Dual zu Satz B.10 gilt auch die folgende Aussage:
Jedes $T \in \mathcal{S}'$ hat eine Reihendarstellung $F = \sum_{k=0}^{\infty} a_k h_k$, wobei a_k schwach wächst (d.h. $a_k/k^N \to 0$ für ein $N \in \mathbb{N}$). Diese Darstellung ist eindeutig. Ist umgekehrt (a_k) eine schwach wachsende Folge komplexer Zahlen, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k h_k$ in $\mathcal{S}'$ und definiert eine temperierte Distribution. •

B.4 Hermite-Polynome und Rekursionen

Seien die Hermite-Funktionen h_n wie oben definiert, allerdings nun nicht normiert mit $c_n = 1$ für alle n (es ist dann etwa $h_0(x) = e^{-x^2/2}$ oder $h_1(x) = 2xe^{-x^2/2}$. Dann definieren wir das *n-te Hermite-Polynom* H_n als

$$H_n(x) := e^{x^2/2} h_n(x).$$

Lemma B.15. *Die Hermite Polynome erfüllen die Rekursion*

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x) \quad \text{mit dem Anfangswert } H_0(x) \equiv 1.$$

Beweis. Dass $H_0(x) \equiv 1$, ist klar. Es gilt

$$\begin{aligned} H_{n+1} &= h_0^{-1}h_{n+1} = h_0^{-1}Ah_n = h_0^{-1}(xh_n - h_n') \\ &= h_0^{-1}(xh_0H_n - (H_n'h_0 + H_nh_0')) \\ &= 2xH_n - H_n' \end{aligned}$$

und somit die Behauptung. □

Proposition B.16. *Sei μ das Maß* $\mathrm{d}\mu(y) = (4\pi)^{-1/2}e^{-y^2/4}\,\mathrm{d}y$ *(also die Normalverteilung mit Erwartungswert* 0 *und Varianz* 2*). Dann gilt für die Hermite Polynome H_m die Gleichung*

$$H_n(x) = \int_{\mathbb{R}} (2x + iy)^n \,\mathrm{d}\mu(y).$$

Beweis. Wir benutzen Lemma B.15 und zeigen, dass die rechte Seite dieselbe Rekursion erfüllt wie die Hermite Polynome H_n. Da das Maß μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, erhalten wir für die rechte Seite den gleichen Anfangswert wie für die Hermite Polynome. Bezeichne $B_n(x) := \int_{\mathbb{R}}(2x+iy)^n d\mu(y)$. Mit Induktion und partieller Integration folgt weiter

$$\begin{aligned} B_{n+1}(x) = \int_{\mathbb{R}} (2x+iy)^{n+1}\,\mathrm{d}\mu(y) &= 2x\int_{\mathbb{R}}(2x+iy)^n\,\mathrm{d}\mu(y) + i\int_{\mathbb{R}} y(2x+iy)^n\,\mathrm{d}\mu(y) \\ &= 2xB_n(x) + i\int_{\mathbb{R}}(2x+iy)^n y(4\pi)^{-1/2}e^{-y^2/4}\,\mathrm{d}y \\ &= 2xB_n(x) - 2n\int_{\mathbb{R}}(2x+iy)^{n-1}(4\pi)^{-1/2}e^{-y^2/4}\,\mathrm{d}y \\ &= 2xB_n(x) - 2n\int_{\mathbb{R}}(2x+iy)^{n-1}\,\mathrm{d}\mu(y) \\ &= 2xB_n(x) - B_n'(x) \end{aligned}$$

Somit folgt die Behauptung. □

Wir bemerken, dass die ersten paar Hermite Polynome die Werte $(1, 2x, 4x^2 - 2, 8x^3 - 12x, \ldots)$ besitzen.

C Die Babenko-Beckner Ungleichung

C.1 Formulierung der Ungleichung

Wir führen jetzt eine Änderung in der Notation ein und definieren nun die Fouriertransformation als

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi ix\xi}\,\mathrm{d}x. \tag{C.1}$$

Die Notation der Hermite Polynome im letzten Kapitel ist die physikalische. Die probabilistische Notation erfüllt

$$H_n(x) = \int (x+iy)^n d\mu(y)$$

mit dem Standard Gauß Maß $d\mu(y) = (2\pi)^{-1/2}e^{-y^2/2}dy$ und die ersten Polynome sind $(1, x, x^2-1, x^3-3x, \ldots)$. Beachte, dass diese Polynome tatsächlich keine Vielfachen der oben erhaltenen sind. Weiters sind die Funktionen $\psi_n(x) := H_n(2\sqrt{\pi}x)e^{-\pi x^2}$ Eigenfunktionen zur Fouriertransformation definiert wie in (C.1) mit Eigenwert $(-i)^n$. Zusätzlich gilt

