Skriptum zur Vorlesung

Pseudodifferential- und Fourierintegraloperatoren

bei a.Univ.-Prof.Dipl.-Ing.Dr. Paul Müller

Wintersemester 2006

geschrieben von

Jakob Ablinger

Christian Feurer

Michael Kolmbauer

Philipp Lugmayr

Ionela Moale

Markus Passenbrunner

Christoph Wiesmeyr

8. Oktober 2007

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Hier werden wichtige Definitionen, Sätze und Sachverhalte aufgeführt, die in weiterer Folge benötigt werden.

Notation 1.1. Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir

$$x \cdot y := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

für das Standard-Skalarprodukt und

$$|x| = (x \cdot x)^{1/2}$$

für die euklidische Norm. Wenn es aus dem Kontext klar ist, schreiben wir oft für $x \cdot y$ auch nur xy. •

1.1 Die Fouriertransformation

Definition 1.2. Sei $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann ist die Fouriertransformation gegeben durch

$$\hat{u}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot y} u(x) dx \tag{1.1}$$

Weiters definieren wir die inverse Fouriertransformation

$$\check{u}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot y} u(x) dx$$

Es gilt der wichtige

Satz 1.3 (Plancherel)**.** Sei $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt, dass $\hat{u}, \check{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und

$$\|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\check{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{1.2}$$

Bemerkung 1.4 (Definition der Fouriertransformation auf L^2)**.** Mit Gleichung (1.2) kann man die Definition der Fouriertransformation von $L^1(\mathbb{R}^n)$ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ ausdehnen. Sei $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und wähle eine Folge $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|u_k - u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to 0.$$

Dann gilt nach dem Satz von Plancherel

$$\|\hat{u}_k - \hat{u}_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\widehat{u_k - u_j}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u_k - u_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Daher ist $\{\hat{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Cauchyfolge in $L^2(\mathbb{R}^n)$ und hat demzufolge einen Limes $\hat{u}$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$, welchen wir als die Fouriertransformation von $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ definieren. Analog kann man nun auch $\check{u}$ für $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ definieren. •

Bemerkung 1.5 (Faltung)**.** Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für $1 \leq p \leq \infty$. Dann existiert das Integral
$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$
für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ und wir definieren die *Faltung* von f und g als

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

Außerdem gilt $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

•

Notation 1.6 (Multiindexschreibweise)**.** Sei $m \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}^n$. Man nennt dann α einen *Multiindex.* Für $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ vereinbaren wir folgende Schreibweisen.

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$
$$\xi^\alpha = \prod_{i=1}^{n} \xi_i^{\alpha_i}.$$

Weiters definieren wir die Differentialoperatoren

$$D^\alpha = \prod_{k=1}^{n} (-i)^{\alpha_k} \partial_{x_k}^{\alpha_k}$$

und für Koeffizienten $a_\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $|\alpha| \leq m$

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha.$$

Dem letztgenannten Operator wird ein sogenanntes *Symbol* $P(x, \xi)$ zugeordnet, indem formal das D durch ein Element aus $\mathbb{R}^n$ ersetzt wird

$$P(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha. \tag{1.3}$$

Treten nur konstante Koeffizienten a_α auf, so schreibt man auch $P(D)$ bzw. $P(\xi)$.
Wir schreiben außerdem für den Gradienten einer Funktion $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$Du := \operatorname{grad} u.$$

Für zwei Multiindizes α, β definieren wir außerdem noch die folgendes

- $\beta \leq \alpha$ bedeutet, dass $\beta_j \leq \alpha_j$ für alle $j = 1, \dots, n$.
- $\alpha - \beta$ ist der Multiindex mit den Eintragungen $(\alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_n - \beta_n)$, wenn $\beta \leq \alpha$.
- $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$

- $\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_n}{\beta_n}$, wenn $\beta \leq \alpha$.

Es gilt auch noch die *Leibnizformel*

$$D^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (D^\beta f)(D^{\alpha-\beta} g)$$

•

Satz 1.7 (Eigenschaften der Fouriertransformation)**.** Seien $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$, dann gilt

1. $\int_{\mathbb{R}^n} u\bar{v}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}\bar{\hat{v}}dy$
2. $\widehat{D^\alpha u}(\xi) = \xi^\alpha \hat{u}(\xi)$ falls $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$
3. $(D^\alpha \hat{u})(\xi) = (\widehat{(-x)^\alpha u})(\xi)$ falls $(-x)^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$.
4. Falls $u, v \in L^1 \cap L^2$, dann ist $(u * v)\hat{} = (2\pi)^{n/2} \hat{u}\hat{v}$

$\bar{v}$ bezeichnet die konjugiert komplexe Funktion zu v.

Wir definieren nun eine Klasse von Funktionen.

Definition 1.8 (Schwartzraum)**.** Der Raum

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \,|\, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^{(n)} \; \exists A_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}^+ : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| \leq A_{\alpha,\beta}\}$$

wird *Schwartzraum* genannt. Die Funktionen darin heißen *schnell fallend.*

Für diese Funktionen haben wir eine Inversionsformel der Fouriertransformation.

Satz 1.9. Es gilt für alle Funktionen $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dass

$$(\hat{f})\check{} = f.$$

Bemerkung 1.10. Insbesondere ist die Fouriertransformation eine Bijektion von $\mathcal{S}$ auf $\mathcal{S}$. •

1.2 Hauptsätze über implizite und inverse Funktionen

Satz 1.11 (Haupsatz über implizite Funktionen)**.** Seien $p, q \in \mathbb{N}$, $G \subseteq \mathbb{R}^p$, $H \subseteq \mathbb{R}^q$ offen und $F : G \times H \to \mathbb{R}^q$ stetig differenzierbar. Weiters seien $x_0 \in G$, $y_0 \in H$ so, dass $F(x_0, y_0) = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$ sei regulär, wobei $\frac{\partial F}{\partial y}$ die $q \times q$-Untermatrix von F' sei, die der Differentiation nach den letzten q Variablen entspricht.
Dann existieren $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ und eine stetig differenzierbare Funktion $f : U_\delta(x_0) \to U_\varepsilon(y_0)$ mit

- $f(x_0) = y_0$
- $\forall x \in U_\delta(x_0) : F(x, f(x)) = 0$
- $f(x)$ ist das einzige Element in $U_\varepsilon(y_0)$, das diese Gleichung erfüllt
- f ist in x_0 differenzierbar und es gilt
  $f'(x_0) = -(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0))^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)$.

Satz 1.12 (Hauptsatz über inverse Funktionen)**.** Seien $A \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(A, \mathbb{R}^n)$ und $x_0 \in A$ so, dass $Df(x_0)$ regulär ist. Dann existiert eine offene Menge $V \subseteq A$ mit $x_0 \in V$ und eine offene Menge $W \subseteq \mathbb{R}^n$, sodass

- $f : V \to W$ ist bijektiv
- Die Umkehrfunktion $g : W \to V$ ist stetig differenzierbar und $g'(y) = (f'(g(y)))^{-1}$.

2 Das Poissonproblem

Formulierung des Poissonproblems. Gegeben ist eine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Wir suchen eine Funktion $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, sodass

$$(P(x, D)u)(x) = f(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n$$

gilt. Das nennt man *Poissonproblem*. Wir wenden uns nun der Existenz lokaler Lösungen dieses Problems zu.

2.1 Lokale Lösung des Poissonproblems

Definition 2.1. Das Poissonproblem $P(x, D) = f$ besitzt lokale Lösungen $:\Longleftrightarrow$

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n \exists \delta_1 < \delta_2 \exists u \in C_c^\infty(U_{x_0}(\delta_2)) \forall x \in U_{x_0}(\delta_1) : (P(x, D)u)(x) = f(x)$$

Satz 2.2 (Lokale Lösung des Poissonproblems mit konstanten Koeffizienten)**.** Seien $a_\alpha \in \mathbb{R}$ für $|\alpha| \leq m$. Weiters gelte die Elliptizitätsbedingung

$$\exists c > 0, A > 0 \ \forall |\xi| > A \ : \ \left| \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha \right| \geq c|\xi|^m.$$

Dann gelten mit $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$

1. $\exists R \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \exists u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \forall x \in \mathbb{R}^n \ :$

$$(P(D)u_0)(x) = f(x) + (R * f)(x)$$

2. Für alle $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ existieren lokale Lösungen.

Beweis.