$$\exp(-t^2/2 + xt) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_m(x).$$

Die Funktion $\exp(-t^2/2 + xt)$ ist also die exponentielle erzeugende Funktion der Hermite Polynome H_n.
Die Fouriertransformation ist beschränkt von L^1 nach L^∞ mit Norm 1 und beschränkt von L^2 nach L^2 auch mit Norm 1 (Plancherel). Nach dem Interpolationssatz von Riesz Thorin ist die Fouriertransformation beschränkt von L^p nach L^q für $1 < p < 2$ und dem dualen Exponenten $q = \frac{p}{p-1}$ mit Norm ≤ 1. Diese Konstante ist allerdings nicht optimal, wie die Ungleichung von Babenko-Beckner beweist.

Satz C.1 (Babenko-Beckner). *Für die Fouriertransformation (definiert wie in (C.1)) und $1 < p \leq 2$ gilt*

$$\|\mathcal{F}f\|_q \leq A_p \|f\|_p, \quad \textit{mit } A_p = \left(\frac{p^{1/p}}{q^{1/q}}\right)^{1/2} \tag{C.2}$$

Bemerkung C.2. (i) Im d dimensionalen Fall (Fouriertransformation auf $\mathbb{R}^d$) nimmt die Normungleichung die Form

$$\|\mathcal{F}f\|_q \leq (A_p)^d \|f\|_p$$

an. Dies folgt durch d malige Anwendung von Satz C.1 und Lemma C.8.
(ii) Sei $f(x) = e^{-\pi x^2}$. Dann gilt $\widehat{f} = f$ und $\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi p x^2}\, dx = p^{-1/2}$. Der Wert A_p in der Ungleichung (C.2) wird also für f angenommen; die Konstante ist optimal. •

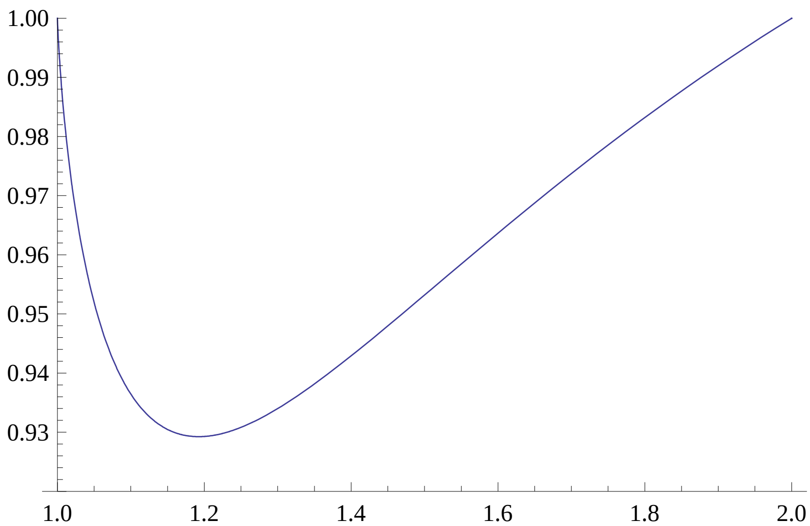

Abbildung 6: Wert von A_p in Abhängigkeit von p

Für $\omega = i\sqrt{p-1}, 1 < p < 2$ betrachten wir nun den Hermite-Multiplikator

$$T_\omega : H_m \to \omega^m H_m.$$

Dieser kann als Integraloperator auf $L^2(d\mu)$ dargestellt werden mit dem Kern

$$k(x,y) := (1-\omega^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\omega^2(x^2+y^2)}{2(1-\omega^2)} + \frac{\omega xy}{1-\omega^2}\right).$$

Es ist also

$$(T_\omega g)(x) = \int k(x,y) g(y) \, \mathrm{d}\mu(y).$$

Setzen wir speziell für $\omega = i\sqrt{p-1}$, so erhalten wir

$$k(x,y) = p^{-1/2} \exp\left[\frac{1}{2q}\left(x^2+y^2+\frac{2ixy}{\sqrt{p-1}}\right)\right]$$

Dabei ist μ wieder das Standard Gauß Maß. Man kann weiters zeigen, dass Satz C.1 äquivalent mit folgender Aussage ist

Satz C.3. *Für $\omega = i\sqrt{p-1}$ und $1 < p < 2$ gilt*

$$\|T_\omega g\|_{L^q(d\mu)} \le \|g\|_{L^p(d\mu)} \tag{C.3}$$

für $g \in L^p(d\mu)$.