1. Sei $0 \leq \chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit folgenden Eigenschaften

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |x| \geq 2A \\ 0 & \text{falls } |x| \leq A \end{cases}$$

Wenn $A < |x| < 2A$, dann setzen wir die Funktion eben so, dass sie in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ liegt. Dann definieren wir

$$u_0(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)} \chi(\xi) d\xi. \tag{2.1}$$

$P(\xi)$ war das Symbol des Differentialoperators $P(D)$, siehe (1.3). Wir werden nun zeigen, dass dieses $u_0(x)$ die Bedingung unter 1. erfüllt. Wir beginnen damit, auf Gleichung (2.1) die Fouriertransformation anzuwenden und erhalten

$$\hat{u}_0(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)} \chi(\xi).$$

Mit Satz 1.7 folgt

$$(P(D)u_0)\hat{}(\xi) = \hat{f}(\xi)\chi(\xi) = \hat{f}(\xi) + \hat{f}(\xi)(\chi(\xi) - 1).$$

Anwendung der inversen Fouriertransformation ergibt

$$(P(D)u_0)(x) = f(x) + (\hat{f}(\xi)(\chi(\xi) - 1))\check{},$$

also mit $R(x) = (\chi(\xi) - 1)\check{}(x)$

$$(P(D)u_0)(x) = f(x) + (R * f)(x),$$

da aus Satz 1.7 folgt, dass

$$f * R = (\hat{f}(\xi)\hat{R}(\xi))\check{}$$

Bevor wir Teil 2 dieses Satzes angehen, noch zwei Vorbemerkungen dazu. ∎

Bemerkung 2.3. Wir wollen das Problem

$$P(D)u = f \tag{2.2}$$

lösen. Was wir aus dem ersten Teil wissen, ist, dass wir ein Problem der Art

$$P(D)u_0 = f + R * f = (\mathrm{Id} + \tilde{R})(f) \tag{2.3}$$

mit einem Integraloperator $\tilde{R}$ lösen können. Wenn $(\mathrm{Id} + \tilde{R})$ invertierbar ist, dann kann man (2.3) auf die rechte Seite $g = (\mathrm{Id} + \tilde{R})^{-1} f$ anwenden und erhält ein u_0, sodass $P(D)u_0 = (\mathrm{Id} + \tilde{R})g = (\mathrm{Id} + \tilde{R})(\mathrm{Id} + \tilde{R})^{-1} f = f$. Also ist dann (2.2) gelöst. •

Bemerkung 2.4 (Hilbert-Schmidt-Norm)**.** Wir definieren einen Integraloperator $K : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ als

$$(Kf)(x) := \int_0^1 k(x,y) f(y) dy,$$

wobei $k \in L^2([0,1]^2)$ der Kern des Operators ist. Dann gilt für die Operatornorm

$$\|K\| = \sup_{\|f\| \le 1} \|Kf\| = \sup_{\|f\| \le 1} \sup_{\|g\| \le 1} \langle Kf, g \rangle \le \left(\int_0^1 \int_0^1 |k(x,y)|^2 dx dy \right)^{1/2}.$$

Der rechte Ausdruck entspricht der *Hilbert-Schmidt-Norm* des Integraloperators K. •

Beweis zu Satz 2.2, Teil 2. Sei $\delta > 0$. Dann definieren wir $\psi_\delta, \phi_\delta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\psi_\delta(x) = \begin{cases} 1 & |x - x_0| \le \delta/2 \\ 0 & |x - x_0| \ge \delta \end{cases}$$

$$\phi_\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x - x_0| \le \delta \\ 0 & \text{für } |x - x_0| \ge 2\delta \end{cases}$$

Es gilt offensichtlich

$$\psi_\delta \cdot \phi_\delta = \psi_\delta.$$

Nach Bemerkung 2.3 suchen wir nun ein g mit $\mathrm{supp}(g) \subset U(x_0, \delta)$, sodass

$$g + R * g = f \text{ in } U = U(x_0, \delta/2).$$

Nach Definition von ψ_δ und ϕ_δ ist das genau dann der Fall, wenn

$$g + \psi_\delta(R * (\phi_\delta g)) = \psi_\delta f.$$

Mit

$$\tilde{R}(g)(x) = \psi_\delta(x)(R * (\phi_\delta g))(x) = \int_{\mathbb{R}^n} R(x-y) g(y) \phi_\delta(y) \psi_\delta(x) dy$$

und

$$k(x,y) = R(x-y)\phi_\delta(y)\psi_\delta(x)$$

haben wir also nach Bemerkung 2.4

$$\|\tilde{R}\| \le \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} k(x,y)^2 dx dy \right)^{1/2} \le C(8^n \delta^{2n})^{1/2}.$$

Die letzte Ungleichung folgt hier aus der Tatsache, dass man R auf einem kompakten Intervall durch eine Konstante C abschätzen kann. Außerdem kann man ψ_δ durch 1 abschätzen auf einem Quader mit Seitenlänge 2δ und analog ϕ_δ durch 1 auf einem Quader mit Seitenlänge 4δ. Nun können wir δ von vornherein so klein wählen, dass gilt

$$\|\tilde{R}\| < \frac{1}{4}.$$

Dann ist aber nach dem Satz von der Neumannschen Reihe $\mathrm{Id} + \tilde{R}$ invertierbar und

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} (-\tilde{R})^k (\psi_\delta f).$$

Die Aussage des Satzes ist also bewiesen. ■

3 Anfangswertproblem für die Wellengleichung

Formulierung des Anfangswertproblems. Gegeben haben wir ein $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und wir suchen ein $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta_x u &= 0 \\ u(x,0) &= g(x) \\ u_t(x,0) &= 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Notation 3.1. Den Laplace-Operator

$$\Delta_x = \partial^2_{x_1 x_1} + \ldots + \partial^2_{x_n x_n}$$

nehmen wir nur bezüglich den Raumvariablen, wir schreiben auch manchmal nur Δ. Weiters definieren wir den *d'Alembert-Operator*

$$\Box := \partial_{tt} - \Delta_x.$$

Außerdem betrachten wir noch die Fouriertransformation nur für die Raumvariablen, es ist also für $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_0^+, x \in \mathbb{R}^n$

$$\hat{u}(\xi, t) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} u(x,t) dx$$

•

3.1 Umformung des Anfangswertproblems

Wenn wir (3.1) fouriertransformieren, kommen wir auf

$$\begin{aligned} \hat{u}_{tt}(\xi,t) + |\xi|^2 \hat{u}(\xi,t) &= 0 \\ \hat{u}(\xi,0) &= \hat{g}(\xi) \\ \hat{u}_t(\xi,0) &= 0 \end{aligned}$$

Mit fixem ξ und $a = |\xi|^2, b = \hat{g}(\xi), f(t) = \hat{u}(\xi, t)$ erhalten wir die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{aligned} f''(t) + af(t) &= 0 \\ f(0) &= b \\ f'(0) &= 0 \end{aligned}$$

Sie hat die Lösung

$$f(t) = b \cos \sqrt{a} t = \frac{b}{2}(e^{i\sqrt{a}t} + e^{-i\sqrt{a}t}).$$

Wenn man nun wieder zurück einsetzt, erhält man

$$\hat{u}(\xi, t) = f(t) = \frac{\hat{g}(\xi)}{2}(e^{i|\xi|t} + e^{-i|\xi|t}).$$

Dies führt zur Lösungsformel

$$u(x,t) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \frac{\hat{g}(\xi)}{2}(e^{i|\xi|t} + e^{-i|\xi|t}) d\xi. \tag{3.2}$$

Vergleich der Lösungsformeln Wir hatten bis jetzt zwei Typen von Problemen

1. $P(D)u = f$
2. $\Box u = 0$

Beim ersten (Poisson-)problem fanden wir die „Lösungs“formel (siehe (2.1))

$$u(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} \frac{\chi(\xi)}{P(\xi)} d\xi.$$

Dies ist der Prototyp eines *Pseudodifferentialoperators* (kurz ψdO). Bei der Wellengleichung hatten wir vom Typ her

$$u(x,t) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(\xi) e^{ix\xi} e^{it|\xi|} d\xi.$$

Dies ist der Prototyp eines *Fourierintegraloperators* (FiO). Man wird später sehen, dass die Funktion $\frac{\chi(\xi)}{P(\xi)}$ zu einer bestimmten *Symbolklasse* gehört, für die ψdO definiert sind.

4 Hochfrequente Asymptotik der Wellengleichung

Formulierung des Problems Für $a \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), p \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\varepsilon > 0$ sei folgendes Anfangswertproblem der Wellengleichung gegeben:

$$\begin{cases} u_{tt}^\varepsilon - \Delta u^\varepsilon &= 0 \text{ in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u^\varepsilon = g^\varepsilon, u_t^\varepsilon &= 0 \text{ in } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases} \tag{4.1}$$

wobei

$$g^\varepsilon(x) = a(x) e^{\frac{ip(x)}{\varepsilon}} \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

Weiters gelte

$$Dp(x) \neq 0 \qquad \text{für } x \in \operatorname{supp}(a)$$

Gesucht sind

- $u^\varepsilon(x,t)$
- $\lim_{\varepsilon\to 0} u^\varepsilon(x,t)$

Satz 4.1. Seien

$$\begin{aligned}\phi_0(x,y,z,t) &= (x-z)y + t\,|y| + p(z)\\ \phi_1(x,y,z,t) &= (x-z)y - t\,|y| + p(z)\end{aligned}$$

und

$$I_j(g^\varepsilon)(x,t) = \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} a(z)e^{\frac{i}{\varepsilon}\phi_j(x,y,z,t)}dydz \tag{4.2}$$

für $j \in \{0,1\}$. Dann gilt

$$u^\varepsilon(x,t) = \frac{1}{2}\left[I_0(g^\varepsilon) + I_1(g^\varepsilon)\right](x,t).$$

Beweis. Per Definition gilt

$$\hat{g}^\varepsilon(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-izy}a(z)e^{i\frac{p(z)}{\varepsilon}}dz.$$

Wenn wir das in die Lösungsformel (3.2) einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned}u^\varepsilon(x,t) &= \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} a(z)e^{-izy}e^{i\frac{p(z)}{\varepsilon}}e^{ixy}e^{it|y|}dydz +\\ &+ \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} a(z)e^{-izy}e^{i\frac{p(z)}{\varepsilon}}e^{ixy}e^{-it|y|}dydz\\ &\overset{y=\frac{\bar{y}}{\varepsilon}}{=} \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi\varepsilon)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} a(z)e^{i(x-z)\frac{\bar{y}}{\varepsilon}+it\frac{|\bar{y}|}{\varepsilon}+i\frac{p(z)}{\varepsilon}}d\bar{y}dz +\\ &+ \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi\varepsilon)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} a(z)e^{i(x-z)\frac{\bar{y}}{\varepsilon}-it\frac{|\bar{y}|}{\varepsilon}+i\frac{p(z)}{\varepsilon}}d\bar{y}dz\end{aligned}$$

also

$$u^\varepsilon(x,t) = \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi\varepsilon)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} a(z)\left[e^{\frac{i}{\varepsilon}\phi_0(x,y,z,t)} + e^{\frac{i}{\varepsilon}\phi_1(x,y,z,t)}\right]dydz$$

■

4.1 Methode der stationären Phase

Um die Asymptotik von Lösungen der Wellengleichung zu untersuchen, müssen wir uns Integrale der Form wie I_0 und I_1, also

$$J_\varepsilon = \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{\varepsilon}\rho(y)}\beta(y)dy$$

ansehen, wobei $\varepsilon > 0$, $\beta(y) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\rho(y) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
Gesucht ist eine Formel für $\lim_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon$.