Beweis der Äquivalenz von Satz C.1 und Satz C.3. Sei $g(x)$ ein Polynom. Es reicht die Aussage für Funktionen der Art $f(x) = g(\sqrt{2\pi p}x)\exp(-\pi x^2)$ zu zeigen. Setzen wir g in (C.3) ein, so ergibt sich für die rechte Seite dieser Ungleichung mit der Substitution $x = \sqrt{2\pi p}u$

$$\begin{aligned}
\|g\|_{L^p(d\mu)} &= \left(\int |g(x)|^p (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2} \, \mathrm{d}x\right)^{1/p} \\
&= p^{1/2p}\left(\int |g(\sqrt{2\pi p}u)|^p e^{-p\pi u^2} \, \mathrm{d}u\right)^{1/p} = p^{1/2p} \|f\|_p
\end{aligned}$$

Die linke Seite wird zu

$$\begin{aligned}
\|T_\omega g\|_{L^q(d\mu)} &= \left[\int \left|\int k(x,y) g(y) \, \mathrm{d}\mu(y)\right|^q \, \mathrm{d}\mu(x)\right]^{1/q} \\
&= \left[\int \left|(2\pi p)^{-1/2} \exp\left(\frac{x^2}{2q}\right) \int g(y) \exp\left(-\frac{y^2}{2} + \frac{y^2}{2q} + \frac{ixy}{q\sqrt{p-1}}\right) \, \mathrm{d}y\right|^q \, \mathrm{d}\mu(x)\right]^{1/q} \\
&= (2\pi)^{-1/2q}(2\pi p)^{-1/2} \left[\int \left|\int g(y) \exp\left(-\frac{y^2}{2p} + \frac{ixy}{q\sqrt{p-1}}\right) \, \mathrm{d}y\right|^q \, \mathrm{d}x\right]^{1/q}.
\end{aligned}$$

Mit den Substitutionen $x = \sqrt{2\pi q}u$ und $y = \sqrt{2\pi p}v$ ergibt sich nun

$$\begin{aligned}
\|T_\omega g\|_{L^q(d\mu)} &= q^{1/2q}\left[\int \left|\int g(\sqrt{2\pi p}v) \exp\left(-\pi v^2 + 2\pi i u v\right) \, \mathrm{d}v\right|^q \, \mathrm{d}u\right]^{1/q} \\
&= q^{1/2q} \|\mathcal{F} f\|_q,
\end{aligned}$$

also nach Vergleich die Äquivalenz von Satz C.1 und Satz C.3. □

C.2 Der zentrale Grenzwertsatz

Satz C.4. *Sei ν ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ mit Erwartungswert 0 und Varianz 1, das heißt*

$$\int t \,\mathrm{d}\nu(t) = 0, \qquad \int t^2 \,\mathrm{d}\nu(t) = 1.$$

Definiere das Maß ν_n als

$$\nu_n(E) := (\nu * \cdots * \nu)(\sqrt{n}E),$$

wobei n mal gefaltet wurde. (Die n fache Faltung von ν ist das Bildmaß des n fachen Produktmaßes $\nu \otimes \cdots \otimes \nu$ unter der Abbildung $T(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n$ und ist daher gegeben durch

$$\nu * \cdots * \nu(A) = \int \cdots \int 1_A(x_1 + \cdots + x_n) \,\mathrm{d}\nu(x_1) \cdots \,\mathrm{d}\nu(x_n)).$$

Dann gilt für alle $f \in C_0(\mathbb{R})$

$$\int f(x) \,\mathrm{d}\nu_n(x) \to (2\pi)^{-1/2} \int f(x) e^{-x^2/2} \,\mathrm{d}x \quad \text{für } n \to \infty. \tag{C.4}$$

Das Maß ν_n konvergiert also schwach gegen die Standardnormalverteilung.*

Bemerkung C.5. Wir bemerken, dass $\nu_n(E) = \nu * \cdots * \nu(\sqrt{n}E) = T\nu * \cdots * T\nu(E)$ mit $Tx = x/\sqrt{n}$. Weiters gilt für zwei unabhängige Zufallsvariablen X, Y, dass

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{X+Y}(E) &= \int_\Omega 1_E(X(\omega) + Y(\omega)) \,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} 1_E(x+y) \,\mathrm{d}\mathbb{P}_{(X,Y)}(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} 1_E(x+y) \,\mathrm{d}\mathbb{P}_X(x) \,\mathrm{d}\mathbb{P}_Y(y),
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Unabhängigkeit von X und Y ausnutzten. Es gilt also

$$\mathbb{P}_{X+Y}(E) = (\mathbb{P}_X * \mathbb{P}_Y)(E).$$

und somit wird $(C.4)$ (formal mit $f = 1_{(-\infty,x]}$; dies kann gerechtfertigt werden)

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \le x \right) \to (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} \,\mathrm{d}t,$$

wobei $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige ZV mit Verteilung ν sind. •