Die Lösungsfindung passiert in den folgenden 3 Schritten

1. Linerare Phase: $\rho(y) = y \cdot p$
2. Quadratische Phase: $\rho(y) = y \cdot Ay = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j$
3. Lemma von Morse

4.1.1 Lineare Phase

Zunächst betrachten wir eine lineare Phase, sei also $\rho(y) = y \cdot p$ mit $p \in \mathbb{R}^n$. Dann haben wir folgendes Resultat

Lemma 4.2. Sei $a \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $p \in \mathbb{R}^n, p \neq 0$. Dann gilt:

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists c_k > 0\ \forall \varepsilon > 0 : \left| \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{\varepsilon} y \cdot p} a(y) dy \right| \leq c_k \varepsilon^k$$

Das Integral fällt also schneller als jede beliebige Potenz von ε.

Beweis. $p \in \mathbb{R}^n, p \neq 0$, $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$, o.B.d.A. $p_1 \neq 0$.
Der Beweis erfolgt über partielle Integration.

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{\varepsilon} y \cdot p} a(y) dy \right| &= \left| \left(\frac{\varepsilon}{i p_1} \right)^m \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^m}{\partial y_1^m} (e^{\frac{i}{\varepsilon} y \cdot p}) a(y) dy \right| \\ &= \left| \left(\frac{-\varepsilon}{i p_1} \right)^m \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{\varepsilon} y \cdot p} \frac{\partial^m}{\partial y_1^m} a(y) dy \right| \\ &\leq \varepsilon^m \underbrace{\frac{1}{|p_1|^m} |\mathrm{supp}(a)| \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| (\partial_{y_1}^m a)(x) \right|}_{=: C_m} \\ &= \varepsilon^m C_m \end{aligned}$$

Da das für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt, haben wir mit dem Vorfaktor $(2\pi\varepsilon)^{-\frac{n}{2}}$ kein Problem und die Aussage ist bewiesen. ■

4.1.2 Quadratische Phase

Als nächstes betrachten wir eine quadratische Phase $\rho(y) = y \cdot Ay$

Lemma 4.3 (Hauptlemma)**.** Sei $a \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ und A eine reelle, symmetrische und invertierbare Matrix in $\mathbb{R}^{n \times n}$.
Weiters sei

$$J_\varepsilon = \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{2\varepsilon} y \cdot Ay} a(y) dy$$

Dann gilt

$$\exists c > 0\ \forall \varepsilon > 0 : \left| J_\varepsilon - a(0) \frac{e^{i \frac{\pi}{4} \operatorname{sign} A}}{|\det A|^{\frac{1}{2}}} \right| \leq c\varepsilon$$

d.h.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} J_\varepsilon = a(0) \frac{e^{i \frac{\pi}{4} \operatorname{sign} A}}{|\det A|^{\frac{1}{2}}}$$

Die *Signatur* (sign A) einer Matrix A gibt die Anzahl der positiven Eigenwerte von A minus die Anzahl der negativen an.

Für den eigentlichen Beweis werden noch einige Hilfsmittel benötigt:

Proposition 4.4. Sei $\delta > 0$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. $h_\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert als

$$h_\delta(x) = e^{i\lambda x^2 - \delta x^2}$$

Dann gilt

$$\sqrt{2\pi} \lim_{\delta \to 0} \hat{h}_\delta(y) = \sqrt{\pi} \frac{e^{\frac{y^2}{4i\lambda}}}{(-i\lambda)^{\frac{1}{2}}}$$

Beweis. Nach Definition gilt

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi}\hat{h}_\delta(y) &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x^2 - \delta x^2 - ixy} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{(i\lambda - \delta)\left(x^2 - ix\frac{y}{i\lambda - \delta}\right)} dx \\
&\overset{\text{quadr. ergänzen}}{=} e^{\frac{y^2}{4(i\lambda - \delta)}} \int_{\mathbb{R}} e^{(i\lambda - \delta)\left(x - i\frac{y}{2(i\lambda - \delta)}\right)^2} dx
\end{aligned}$$

Als nächstes transformieren wir das Integral mit

$$\begin{aligned}
z &= (-i\lambda + \delta)^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{iy}{2(i\lambda - \delta)}\right) \\
dz &= (-i\lambda + \delta)^{\frac{1}{2}} dx
\end{aligned}$$

Sei nun $y \in \mathbb{R}$ fixiert und $\Gamma = \left\{z = (-i\lambda + \delta)^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{iy}{2(i\lambda - \delta)}\right) |x \in \mathbb{R}\right\}$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} e^{(i\lambda - \delta)\left(x - i\frac{y}{2(i\lambda - \delta)}\right)^2} dx &= \frac{1}{(-i\lambda + \delta)^{\frac{1}{2}}} \int_{\Gamma} e^{-z^2} dz \\
&= \frac{1}{(-i\lambda + \delta)^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} dz \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{(-i\lambda + \delta)^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

Es ist hier die komplexe Wurzel gemeint, für die $\mathrm{Re}(-i\lambda + \delta)^{\frac{1}{2}} > 0$ ist. Da sich dann $-i\lambda + \delta$ in der rechten Halbebene ohne die imaginäre Achse befindet, schneidet Γ die reelle Achse unter einem Winkel $< \frac{\pi}{4}$. Man kann sich überlegen, dass dann der Cauchysche Integralsatz anwendbar ist um das Integral über Γ auf ein Integral über die reelle Achse zu deformieren. Also folgt insgesamt

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi} \lim_{\delta \to 0} \hat{h}_\delta(y) &= \lim_{\delta \to 0} \left(\frac{\pi}{-i\lambda + \delta}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{y^2}{4(i\lambda + \delta)}} \\
&= \left(\frac{\pi}{-i\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{y^2}{4i\lambda}}
\end{aligned}$$

■

Proposition 4.5. Sei $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\delta > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}^n$.
Weiters seien

$$\begin{aligned} A &= \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \\ x \cdot Ax &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^2 \\ k_\delta(x) &= e^{ix\cdot Ax - \delta|x|^2} \end{aligned}$$

Dann gilt

$$(2\pi)^{\frac{n}{2}} \lim_{\delta\to 0} \hat{k}_\delta(y) = \pi^{\frac{n}{2}} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}\operatorname{sign} A}}{|\det A|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{i}{4} y\cdot A^{-1} y}$$

Beweis. Nach Definition und dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned} (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{k}_\delta(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot Ax - \delta|x|^2 - ix\cdot y} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{n} e^{i\lambda_j x_j^2 - \delta x_j^2 - ix_j y_j} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &= \prod_{j=1}^{n} \left[\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda_j x_j^2 - \delta x_j^2 - ix_j y_j} dx_j \right] \end{aligned}$$

Weiters ist nach Proposition 4.4

$$\begin{aligned} \lim_{\delta\to 0} (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{k}_\delta(y) &= \prod_{j=1}^{n} \left[\lim_{\delta\to 0} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda_j x_j^2 - \delta x_j^2 - ix_j y_j} dx_j \right] \\ &= \prod_{j=1}^{n} \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{(-i\lambda_j)^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{1}{4i}\frac{y_j^2}{\lambda_j}} \\ &= \underbrace{\left(\prod_{j=1}^{n} \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{(-i\lambda_j)^{\frac{1}{2}}} \right)}_{=X} \underbrace{\left(e^{\frac{1}{4i}\sum_{j=1}^{n} \frac{y_j^2}{\lambda_j}} \right)}_{=Y} \end{aligned}$$

Es folgt weiter

$$Y = e^{\frac{1}{4i}\sum_{j=1}^{n} \frac{y_j^2}{\lambda_j}} = e^{-\frac{i}{4} y\cdot A^{-1} y}$$

$$X = \pi^{\frac{n}{2}} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{(-i\lambda_j)^{\frac{1}{2}}} \overset{\text{Bem. 4.6}}{=} \pi^{\frac{n}{2}} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{|\lambda_j|^{\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}\operatorname{sign} A}} = \pi^{\frac{n}{2}} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}\operatorname{sign} A}}{|\det A|^{\frac{1}{2}}}$$

Somit gilt die Aussage.

■

Bemerkung 4.6. Wir nehmen ja an, dass $\operatorname{Re}(-i\lambda)^{\frac{1}{2}} > 0$ ist. Also gilt

$$(-i\lambda)^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} |\lambda|^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\pi}{4}} & \text{für } \lambda > 0 \\ |\lambda|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\pi}{4}} & \text{für } \lambda < 0 \end{cases}$$

•

Proposition 4.7. Sei A symmetrisch und invertierbar und $k_\delta(x)$ wie in Proposition 4.5. Dann gilt:

$$(2\pi)^{\frac{n}{2}} \lim_{\delta\to 0} \hat{k}_\delta(y) = \pi^{\frac{n}{2}} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}\operatorname{sign} A}}{|\det A|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{i}{4} y\cdot A^{-1} y}$$

Beweis. Wir drehen die Koordinaten um A zu diagonalisieren (dies ist immer möglich, da A symmetrisch ist)

$$A \text{ symmetrisch } \Rightarrow \exists U \in \mathbb{R}^{n\times n} : U^{-1}AU = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) \wedge \lambda_j \in \mathbb{R}.$$

Außerdem ist $U^T = U^{-1}$. Dann ist Proposition 4.5 anwendbar. ■

Proposition 4.8. Sei A symmetrisch und invertierbar.
Weiters sei

$$k_\delta^\varepsilon(x) = e^{\frac{i}{2\varepsilon} x\cdot Ax - \delta|x|^2}.$$

Dann gilt

$$\lim_{\delta\to 0} \hat{k}_\delta^\varepsilon(y) = \varepsilon^{\frac{n}{2}} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}\operatorname{sign} A}}{|\det A|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{i}{4} 2\varepsilon\, y\cdot A^{-1} y}.$$

Beweis. Wende Proposition 4.7 auf $A_\varepsilon := \frac{1}{2\varepsilon} A$ an.
Hierbei muss man beachten, dass

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2\varepsilon} A\right)^{-1} &= 2\varepsilon A^{-1} \\
\det\left(\frac{1}{2\varepsilon} A\right) &= \left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)^n \det A \\
\operatorname{sign} \frac{1}{2\varepsilon} A &= \operatorname{sign} A.
\end{aligned}$$

■

Beweis von Lemma 4.3. Nach Definition folgt

$$\begin{aligned}
J_\varepsilon &= \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{2\varepsilon} y \cdot Ay} a(y) dy \\
&= \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\delta \to 0} \left[e^{\frac{i}{2\varepsilon} y \cdot Ay - \delta |x|^2} \right] a(y) dy \\
&\overset{\text{Satz v. Lebesgue}}{=} \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{\frac{n}{2}}} \lim_{\delta \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} k_\delta^\varepsilon(y) a(y) dy \\
&\overset{\text{Satz 1.7}}{=} \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{\frac{n}{2}}} \lim_{\delta \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{k}_\delta^\varepsilon(y) \hat{a}(y) dy \\
&\overset{\text{Satz v. Lebesgue}}{=} \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\delta \to 0} \hat{k}_\delta^\varepsilon(-y) \hat{a}(y) dy \\
&\overset{\text{Prop. 4.8}}{=} \frac{\varepsilon^{\frac{n}{2}}}{(2\pi\varepsilon)^{\frac{n}{2}}} \frac{e^{i\frac{\pi}{4} \operatorname{sign} A}}{|\det A|^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\frac{\varepsilon}{2} y \cdot A^{-1} y} \hat{a}(y) dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{e^{i\frac{\pi}{4} \operatorname{sign} A}}{|\det A|^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + O(\varepsilon |y|^2)\right) \hat{a}(y) dy \\
&\overset{\int_{\mathbb{R}^n} \hat{a}(y)dy = (2\pi)^{\frac{n}{2}} a(0)}{=} \frac{e^{i\frac{\pi}{4} \operatorname{sign} A}}{|\det A|^{\frac{1}{2}}} a(0) + O(\varepsilon) C \int_{\mathbb{R}^n} |y|^2 \hat{a}(y) dy \\
&\overset{\int_{\mathbb{R}^n} |y|^2 \hat{a}(y)dy < \infty}{=} \frac{e^{i\frac{\pi}{4} \operatorname{sign} A}}{|\det A|^{\frac{1}{2}}} a(0) + O(\varepsilon) C
\end{aligned}$$

mit einer sich eventuell verändernden Konstanten C. Die Behauptung kann man nun unmittelbar ablesen. ■

Bis jetzt haben wir $\lim_{\varepsilon \to 0} J_\varepsilon$ mit $J_\varepsilon = \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{\varepsilon}\rho(y)} \beta(y) dy$, wenn

1. $\rho(y) = y \cdot p$ (Lineare Phase)
2. $\rho(y) = y \cdot Ay$ (Quadratische Phase)

Im anschließenden Abschnitt betrachten wir den allgemeinen Fall.

4.1.3 Lemma von Morse

In diesem Abschnitt werden wir den allgemeinen Fall auf eine lineare bzw. quadratische Phase zurückführen. Dies geschieht durch eine Variablentransformation und wir müssen unterscheiden zwischen nicht kritischen und nicht degenerierten kritischen Punkten.

Satz 4.9 (Variablentransformation)**.** Sei $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und weiters sei $D\phi(0) \neq 0$. Dann existiert eine glatte Funktion $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, sodass

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(0) &= 0 \\
D\mathbf{F}(0) &= I \\
\phi(\mathbf{F}(x)) &= \phi(0) + D\phi(0) \cdot x \quad \text{für } |x| \text{ hinreichend klein.}
\end{aligned}$$

Satz 4.10 (Lemma von Morse)**.** Sei $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und 0 ein nicht degenerierter kritischer Punkt, das heißt $D\phi(0) = 0$ und $\det D^2\phi(0) \neq 0$. Dann existiert eine glatte Funktion $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, sodass

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(0) &= 0 \\ D\mathbf{F}(0) &= I \\ \phi(\mathbf{F}(x)) &= \phi(0) + \tfrac{1}{2}x \cdot D\phi(0) \cdot x \qquad \text{für } |x| \text{ hinreichend klein.} \end{aligned}$$

Beweis von Satz 4.9. Wir definieren $\mathbf{r}_n := D\phi(0) \neq 0$. Wir können die Menge $O = \{\mathbf{r}_n\}$ mit Vektoren $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_{n-1}$ erweitern, sodass O eine orthogonale Basis von $\mathbb{R}^n$ ist. Wir definieren die Funktion $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch

$$\mathbf{f}(x, y) := (\mathbf{r}_1 \cdot (y - x), \ldots, \mathbf{r}_{n-1} \cdot (y - x), \phi(y) - \phi(0) - D\phi(0) \cdot x).$$

Wir betrachten nun die Ableitung der Funktion nach y (Jacobimatrix) und erhalten

$$D_y\mathbf{f}(0,0) = \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n \end{pmatrix}.$$

Daher ist $D_y f(0,0)$ invertierbar und wir können den impliziten Funktionensatz (Satz 1.11) anwenden. Dieser garantiert die Existenz einer Funktion $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{F}(0) = 0$, sodass $\mathbf{f}(x, \mathbf{F}(x)) = 0$ für alle $|x|$ hinreichend klein. Setzt man in $\mathbf{f}$ ein, so erhält man

$$\begin{cases} (\mathbf{F}(x) - x) \cdot \mathbf{r}_k = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n-1) \\ \phi(\mathbf{F}(x)) = \phi(0) + D\phi(0) \cdot x. \end{cases} \tag{4.3}$$

Mit der Definition von $\mathbf{r}_n$ und durch differenzieren von (4.3) erhalten wir

$$(D\mathbf{F}(0) - I)\mathbf{r}_k = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

Nachdem aber $\{\mathbf{r}_i\}_{i=1}^n$ eine orthogonale Basis des $\mathbb{R}^n$ war gilt $D\mathbf{F}(0) - I = 0$ also $D\mathbf{F}(0) = I$, womit die Aussage bewiesen wäre. ∎

Beweis von Satz 4.10. Für ein fixes $x \in \mathbb{R}^n$ sei $\Psi(t) := \phi(tx)$, also $\Psi(1) = \phi(x)$. Wir erhalten dann

$$\Psi(1) = \Psi(0) + \Psi'(0) + \int_0^1 (1-t)\Psi''(t)dt,$$

da mit partieller Integration gilt

$$\int_0^1 (1-t)\Psi''(t)dt = -\Psi'(0) + \Psi(1) - \Psi(0).$$

Durch differenzieren erhalten wir $\Psi''(t) = x \cdot D^2\phi(tx)x$ und können somit $\phi(x)$ schreiben als

$$\begin{cases} \phi(x) = \phi(0) + \frac{1}{2}x \cdot A(x)x \\ A(x) = 2\int_0^1 (1-t)D^2\phi(tx)dt \end{cases} \tag{4.4}$$

Wie man offensichtlich sieht ist $A(0) = D^2\phi(0)$, daher ist $A(0)$ regulär. Da die Determinante einer Matrix stetig von den Einträgen abhängt und $A(x)$ eine glatte Funktion ist können wir auch annehmen, dass $\det A(x) \neq 0$ für hinreichend kleines $|x|$.