Beweis des zentralen Grenzwertsatzes. Es reicht zu zeigen, dass $\widehat{\nu_n} \to \widehat{\mu}$ punktweise, wobei μ die Standardnormalverteilung bezeichnet. Der Einfachheit halber verwenden wir hier (nur in diesem Beweis) wieder die alte Notation der Fouriertransformation und somit ist für ein Maß λ die Fouriertransformation gegeben durch

$$\widehat{\lambda}(\xi) := (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \,\mathrm{d}\lambda(x).$$

Damit gilt $\widehat{\mu}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} e^{-\xi^2/2}$. Weiters gilt

$$\widehat{\nu_n}(\xi) = (2\pi)^{(n-1)/2} \widehat{T\nu}(\xi)^n = (2\pi)^{(n-1)/2} \widehat{\nu}(\xi/\sqrt{n})^n$$

und

$$\widehat{\nu}(0) = (2\pi)^{-1/2}, \quad \widehat{\nu}'(0) = 0, \quad \widehat{\nu}''(0) = -(2\pi)^{-1/2}.$$

Daher folgt nach dem Satz von Taylor

$$\begin{aligned}
\widehat{\nu_n}(\xi) &= (2\pi)^{(n-1)/2} \left(\widehat{\nu}(0) + \widehat{\nu}'(0) \frac{\xi}{\sqrt{n}} + \widehat{\nu}''(0) \frac{\xi^2}{2n} + o(\xi^2/n) \right)^n \\
&= (2\pi)^{(n-1)/2} \left((2\pi)^{-1/2} - (2\pi)^{-1/2} \frac{\xi^2}{2n} + o(\xi^2/n) \right)^n \\
&= (2\pi)^{-1/2} \left(1 - \frac{\xi^2}{2n} + o(\xi^2/n) \right)^n .
\end{aligned}$$

Wenn wir logarithmieren erhalten wir

$$\log \widehat{\nu_n}(\xi) = \log(2\pi)^{-1/2} + n \log \left(1 - \frac{\xi^2}{2n} + o(\xi^2/n) \right).$$

Da $\log(1+z) = z + o(z)$ ist also

$$\log \widehat{\nu_n}(\xi) = \log(2\pi)^{-1/2} - \frac{\xi^2}{2} + n \cdot o(\xi^2/n) \to \log(2\pi)^{-1/2} - \frac{\xi^2}{2} \quad \text{für } n \to \infty,$$

was die Behauptung $\widehat{\nu_n} \to \widehat{\mu}$ punktweise zeigt und daraus folgt nun die schwach* Konvergenz von ν_n gegen μ. □

C.3 Beweis der Babenko-Beckner Ungleichung

Wir beginnen unsere Betrachtungen mit dem Maß $\nu = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$ und bemerken, dass dieses Maß die Bedingungen des zentralen Grenzwertsatzes erfüllt und es gilt

$$\int f(x) \, \mathrm{d}\nu_n(x) = \int f(x_1 + \cdots + x_n) \, \mathrm{d}T\nu(x_1) \cdots \, \mathrm{d}T\nu(x_n) \to \int f(x) \, \mathrm{d}\mu(x).$$

Außerdem konvergieren auch die Momente von ν_n gegen die Momente von μ ([Gut05], Theorem 7.5.1). Die Maße $T\nu$ sind diskrete Maße mit $\operatorname{supp} T\nu = \{-1/\sqrt{n}, 1/\sqrt{n}\}$. Alle Funktionen über dem Produktmaß $T\nu \otimes \cdots \otimes T\nu$ sind also Polynome vom Grad höchstens 1 in jeder der n Variablen $x_1, \ldots, x_n$. Wir definieren nun ein Analogon C des Multiplikators T_ω (als Aktion auf den ersten beiden Hermite-Polynomen $H_0(x) = 1, H_1(x) = x$) auf dem Maßraum über ν und setzen

$$C(a + bx) := a + \omega b x. \tag{C.5}$$

Wir bemerken die Analogie zu T_ω, eingeschränkt auf den Teilraum, den die beiden ersten Hermite Polynome aufspannen:

$$T_\omega : aH_0 + bH_1 \to aH_0 + \omega b H_1.$$

Dann gilt

Lemma C.6 (Two-Point Lemma). *C ist ein beschränkter linearer Operator von $L^p(\nu)$ nach $L^q(\nu)$ mit Norm 1 wobei $\omega = i\sqrt{p-1}$, $1 < p < 2$ und $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Das heißt also, für alle $a, b \in \mathbb{C}$ gilt die Ungleichung*

$$\left[\frac{|a + \omega b|^q + |a - \omega b|^q}{2} \right]^{1/q} \leq \left[\frac{|a + b|^p + |a - b|^p}{2} \right]^{1/p}$$

Beweis. Es reicht, diese Ungleichung für $a = 1$ und einer beliebigen komplexen Zahl $b = \xi + i\eta$ zu zeigen. Das ist äquivalent zur Ungleichung $G(\xi, \eta) \leq 1$ für

$$G(\xi,\eta) = \frac{\left[\frac{\left[(1+\eta)^2+(p-1)\xi^2\right]^{q/2}+\left[(1-\eta)^2+(p-1)\xi^2\right]^{q/2}}{2}\right]^{1/q}}{\left[\frac{[(1+\xi)^2+(q-1)\eta^2]^{p/2}+[(1-\xi)^2+(q-1)\eta^2]^{p/2}}{2}\right]^{1/p}}.$$

Wir bemerken dass $q - 1 = 1/(p - 1)$ und erhalten mit der Minkowski Ungleichung

$$\begin{aligned}\left[\frac{[(1+\eta)^2+(p-1)\xi^2]^{q/2}+[(1-\eta)^2+(p-1)\xi^2]^{q/2}}{2}\right]^{2/q}&\\ \leq \left[\frac{|1+\eta|^q+|1-\eta|^q}{2}\right]^{2/q}&+(p-1)\xi^2\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\left[\frac{[(1+\xi)^2+(q-1)\eta^2]^{p/2}+[(1-\xi)^2+(q-1)\eta^2]^{p/2}}{2}\right]^{2/p}&\\ \geq \left[\frac{|1+\xi|^p+|1-\xi|^p}{2}\right]^{2/p}&+(q-1)\eta^2.\end{aligned}$$

Dabei ist die letzte Ungleichung umgedreht, da $p/2 \leq 1$. Es folgt also

$$G(\xi,\eta) \leq \left[\frac{\left[\frac{|1+\eta|^q+|1-\eta|^q}{2}\right]^{2/q}+(p-1)\xi^2}{\left[\frac{|1+\xi|^p+|1-\xi|^p}{2}\right]^{2/p}+(q-1)\eta^2}\right]^{1/2}$$

Aus den beiden Ungleichungen (wir beweisen sie in Kürze)

$$\left[\frac{|1+\eta|^q+|1-\eta|^q}{2}\right]^{1/q} \leq \left[1+(q-1)\eta^2\right]^{1/2}, \tag{C.6}$$

$$\left[1+(p-1)\xi^2\right]^{1/2} \leq \left[\frac{|1+\xi|^p+|1-\xi|^p}{2}\right]^{1/p} \tag{C.7}$$

folgt nun $G(\xi, \eta) \leq 1$. Die obigen Ungleichungen folgen nun aus einem Minimierungsargument und wir betrachten die Ungleichung

$$\left[\frac{|1+y|^m+|1-y|^m}{2}\right]^{1/m} \leq \sqrt{1+(m-1)y^2}$$

für $0 \leq y < 1$ und $m > 2$. Beachte, dass aus dieser Ungleichung für $y < 1$ auch dieselbe für $y > 1$ folgt durch Division mit y. Wir fixieren $m > 2$ und betrachten die Funktion

$$\varphi(y) := \frac{1}{2}\log\left[1+(m-1)y^2\right] - \frac{1}{m}\log\left[\frac{(1+y)^m+(1-y)^m}{2}\right]$$

auf dem Intervall $[0,1)$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\varphi'(y) &= \frac{u(y)}{v(y)} \quad \text{mit} \\
u(y) &= (1+y)^{m-1}(my-y-1)+(1-y)^{m-1}(my-y+1), \\
v(y) &= (1+(m-1)y^2)((1+y)^m+(1-y)^m), \\
u'(y) &= (m-1)my\left[(1+y)^{m-2}-(1-y)^{m-2}\right]
\end{aligned}$$

Da nun $v(y) \geq 0, \varphi(0) = u(0) = 0$ und $u'(y) \geq 0$ folgt $u(y) \geq 0$ und somit $\varphi'(y) \geq 0$ und $\varphi(y) \geq 0$. Für $1 < m < 2$ dreht sich die Ungleichung für u' um und somit auch alle anderen und es folgt in diesem Fall $\varphi(y) \leq 0$. Dies beweist die beiden Ungleichungen (C.6) und (C.7) und somit das Lemma. □

Wir bezeichnen nun mit X_n den Raum der symmetrischen Funktionen f über dem Produktmaß $T\nu \otimes \cdots \otimes T\nu$ (mit $f(0) = 0$). Dabei ist eine Funktion symmetrisch, wenn sich der Funktionswert bei Vertauschung beliebiger Argumente nicht ändert. Die Symmetrisierungen

$$\sigma_l(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{1\leq m_1<\cdots<m_l\leq n} x_{m_1}\cdots x_{m_l}$$

bilden eine orthogonale Basis in $L^2(X_n)$; wir normieren um und definieren

$$\varphi_{n,l}(x_1,\ldots,x_n) = l!\sigma_l(x_1,\ldots,x_n).$$

Die erzeugende Funktion dieser symmetrischen Funktionen ist gegeben durch

$$S(x_1,\ldots x_n;t) = \prod_{k=1}^n (1+x_k t) = \sum_{l=0}^n t^l \sigma_l(x_1,\ldots x_n) = \sum_{l=0}^n \frac{t^l}{l!}\varphi_{n,l}(x_1,\ldots,x_n).$$