Im weiteren Beweis nehmen wir o.B.d.A. an, dass $A(0) = D^2\phi(0)$ diagonal ist. Gilt das nicht, so kann man $A(0)$ aufgrund der Symmetrie (Satz von Schwartz) diagonalisieren und wir erhalten eine geeignete Basistransformation.
Wir gehen nun mit Induktion vor und behaupten, dass für alle $m \in \{0, 1, \dots, n\}$ eine glatte Funktion $\mathbf{F}_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ existiert, sodass

$$\begin{cases} \mathbf{F}_m(0) = 0,\ D\mathbf{F}_m(0) = I \text{ und} \\ \phi(\mathbf{F}_m(x)) = \phi(0) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \phi_{x_i x_i}(0) x_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=m+1}^{n} a_m^{i,j} x_i x_j, \end{cases} \tag{4.5}$$

für ein hinreichend kleines $|x|$ mit einer glatten und symmetrischen Matrix $A_m(x) = ((a_m^{i,j}))$ mit $A_m(0) = D^2\phi(0)$. Für $m = 0$ sei $\mathbf{F}_0$ die Identität und $A_0(x) = A(x)$. Als Induktionsvoaussetzung gelte (4.5) für ein beliebiges $m \in \{0, \dots, n-1\}$. Wir schreiben $\phi_m(x) := \phi(\mathbf{F}_m(x))$.
Für den Schluss von m auf $m+1$ definieren wir $T_{m+1} \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $y \mapsto x = T_{m+1}(y)$, wobei gilt

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 \\ &\vdots \\ x_m &= y_m \\ x_{m+1} &= \left(\frac{a_m^{m+1,m+1}(y)}{\phi_{x_{m+1}x_{m+1}}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(y_{m+1} + \sum_{j=m+2}^{n} y_j \frac{a_m^{m+1,j}(y)}{a_m^{m+1,m+1}(y)}\right) \\ &\vdots \\ x_n &= y_n \end{aligned} \tag{4.6}$$

Mit dieser Definition und der Induktionsvoraussetzung folgt dann

$$\begin{aligned} \phi_m(y) &\overset{\text{IV}}{=} \phi(0) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \phi_{y_i y_i}(0) y_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=m+1}^{n} a_m^{i,j} y_i y_j = \\ &\phi(0) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m+1} \phi_{x_i x_i}(0) x_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=m+2}^{n} b_{m+1}^{i,j} x_i x_j, \end{aligned} \tag{4.7}$$

wobei gilt

$$b_{m+1}^{i,j}(y) := \begin{cases} a_m^{i,j}(y) - \frac{a_m^{m+1,i}(y) a_m^{m+1,j}(y)}{a_m^{m+1,m+1}(y)} & i, j \in \{m+2, \dots, n\} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt $T_{m+1}(0) = 0$ und $DT_{m+1}(0) = I$ (nachrechnen), wobei I die n-dimensionale Einheitsmatrix ist. Mit dem Inversen Funktionensatz (1.12) können wir damit die Umkehrfunktion von T_{m+1} lokal um 0 garantieren. Es gilt also $T_{m+1}^{-1}(x) = y$ und wir erhalten damit $\phi_m(y) = \phi(\mathbf{F}_m(y)) = \phi(\mathbf{F}_m(T_{m+1}^{-1}(x)))$. Wir definieren weiters $A_{m+1}(x) := B_{m+1}(T_{m+1}^{-1}(x))$, insbesondere also $A_{m+1}(0) = B_{m+1}(0)$. Aus der Definition von B_{m+1} sieht man, dass mit der Induktionsvoraussetzung $A_m(0) = D^2\phi(0)$ sofort folgt, dass auch $B_{m+1}(0) = D^2\phi(0)$. Wir haben also mit

$$\phi(\mathbf{F}_m(T_{m+1}^{-1}(x)) = \phi(0) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m+1} \phi_{x_i x_i}(0) x_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=m+2}^{n} a_{m+1}^{i,j} x_i x_j \tag{4.8}$$

und der Definition von $\mathbf{F}_{m+1} := \mathbf{F}_m \circ T_{m+1}^{-1}$ den Induktionsschritt durchgeführt.
Wir setzen nun $m = n$ und erhalten aus (4.5) die Aussage. ∎

Bemerkung 4.11. Wir werden hier als Zusatz zum Beweis des Lemmas von Morse die Analogie der Diagonalisierung dort mit der Diagonalisierung nach Cholesky für symmetrische positiv definite Matrizen ($A = LL^T$). Ist nun also die Matrix A positiv definit, so gilt $a_{ii} > 0$ (wäre $a_{ii} \leq 0$, so wäre $e_i \cdot Ae_i = a_{ii} \leq 0$, was im direkten Widerspruch zur positiven Definitheit stünde). Ferner führen wir die quadratische Form $Q_0(x) = x \cdot Ax$ ein. Wir betrachten nun

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n r_{1k}x_k\right)^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n r_{1k}r_{1j}x_kx_j \\ r_{1k} = \frac{a_{1k}}{\sqrt{a_{11}}} \end{cases} \tag{4.9}$$

Mit der Setzung $a'_{ij} = a_{ij} - r_{1i}r_{1j}$ erhalten wir mit (4.9)

$$Q_0(x) - \left(\sum_{i=1}^n r_{1k}x_k\right)^2 = \sum_{j=2}^n \sum_{k=2}^n (a'_{jk})x_kx_j. \tag{4.10}$$

Daduch bekommen wir wiederum eine quadratische Form, welche lautet

$$Q_1(x) = \sum_{j=2}^n \sum_{k=2}^n (a'_{jk})x_kx_j \tag{4.11}$$

Nachdem bereits $Q_0(x)$ positiv war, ist es auch $Q_1(x)$. Angenommen es wäre $Q_1(x) \leq 0$, für ein bestimmtes $(x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Unabhängig von der Wahl von x_1 gilt

$$Q_0(x) = Q_1(x) + \left(\sum_{i=1}^n r_{1k}x_k\right)^2. \tag{4.12}$$

Mit der Wahl $x_1 = -\frac{1}{r_{11}} \sum_{k=2}^n r_{1k}x_k$ ist dann der quadratische Teil von (4.12) 0 und somit wäre dann auch $Q_0(x) \leq 0$, was aber im Widerspruch zur positiven Definitheit von A stünde. Damit gilt nun aber $a'_{22} > 0$ und wir können genauso wie vorher für $Q(x)$ vorgehen. Mit Induktion erhalten wir dann die positiven quadratischen Formen

$$Q_i(x) = Q_0 - \sum_{j=1}^i \left(\sum_{k=i}^n r_{ik}x_k\right)^2 \quad \text{für } i = 1, \ldots, n-1. \tag{4.13}$$

In der Gleichung (4.13) kann man sehr gut die Analogie zur Gleichung (4.5) aus dem Beweis des Morse-Lemmas sehen. Wir wissen weiterhin, dass Q_{n-1} nur mehr von der Variablen x_n abhängt und da die Form quadratisch sein muss erhalten wir

$$Q_{n-1}(x) = (r_{nn}x_n)^2, \tag{4.14}$$

mit geeigneter Setzung von r_{nn}. Mit der Beziehung (4.13) sieht man, dass

$$Q_0(x) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=j}^n r_{jk}x_k\right)^2. \tag{4.15}$$

Um nun die Cholesky-Faktorisierung der Matrix A zu erhalten schreiben wir die durch die Abspaltung erhaltenen Koeffizienten in eine Matrix

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}. \tag{4.16}$$

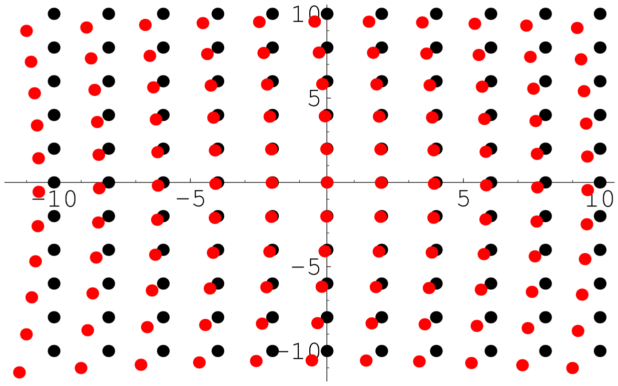

Abbildung 1: Variablentransformation von Beispiel 4.12

Offenbar gilt $(Rx)_j = \sum_{k=j}^{n} r_{jk}x_k$ und damit $Q_0(x) = \|Rx\|^2 = x \cdot R^T Rx$. Weiters gilt aber, dass $Q_0(x) = x \cdot Ax$ und damit insgesamt

$$A = R^T R, \tag{4.17}$$

was der Cholesky-Zerlegung von A entspricht. •

Beispiel 4.12. Wir betrachten die Funktion $\phi(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + \frac{x_1^2+x_2^2}{100}$. $(0, 0)$ ist kein kritischer Punkt und wir können somit eine Koordinatentransformation im Ursprung nach Satz 4.9 finden. Hierzu gehen wir wie im Beweis vor und betrachten die Funktion

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) = (x_1 - y_1 - x_2 + y_2, y_1 + y_2 - x_1 - x_2 + \frac{y_1^2 + y_2^2}{100}).$$

Im Beweis wird an dieser Stelle der implizite Funktionensatz angegeben, was in unserem Fall heißt wir müssen die Gleichung $f(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$ nach y_1, y_2 lösen. Dies ist in diesem Fall analytisch möglich und führt auf eine Funktion $\mathbf{F}$, sodass $\mathbf{F}(0) = 0, D\mathbf{F}(0) = I$ und $\phi(\mathbf{F}(x)) = \phi(0) + D\phi(0) \cdot x$. Zur Veranschaulichung dieser Funktion betrachten wir Punkte im Intervall $[-10, 10]^2$ und betrachten die Auswirkungen von $\mathbf{F}$ darauf. Siehe hierzu Abbildung 1. Die roten Punkte sind die mit $\mathbf{F}$ transformierten Stellen des schwarzen Gitters. •

Beispiel 4.13. Wir betrachten die Funktion $\phi(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + \frac{x_1^4+x_2^4}{100}$. Der Punkt $(0, 0)$ ist hier ein nicht degenerierter kritischer Punkt. Wollen wir eine Variablentransformation im Ursprung durchführen, um die Funktion rein quadratisch zu machen, so müssen wir nach dem Lemma von Morse (4.10) vorgehen. Wir erhalten

$$D^2\phi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 + \frac{3x_1^2}{25} & 0 \\ 0 & 2 + \frac{3x_2^2}{25} \end{pmatrix}$$