Die erzeugende Funktion der Hermite-Polynome ist

$$T(x;t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}+tx\right) = \sum_{m=0}^\infty \frac{t^m}{m!}H_m(x).$$

Für $x = \sum_{j=1}^n x_j$ und $x_j^2 = 1/n$ gelten zwischen diesen beiden erzeugenden Funktionen die Relationen

$$\begin{aligned}
T(x_1+\cdots+x_n;t) &= e^{-t^2/2}(\cosh(t/\sqrt{n}))^n S(x_1,\ldots,x_n;\sqrt{n}\tanh(t/\sqrt{n})), \\
S(x_1,\ldots,x_n;t) &= \exp\left(\frac{n}{2}\operatorname{artanh}(t/\sqrt{n})\right)\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^{n/2} \times \\
&\qquad T(x_1+\cdots+x_n;\sqrt{n}\operatorname{artanh}(t/\sqrt{n}).
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt nun

Lemma C.7. *Für $x_j^2 = 1/n$ gilt*

$$\varphi_{n,l}(x_1,\ldots,x_n) = H_l(x_1+\cdots+x_n) + \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{\lfloor l/2\rfloor} a_{l,r}H_{l-2r}(x_1+\cdots+x_n),$$

wobei die Koeffizienten $a_{l,r}$ für fixes l beschränkt in n sind.

Beweis. Unter Benutzung der Definitionen von H_m und $\varphi_{n,l}$ erhalten wir die Anfangswerte

$$\varphi_{n,0} = H_0(x_1 + \cdots + x_n), \tag{C.8}$$
$$\varphi_{n,1} = H_1(x_1 + \cdots + x_n), \tag{C.9}$$
$$\varphi_{n,2} = H_2(x_1 + \cdots + x_n), \tag{C.10}$$
$$\varphi_{n,3} = H_3(x_1 + \cdots + x_n) + \frac{2}{n} H_1(x_1 + \cdots + x_n). \tag{C.11}$$

Den allgemeinen Fall beweisen wir nun mit einem Rekursionsargument. Mit einer analogen Rechnung wie in Proposition B.16 (beachte aber die unterschiedliche Definition der Hermite-Polynome; der Faktor zwei vor dem x ist jetzt nicht vorhanden) erhalten wir

$$H_l(x) = xH_{l-1}(x) - (l-1)H_{l-2}(x) = H_1(x)H_{l-1}(x) - (l-1)H_{l-2}(x). \tag{C.12}$$

Für die Funktionen $\varphi_{n,l}$ erhalten wir die Rekursion

$$\varphi_{n,l} = \varphi_{n,1}\varphi_{n,l-1} - \frac{l-1}{n}(n-l+2)\varphi_{n,l-2}. \tag{C.13}$$

Für die elementaren symmetrischen Funktionen σ_l nimmt diese Rekursion die Form

$$l\sigma_l = \sigma_1\sigma_{l-1} - \frac{n-l+2}{n}\sigma_{l-2}. \tag{C.14}$$

Wir beweisen nun (C.14) und betrachten dafür die erzeugende Funktion S der symmetrischen Funktionen σ_l. Wir erhalten (hier und im folgenden bezeichnet $\hat{x_k}$, dass ebendieses Argument ausgelassen wird)

$$\begin{aligned}
S(x_1, \ldots, x_n; t) &= \prod_{k=1}^{n}(1 + x_k t) = \sum_{l=0}^{n} t^l \sigma_l(x_1, \ldots, x_n), \\
\frac{\partial}{\partial t} S(x_1, \ldots, x_n; t) &= \sum_{k=1}^{n} x_k S(x_1, \ldots, \hat{x_k}, \ldots, x_n; t) \\
&= \sum_{l=0}^{n} t^{l-1} l \sigma_l(x_1, \ldots, x_n), \\
\sigma_1(x_1, \ldots, x_n) S(x_1, \ldots, x_n; t) &= \sum_{k=1}^{n} x_k(1 + x_k t) S(x_1, \ldots, \hat{x_k}, \ldots, x_n; t),
\end{aligned}$$

Daraus folgt mit $x_k^2 = 1/n$ die Gleichheit

$$\sigma_1(x_1, \ldots, x_n) S(x_1, \ldots, x_n; t) - \frac{\partial}{\partial t} S(x_1, \ldots, x_n; t) \tag{C.15}$$
$$= \frac{t}{n} \sum_{k=1}^{n} S(x_1, \ldots, \hat{x_k}, \ldots, x_n; t). \tag{C.16}$$

Weiters erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{n} \sigma_l(x_1, \ldots, \hat{x_k}, \ldots, x_n) = (n-l)\sigma_l(x_1, \ldots, x_n). \tag{C.17}$$

Diese Gleichung gilt, da aufgrund der Symmetrie beider Seiten die linke Seite ein Vielfaches der rechten Seite sein muss und die Konstante erhält man, wenn man bemerkt, dass $\sigma_l(x_1,\dots,x_n)$ für $n \geq l$ aus $\binom{n}{l}$ Summanden besteht und alle x_k auf 1 setzt. Also folgt aus (C.16) und (C.17), dass

$$\begin{aligned}\sigma_1(x_1,\dots,x_n)S(x_1,\dots,x_n;t) &- \frac{\partial}{\partial t}S(x_1,\dots,x_n;t) && \text{(C.18)}\\ &= \frac{t}{n}\sum_{l=0}^{n-1}(n-l)\sigma_l(x_1,\dots,x_n)t^l. && \text{(C.19)}\end{aligned}$$

Die Rekursion in (C.14) folgt nun durch Koeffizientenvergleich dieser Gleichung . Nun zeigen wir die Behauptung. Der Induktionsanfang ergibt sich aus den Gleichungen (C.8)-(C.11). Aus den Rekursionen (C.12) und (C.13) folgt nun mit Induktion die Behauptung. □

Nun verallgemeinern wir den Operator C von (C.5) und definieren auf dem Produktraum $T\nu \otimes \cdots \otimes T\nu$

$$C_{n,k} : a + bx_k \to a + \omega bx_k,$$

wobei a und b Funktionen von den übrigen $n-1$ Variablen darstellen. Wir definieren nun die Hintereinanderausführung von diesen n Operatoren

$$K_n := C_{n,1} \circ \cdots \circ C_{n,n}.$$

Die Beschränktheit von K_n als Operator von $L^p(T\nu \otimes \cdots \otimes T\nu)$ nach $L^q(T\nu \otimes \cdots \otimes T\nu)$ folgt aus den nachfolgenden Lemma über das Produkt zweier Operatoren:

Lemma C.8. *Seien T_1 und T_2 zwei durch Kerne definierte Integraloperatoren und weiters gelte*

$$\begin{aligned}\|T_1 : L^p(\rho_1) \to L^s(\lambda_1)\| &\leq 1,\\ \|T_2 : L^p(\rho_2) \to L^s(\lambda_2)\| &\leq 1.\end{aligned}$$

für zwei Exponenten $p \leq s$ und σ endliche Maße ρ_i, λ_i. Dann gilt für das Produkt der beiden Operatoren

$$\|T_1 \otimes T_2 : L^p(\rho_1 \otimes \rho_2) \to L^s(\lambda_1 \otimes \lambda_2)\| \leq 1.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}\|T_1 \otimes T_2 f\|_s &= \left[\int\int |(T_1T_2f)(x_1,x_2)|^s \,\mathrm{d}\lambda_1(x_1)\,\mathrm{d}\lambda_2(x_2)\right]^{1/s}\\ &\leq \left[\int\left[\int |(T_2f)(y_1,x_2)|^p \,\mathrm{d}\rho_1(y_1)\right]^{s/p} \mathrm{d}\lambda_2(x_2)\right]^{1/s}\\ &\leq \left[\int\left[\int |(T_2f)(y_1,x_2)|^s \,\mathrm{d}\lambda_2(x_2)\right]^{p/s} \mathrm{d}\rho_1(y_1)\right]^{1/p}\\ &\leq \left[\int\int |f(y_1,y_2)|^p \,\mathrm{d}\rho_1(y_1)\,\mathrm{d}\rho_2(y_2)\right]^{1/p}\end{aligned}$$

Dabei wurde in der ersten Ungleichung die Beschränktheit des Operators T_1 ausgenutzt, die zweite ist eine Anwendung der Minkowski Ungleichung für Integrale mit dem Exponenten $s/p \geq 1$ und die dritte nutzt die Beschränktheit von T_2 aus. □

Aus diesem Lemma folgt nun, dass der Operator K_n beschränkt von $L^p(T\nu \otimes \cdots \otimes T\nu)$ nach $L^q(T\nu \otimes \cdots \otimes T\nu)$ ist mit Norm 1. Deshalb ist die Einschränkung $\overline{K}_n$ von K_n auf den Unterraum X_n auch beschränkt mit Norm 1 und die $\varphi_{n,l}$ sind Eigenfunktionen des Operators $\overline{K}_n$; es gilt

$$\begin{aligned} \overline{K}_n : x_{m_1} \cdots x_{m_l} &\to \omega^l x_{m_1} \cdots x_{m_l}, \\ \overline{K}_n \varphi_{n,l} &= \omega^l \varphi_{n,l}. \end{aligned}$$

Somit sind sie das natürliche Analogon der Hermite Polynome über dem Raum $L^2(X_n)$. Wir sind nun bereit für den Beweis von Satz C.3 und somit von Satz C.1.