Dadurch haben wir auch die Matrixfunktion A aus dem Beweis des Morse-Lemmas. Nachdem diese bereits diagonal ist brauchen wir keine Koordinatentransformation mehr durchführen. Weiters bestimmen wir die Funktionen T_1, T_2 und invertieren sie. Es ist also $\mathbf{F}_1 = T_1^{-1}$ und $\mathbf{F} = \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_1 \circ T_2^{-1}$ die gewünschte Koordinatentransformation. Die Wirkung von $\mathbf{F}$ ist in Abbildung 2 gegeben. Die roten Punkte sind wieder wie im vorigen Beispiel die transformierten. •

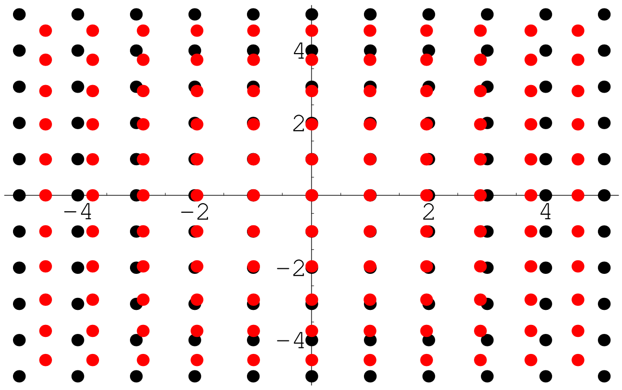

Abbildung 2: Variablentransformation von Beispiel 4.13

Wir wenden uns nun wieder der Asymptotik der Integrale der Form

$$J_\varepsilon = \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{\varepsilon}\phi(y)} a(y)dy \tag{4.18}$$

zu, wenn $\varepsilon \to 0$. Als Bedingung an die Funktion ϕ stellen wir, dass jeder kritische Punkt nicht degeneriert ist. Weiters gebe es N kritische Punkte $\{y_1, \dots, y_N\}$, also nur endlich viele. Es ist also

$$\{y_1, \dots, y_N\} = \{y \in \mathbb{R}^n : y \in \operatorname{supp}(a),\ D\phi(y) = 0,\ \det D^2\phi(y) \neq 0\} \tag{4.19}$$

Dies führt dann auf folgenden

Satz 4.14. Sei $\zeta \in C^\infty$, sodass $\forall k \exists \varepsilon_k > 0 \forall y \in \mathbb{R}^n : |y - y_k| < \varepsilon_k \Rightarrow \zeta(y) = 0$. Dann gilt

$$\forall m \exists c_m \forall \varepsilon > 0 \ : \ \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{\phi(y)}{\varepsilon}} a(y)\zeta(y)dy \right| \leq c_m \varepsilon^m. \tag{4.20}$$

Beweis. Wir können mit Satz 4.9 (Variablentransformation) die Funktion ϕ überall dort, wo die Funktion $\zeta \neq 0$ ist affin machen. Der Gradient bleibt trotzdem ungleich 0. Mit der mehrdimensionalen Substitutionsregel kann man dann das Integral auf eines der Form von Lemma 4.2 zurückführen. Genauer wählen wir mit $M := \operatorname{supp} a \cap \operatorname{supp} \zeta$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2} \min \left\{ \min_{z \in M} \{\varepsilon(z)\}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N \right\}.$$

Die $\varepsilon(z)$ sind die Radien der Umgebungen von z, in denen sich die Funktion ϕ nach Satz 4.9 affin machen lässt. Die Menge $\mathcal{U} = \{B(z, \varepsilon_0) \ : \ z \in M\}$ ist eine offene Überdeckung von M. Weil M kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung von M, also

$$M \subset \bigcup_{j=1}^{K} B(z_j, \varepsilon_0).$$

Wir wählen nun eine Partition der Eins $\psi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\begin{cases} \operatorname{supp} \psi_j \subset B(z_j, \varepsilon_0) & \text{für } j = 1, \dots, K \\ \forall x \in M \ : \ \sum_{j=1}^{K} \psi_j(x) = 1 \end{cases}$$

Wir formen nun das Integral um

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{\phi(y)}{\varepsilon}} a(y)\zeta(y)dy\right| &\leq \sum_{j=1}^{K}\left|\int_{B(z_j,\varepsilon_0)} e^{i\frac{\phi(y)}{\varepsilon}}\psi_j(y)a(y)\zeta(y)dy\right| = \\ &= \sum_{j=1}^{K}\left|\int_{\mathbf{F}^{-1}(B(z_j,\varepsilon_0))} e^{i\frac{\phi(\mathbf{F}(x))}{\varepsilon}}\psi_j(\mathbf{F}(x))a(\mathbf{F}(x))\zeta(\mathbf{F}(x))|\det D\mathbf{F}(x)|dx\right|.\end{aligned}$$

Das $\mathbf{F}$ wählen wir aus Satz 4.9. Wir können nun die Form von $\phi(\mathbf{F}(x))$ aus Satz 4.9 einsetzen ($\phi(\mathbf{F}(x)) = \phi(z_j) + D\phi(z_j)\cdot(x - z_j)$ in $\mathbf{F}^{-1}(B(z_j,\varepsilon_0))$) und ausnutzen, dass $\psi_j \cdot a \cdot \zeta \cdot |\det D\mathbf{F}| \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Nach Lemma 4.2 folgt nun die Behauptung. ■

Bemerkung 4.15. Die Funktion ζ in dem obigen Lemma hat die Aufgabe die Funktion ϕ an den Stellen, an denen der Gradient verschwinden würde wegzudämpfen und zwar in jeweils einer ε-Umgebung. Das heißt man muss das Integral aus (4.18) nur auf dem Träger von ζ betrachten, wobei gilt: $\operatorname{supp}(\phi\cdot\zeta) \subset \mathbb{R}^n\setminus\bigcup_{j=1}^N U_{\varepsilon_j}(y_j)$. •

Satz 4.16. Seien $k \in \{1,\dots,N\}$ und $\varepsilon_k > 0$ hinreichend klein beliebig. $\zeta \in C_c^\infty$ wählen wir so, dass $\forall y \in \mathbb{R}^n : |y - y_k| > \varepsilon_k \Rightarrow \zeta(y) = 0$ und wir setzen noch zusätzlich voraus, dass $\zeta(y_k) = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\Bigg|\frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{\varepsilon}\phi(y)}a(y)\zeta(y)dy \\ - e^{\frac{i\phi(y_k)}{\varepsilon}}\frac{1}{|\det D^2\phi(y_k)|^{1/2}}e^{\frac{i\pi}{4}\operatorname{sign}(D^2\phi(y_k))}a(y_k)\Bigg| = 0. \quad (4.21)\end{aligned}$$

Beweis. Wir können das Lemma von Morse für die Funktion ϕ im Punkt y_k anwenden, denn die ε_k sind hinreichend klein. Es existiert also eine Funktion $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, sodass $\phi(\mathbf{F}(x)) = \phi(y_k) + \frac{1}{2}(x - y_k)\cdot D^2\phi(y_k)(x - y_k)$ für alle $x \in U_{\varepsilon_k}(y_k)$. Weiters können wir dann folgendes Integral mit der Substitutionsregel berechnen

$$\begin{aligned}\int_{B(y_k,\varepsilon_k)} e^{i\frac{\phi(y)}{\varepsilon}}a(y)\zeta(y)dy &= \int_{\mathbf{F}^{-1}(B(y_k,\varepsilon_k))} e^{i\frac{\phi(\mathbf{F}(x))}{\varepsilon}}\underbrace{a(\mathbf{F}(x))\zeta(\mathbf{F}(x))|\det(D\mathbf{F}(x))|}_{=:\tilde{a}(x)}dx \\ &= e^{\frac{i\phi(y_k)}{\varepsilon}}\int_{\mathbf{F}^{-1}(B(y_k,\varepsilon_k))} e^{\frac{i}{2\varepsilon}(x-y_k)\cdot D^2\phi(y_k)(x-y_k)}\tilde{a}(x)dx\end{aligned} \quad (4.22)$$

Es folgt dann mit Lemma 4.3 und der Bemerkung, dass

$$\tilde{a}(y_k) = a(\mathbf{F}(y_k))\zeta(\mathbf{F}(y_k))|\det(D\mathbf{F}(y_k))| = a(y_k)\zeta(y_k) = a(y_k)$$

die Aussage. ■

Satz 4.17. Sei $a \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\{y_1,\dots,y_N\}$ seien die nicht degenerierten (und auch die einzigen) kritischen Punkte von ϕ. Dann gilt

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\Bigg|\frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{\varepsilon}\phi(y)}a(y)dy \\ - \sum_{k=1}^{N} e^{\frac{i\phi(y_k)}{\varepsilon}}\frac{1}{|\det D^2\phi(y_k)|^{1/2}}e^{\frac{i\pi}{4}\operatorname{sign}(D^2\phi(y_k))}a(y_k)\Bigg| = 0. \quad (4.23)\end{aligned}$$

Beweis. Wir verwenden eine Partition der Eins auf $\mathbb{R}^n$. Wir bestimmen zuerst die ε_k aus dem Satz 4.16 (mittels Morse-Lemma). Die Partition der Eins bestehend aus $\{\zeta_k\}_{k=1}^{N+1}$ sieht nun so aus

$$\begin{cases} \operatorname{supp}(\zeta_k) = U_{\varepsilon_k}(y_k) \\ \zeta_k(y_k) = 1 \end{cases}$$

für $k = 1, \ldots, N$. Die Funktion ζ_{N+1} ist dadurch festgelegt. Es gilt nun

$$J_\varepsilon = \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{\varepsilon}\phi(y)} a(y)\zeta_k(y) dy. \tag{4.24}$$

Mit Satz 4.14 folgt dann, dass der $(N+1)$-te Summand von (4.24) keinen Beitrag liefert. Wir betrachten dann die anderen Summanden separat und erhalten mit Satz 4.16 die Aussage. ■

4.2 Anwendung auf die Wellengleichung

Die Lösung des Anfangswertproblems vor Satz 4.1 war durch eben diesen Satz gegeben durch

$$u^\varepsilon(x,t) = \frac{1}{2}[I_0(g^\varepsilon) + I_1(g^\varepsilon)](x,t),$$

wobei

$$I_j(g^\varepsilon)(x,t) = \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} a(z) e^{i\phi_j(x,y,z,t)/\varepsilon} dy dz \qquad j \in \{0,1\}$$

und

$$\begin{aligned} \phi_0(x,y,z,t) &= (x-z)y + t\,|y| + p(z) \\ \phi_1(x,y,z,t) &= (x-z)y - t\,|y| + p(z). \end{aligned}$$

Mithilfe der Methode der stationären Phase sind wir nun in der Lage, eine asymptotische Formel für die Lösung $u^\varepsilon(x,t)$ mit $\varepsilon \to 0$ zu finden. Wir haben folgenden

Satz 4.18. Mit

$$D^2_{y,z}\phi_j = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\phi_j}{\partial y_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2\phi_j}{\partial y_1 \partial y_n} & \frac{\partial^2\phi_j}{\partial y_1 \partial z_1} & \cdots & \frac{\partial^2\phi_j}{\partial y_1 \partial z_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2\phi_j}{\partial y_n \partial y_1} & \cdots & \frac{\partial^2\phi_j}{\partial y_n^2} & \frac{\partial^2\phi_j}{\partial y_n \partial z_1} & \cdots & \frac{\partial^2\phi_j}{\partial y_n \partial z_n} \\ \frac{\partial^2\phi_j}{\partial z_1 \partial y_1} & \cdots & \frac{\partial^2\phi_j}{\partial z_1 \partial y_n} & \frac{\partial^2\phi_j}{\partial z_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2\phi_j}{\partial z_1 \partial z_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2\phi_j}{\partial z_n \partial y_1} & \cdots & \frac{\partial^2\phi_j}{\partial z_n \partial y_n} & \frac{\partial^2\phi_j}{\partial z_n \partial z_1} & \cdots & \frac{\partial^2\phi_j}{\partial z_n^2} \end{pmatrix} \quad \text{für } j \in \{0,1\}$$

und für hinreichend kleine t gilt

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left| u^\varepsilon(x,t) - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{1} a(z_j) e^{i\phi(x,z_j,y_j,t)/\varepsilon} \frac{e^{i\frac{\pi}{4} \operatorname{sign} D^2_{y,z}\phi(x,z_j,y_j,t)}}{|\det D^2_{y,z}\phi(x,z_j,y_j,t)^{1/2}|} \right| = 0,$$

wobei (y_j, z_j) für $j \in \{0,1\}$ die jeweils einzigen kritischen Punkte von $\phi_j(x,\cdot,t)$ sind.

Beweis. Als erstes bemerken wir, dass das Integral $I_j(g^\varepsilon)$ die Form von (4.18) hat, nur eben mit (y,z) statt y. Um die kritischen Punkte der Phase $(y,z) \mapsto \phi_j(x,y,z,t)$ (für fixes (x,t)) zu bekommen, müssen wir die Ableitung nach (y,z) berechnen. Also erhalten wir

$$\begin{aligned} D_y\phi_j &= (x-z) + (-1)^j t \frac{y}{|y|} \\ D_z\phi_j &= -y + Dp(z) \\ D_{y,z}\phi_j &= \begin{pmatrix} D_y\phi_j \\ D_z\phi_j \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.25}$$

Es ist nun die Frage, wann $D_{y,z}\phi_j = 0$ ist. Dazu berechnen wir $D^2_{y,z}\phi_j$. Es ist

$$D^2_{y,z}\phi_j = \begin{pmatrix} (-1)^j \frac{t}{|y|}\left(I - \frac{y\otimes y}{|y|^2}\right) & -I \\ -I & D^2p(z) \end{pmatrix}$$

Wenn man sich die Determinante ansieht, erhält man nach einiger Rechnung

$$\det D^2_{y,z}\phi_j = (-1)^n \det\left(I - (-1)^j \frac{t}{|y|} D^2p(I - \frac{y\otimes y}{|y|^2})\right).$$

Für fixes (t,x) ist diese ungleich 0, wenn t klein genug ist. Wir können dann deshalb auch auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (x-z) + (-1)^j t \frac{y}{|y|} &= 0 \\ -y + Dp(z) &= 0 \end{aligned}$$

den impliziten Funktionensatz (Satz 1.11) anwenden und erhalten jeweils für $j \in \{0,1\}$ eine eindeutige Lösung (y_0, z_0) und (y_1, z_1). Es gibt also nur diese kritischen Punkte von $\phi_j(x,\cdot,t)$. Satz 4.17 und Satz 4.1 zeigen dann die Behauptung. ∎

5 Ergänzungen zur Asymptotik

Teils ohne Beweise führen wir jetzt weitere Resultate zur Asymptotik von Partiellen Differentialgleichungen vor.

5.1 Zusammenhang zwischen Wellengleichung und Eikonalgleichung

Wir erinnern noch einmal an das Anfangswertproblem (3.1), das folgendermaßen aussah

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta_x u &= 0 \\ u(x,0) &= g(x) \\ u_t(x,0) &= 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Wenn wir nun die Funktionen

$$\rho_0(x,t,\xi) = x\cdot\xi + t|\xi| \tag{5.2}$$
$$\rho_1(x,t,\xi) = x\cdot\xi - t|\xi| \tag{5.3}$$

definieren, lässt sich die Lösung (3.2) dieses Problems darstellen als

$$u(x,t) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\hat{g}(\xi)}{2} e^{i\rho_0(x,t,\xi)} d\xi + (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\hat{g}(\xi)}{2} e^{i\rho_1(x,t,\xi)} d\xi.$$

Die Frage ist nun, welche Differentialgleichung ρ_0 und ρ_1 erfüllen. Wir haben

- $\rho_j(x,0,\xi) = x \cdot \xi$
- $\partial_t \rho_j(x,t,\xi) = (-1)^j |\xi| = (-1)^j (\sum_{k=1}^n \xi_k^2)^{1/2}$
- $\partial_{x_k} \rho_j(x,t,\xi) = \xi_k$ für $k = 1, \dots, n$.

Man sieht sofort, dass $(\partial_t \rho_j)^2 = \sum_{k=1}^n (\partial_{x_k} \rho_j)^2$, ρ_j erfüllt also die *Eikonalgleichung*

$$\partial_t \rho_j = \pm |D_x \rho_j|.$$

Sie ist ein Spezialfall der *Hamilton-Jacobi-Gleichung*

$$\rho_t = H(D_x \rho), \quad H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ gegeben},$$

einem Anfangswertproblem 1. Ordnung.

5.2 Wellengleichung mit variablen Koeffizienten

Voraussetzungen Sei $B(x) = (b_{ij}(x))_{i,j=1}^n$ positiv definit. Es gilt also

$$\exists c \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}^n \forall y \in \mathbb{R}^n : \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) y_i y_j \geq c|y|^2.$$

Es gelte außerdem dass $b_{ij}(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ wobei $1 \leq i,j \leq n$. Seien $\rho_\pm(x,t,y)$ Lösungen der folgenden Eikonalgleichung für alle $y \in \mathbb{R}^n$

$$\partial_t \rho_\pm = \pm\sqrt{(D\rho_\pm) \cdot B(x)(D\rho_\pm)} = \pm(\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) \partial_{x_i} \rho_\pm \partial_{x_j} \rho_\pm)^{1/2}$$

ρ_+ entspricht dem $+$-Zweig der Gleichung und ρ_- dem $-$-Zweig. Die Menge S^{-1} sei definiert als

$$S^{-1} := \{a \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n+1}) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^{(n)} \forall \gamma \in \mathbb{N} \exists A_{\alpha,\beta,\gamma} \forall (x,t,y) \in \mathbb{R}^{2n+1} : \\ |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_t^\gamma a(x,t,y)| \leq A_{\alpha,\beta,\gamma}(1+|y|)^{-1-|\beta|}\}$$

Bemerkung 5.1. Man wird später sehen, dass die Menge S^{-1} einer sogenannten *Symbolklasse* entspricht und einen engen Zusammenhang mit Pseudodifferentialoperatoren hat. •

Bezüglich der Lösungen der Wellengleichung mit den Koeffizienten b_{ij} gilt nun folgender

Satz 5.2. Unter obigen Voraussetzungen existieren kompakte Operatoren $I_\pm : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ und Amplituden $a_\pm(x,t,y) \in S^{-1}$ sodass

$$u(x,t) = \sum_{\pm} \left[\int_{\mathbb{R}^n} a_\pm(x,t,y) e^{i\rho_\pm(x,t,y)} \hat{g}(y) dy + I_\pm(g) \right]$$

die Wellengleichung

$$u_{tt}(x,t) - \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x) u_{x_i x_j}(x,t) = 0, \quad u(x,0) = g(x)$$

erfüllt.