Beweis von Satz C.3. Es reicht, die Aussage für eine dichte Menge von Funktionen zu zeigen und wir zeigen sie für Polynome. Jedes Polynom g kann als eine endliche Linearkombination von Hermite Polynomen

$$g(x) = \sum_{l=1}^{M} b_l H_l(x)$$

dargestellt werden. Dazu definiere analog

$$g_n(x_l, \ldots, x_n) = \sum_{l=1}^{M} b_l \varphi_{n,l}(x_1, \ldots, x_n).$$

Dann gilt für die Aktionen der Operatoren T_ω und $\overline{K}_n$

$$T_\omega(g) = \sum_{l=1}^{M} \omega^l b_l H_l, \qquad \overline{K}_n(g_n) = \sum_{l=1}^{M} \omega^l b_l \varphi_{n,l}.$$

Es folgt nun aus Lemma C.7 und aus der Tatsache, dass alle Momente von $\nu_n = T\nu \otimes \cdots \otimes T\nu$ (n Produkte) gegen die Momente von μ konvergieren, dass aufgrund des Faktors $1/n$ gilt

$$\int |(T_\omega g)(x_1 + \cdots + x_n) - (\overline{K}_n g_n)(x_1, \ldots, x_n)|^q \, \mathrm{d}T\nu(x_1) \cdots \, \mathrm{d}T\nu(x_n) \to 0.$$

Aus der Dreiecksungleichung für die L^q Norm und wieder aus der schwachen Konvergenz von ν_n nach μ hinsichtlich Polynomfunktionen (Konvergenz der Momente) erhalten wir nun

$$\lim \left\| \overline{K}_n g_n \right\|_{L^q(X_n)} = \lim \left\| T_\omega g \right\|_{L^q(\nu_n)} = \left\| T_\omega g \right\|_{L^q(\mu)}.$$

Das gleiche Argument liefert

$$\lim \left\| g_n \right\|_{L^p(X_n)} = \left\| g \right\|_{L^p(\mu)}.$$

Also folgt aus der Beschränktheit von $\overline{K}_n$ von $L^p(X_n)$ nach $L^q(X_n)$ mit Norm 1 die behauptete Ungleichung

$$\left\| T_\omega g \right\|_{L^q(\mu)} \leq \left\| g \right\|_{L^p(\mu)}.$$

□

Literaturverzeichnis

Primäre Literatur

[Eva98] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[Fol83] G. B. Folland. *Lectures on partial differential equations*, volume 70 of *Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics*. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1983.

[Won99] M. W. Wong. *An introduction to pseudo-differential operators*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, second edition, 1999.

Empfohlene Bücher

[Fol99] Gerald B. Folland. *Real analysis*. Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons Inc., New York, second edition, 1999. Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication.

[SR91] Xavier Saint Raymond. *Elementary introduction to the theory of pseudodifferential operators*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1991.

[Str94] Robert S. Strichartz. *A guide to distribution theory and Fourier transforms*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1994.

Weiterführende Literatur

[Bec75] William Beckner. Inequalities in Fourier analysis. *Ann. of Math. (2)*, 102(1):159–182, 1975.

[BFG83] Michael Beals, Charles Fefferman, and Robert Grossman. Strictly pseudoconvex domains in $\mathbf{C}^n$. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 8(2):125–322, 1983.

[CD99] Doina Cioranescu and Patrizia Donato. *An introduction to homogenization*, volume 17 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1999.

[Eva90] Lawrence C. Evans. *Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations*, volume 74 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1990.

[Gut05] Allan Gut. *Probability: a graduate course*. Springer Texts in Statistics. Springer, New York, 2005.

[Ste70] Elias M. Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions*. Princeton Mathematical Series, No. 30. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

[Ste93] Elias M. Stein. *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, volume 43 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. With the assistance of Timothy S. Murphy, Monographs in Harmonic Analysis, III.

[SW71] Elias M. Stein and Guido Weiss. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971. Princeton Mathematical Series, No. 32.

[Trè80a] François Trèves. *Introduction to pseudodifferential and Fourier integral operators. Vol. 1*. Plenum Press, New York, 1980. Pseudodifferential operators, The University Series in Mathematics.

[Trè80b] François Trèves. *Introduction to pseudodifferential and Fourier integral operators. Vol. 2*. Plenum Press, New York, 1980. Fourier integral operators, The University Series in Mathematics.

Index