5.3 Homogenisierung elliptischer PDE

Wir betrachten die linearen elliptischen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) Du^\varepsilon \right) &= f \quad \text{in } U && (5.4) \\ u^\varepsilon &= 0 \quad \text{auf } \partial U && (5.5) \end{aligned}$$

Im speziellen betrachten wir für $Y = [0,1]^n$ die Elliptizitätsbedingung

$$\forall y \in Y \forall \xi \in \mathbb{R}^n \ : \ \xi \cdot A(y)\xi \geq \nu |\xi|^2$$

für ein $\nu > 0$. Weiters soll gelten, dass $|A(y)| \leq C$ und

$$y \mapsto A(y) \text{ ist periodisch bezüglich } Y.$$

Sei nun $u^\varepsilon \in H_0^1(U)$ eine schwache Lösung von (5.4). Das bedeutet mit $A(y) = ((a_{ij}(y))$ gilt

$$\int_U \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x/\varepsilon) u^\varepsilon_{x_i} v_{x_j} dx = \int_U f v dx$$

für alle $v \in H_0^1(U)$. Wir haben dann, dass

$$\sup_{\varepsilon > 0} \|u^\varepsilon\|_{H_0^1(U)} < \infty,$$

also existiert eine Folge $\varepsilon_k \to 0$, sodass

$$u^{\varepsilon_k} \rightharpoonup u \quad \text{in } H_0^1(U).$$

Wir möchten nun eine Differentialgleichung finden, die der schwache Limes u löst. Dazu gilt der folgende

Satz 5.3 (L. Tartar, 1977)**.** Der schwache Limes u obiger Folge löst das Problem

$$-\operatorname{div}\left(\tilde{A}Du\right) = f \quad \text{in } U \tag{5.6}$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial U \tag{5.7}$$

wobei $\tilde{A} = ((\tilde{a}_{il}))$ und

$$\tilde{a}_{il} = \int_Y \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(y)(\delta_{jl} + w^l_{y_j}(y))dy \quad \text{mit } 1 \le i, l \le n.$$

w^l sei hierbei für $l = 1, \dots, n$ eine (existente) Lösung des *adjungierten Korrekturproblems*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(A^T Dw^l\right) = \sum_{i=1}^{n}(a_{il}(y))_{y_i} & \text{in } \mathbb{R}^n \\ w^l \ Y\text{-periodisch.} \end{cases}$$

Einen Beweis dazu kann man in [2] finden.

6 Pseudodifferentialoperatoren

In diesem Kapitel werden einige Beweise nicht behandelt. Diese kann man in [3] nachlesen

6.1 Temperierte Distributionen

Wir erinnern an die Definition der schnell fallenden Funktionen $\mathcal{S}$ (Definition 1.8).

Bemerkung 6.1. Es gilt $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Da zum Beispiel $e^{-|z|} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, aber $e^{-|z|} \notin C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. •

Definition 6.2. Eine Folge von Funktionen φ_j im Schwartzraum $\mathcal{S}$ konvergiert gegen Null in $\mathcal{S}$ ($\varphi_j \to 0$) wenn für alle Multiindizes α, β gilt

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi_j(x)| = 0.$$

Definition 6.3 (Temperierte Distribution)**.** Ein lineares Funktional T auf $\mathcal{S}$ ist eine temperierte Distribution wenn für alle gegen Null konvergierenden Folgen φ_j von Funktionen in $\mathcal{S}$ gilt, dass

$$T(\varphi_j) \to 0 \quad \text{für} \quad j \to \infty$$

Beispiel 6.4. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine meßbare Funktion, sodass

$$\exists N : \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{(1+|x|)^N} dx < \infty$$

(z. B. $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$) dann ist das lineare Funktional T_f auf $\mathcal{S}$ definiert durch

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$$

eine temperierte Distribution. •

Definition 6.5. Sei T eine temperierte Distribution. Die Fourriertransformierte von T wird definiert als das lineare Funktional $\hat{T}$ auf $\mathcal{S}$ gegeben als

$$\hat{T}(\varphi) = T(\hat{\varphi})$$

Bemerkung 6.6. $\hat{T}$ ist ebenfalls eine temperierte Distribution. •

6.2 Symbolklassen, Pseudodifferentialoperatoren und asymptotische Entwicklung

Wir erinnern an die Definition eines linearen Differentialoperators

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha, \tag{6.1}$$

mit $\alpha \in \mathbb{N}^{(n)}$ und $a_\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Das zugehörige Symbol war definiert als

$$P(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha, \tag{6.2}$$

mit $\xi \in \mathbb{R}^n$. Wir wollen nun eine alternative Repräsentation des Operators $P(x, D)$ erhalten. Sei $\varphi \in \mathcal{S}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
(P(x, D)\varphi)(x) &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x)(D^\alpha \varphi)(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x)(\widehat{D^\alpha \varphi})\check{}(x) \\
&= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x)(\xi^\alpha \hat{\varphi})\check{}(x) \\
&= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x)(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \xi^\alpha \hat{\varphi}(\xi) d\xi \\
&= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \right) \hat{\varphi}(\xi) d\xi \\
&= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} P(x, \xi) \hat{\varphi}(\xi) d\xi.
\end{aligned}$$

Damit haben wir den partiellen Differentialoperator $P(x, D)$ mit Hilfe seines Symbols und der Fouriertransformation dargestellt. Diese Darstellung legt nahe, dass wir allgemeinere Operatoren als Differentialoperatoren bekommen können, wenn wir das Symbol $P(x, \xi)$ durch allgemeinere Symbole $\sigma(x, \xi)$, die keine Polynome in ξ mehr sind, ersetzen. Die Operatoren die man so erhält, werden Pseudodifferentialoperatoren genannt. Um eine brauchbare Klasse von Operatoren zu erhalten ist es notwendig, bestimmte Bedingungen an die Funktionen $\sigma(x, \xi)$ zu stellen. Viele verschiedene Bedingungen wären möglich, die zu verschiedenen Klassen von Pseudodifferentialoperatoren führen würden. Hier behandeln wir folgende Klasse

Definition 6.7 (Symbolklasse)**.** Sei $m \in (-\infty, \infty)$. Wir definieren S^m als die Menge aller Funktionen $\sigma(x,\xi)$ aus $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, sodass für alle Multiindizes α und β eine positive Konstante $C_{\alpha,\beta}$ existiert, für die gilt:

$$\left|(D_x^\alpha D_\xi^\beta \sigma)(x,\xi)\right| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\beta|}, \quad x,\xi \in \mathbb{R}^n.$$

Jede Funktion σ in $\bigcup_{m\in\mathbb{R}} S^m$ wird Symbol genannt.

Definition 6.8. Sei σ ein Symbol. Der *Pseudodifferentialoperator* T_σ ist definiert durch

$$(T_\sigma \varphi)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \sigma(x,\xi)\hat{\varphi}(\xi) d\xi, \quad \varphi \in \mathcal{S}. \tag{6.3}$$

Beispiel 6.9. Sei $\sigma(\xi) = (1+|\xi|^2)^{m/2}, -\infty < m < \infty$. Dann ist $\sigma \in S^m$ und T_σ ist ein Pseudodifferentialoperator. •

Lemma 6.10. Sei f ein stetige Funktion so, dass

$$\exists N : \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{(1+|x|)^N} dx < \infty \quad \textit{und} \tag{6.4}$$

$$T_f(\varphi) = 0, \quad \varphi \in \mathcal{S}. \tag{6.5}$$

Dann gilt $f \equiv 0$ in $\mathbb{R}^n$

Satz 6.11 (Identitätssatz)**.** Seien $\sigma, \tau \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ wenn gilt,

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : T_\sigma(\varphi) = T_\tau(\varphi) \quad \textit{dann folgt} \quad \sigma \equiv \tau.$$

Beweis. Die Annahme liefert unmittelbar

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \left[\sigma(x,\xi) - \tau(x,\xi)\right] \hat{\varphi}(\xi) d\xi = 0, \ \varphi \in \mathcal{S}.$$

Da die Fouriertransformation von $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{S}$ bijektiv ist, folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \left[\sigma(x,\xi) - \tau(x,\xi)\right] \varphi(\xi) d\xi = 0, \ \varphi \in \mathcal{S}.$$

Für jedes fixe $x \in \mathbb{R}^n$, ist $e^{ix\cdot\xi}\left[\sigma(x,\xi) - \tau(x,\xi)\right]$ stetig und erfüllt (6.4). Lemma 6.10 liefert somit $e^{ix\cdot\xi}\left[\sigma(x,\xi) - \tau(x,\xi)\right] = 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$. Da x fix aber beliebig ist folgt, dass $\sigma(x,\xi) - \tau(x,\xi) = 0$ für alle $x, \xi \in \mathbb{R}^n$. Somit gilt $\sigma = \tau$. ■

Satz 6.12. Sei $\sigma \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Dann gilt:

$$\varphi \in \mathcal{S} \Rightarrow T_\sigma(\varphi) \in \mathcal{S}.$$

Beweis. Sei $\varphi \in \mathcal{S}$. Dann müssen wir für alle Multiindizes α und β zeigen, dass

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha \left(D^\beta \left(T_\sigma\varphi\right)\right)(x)\right| < \infty$$

Unter Verwendung der partiellen Integration und der Leibnitzformel erhalten wir

$$
\begin{aligned}
x^\alpha \left(D^\beta \left(T_\sigma \varphi\right)\right)(x) &= x^\alpha (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} D_x^\beta (e^{ix\cdot\xi}\sigma(x,\xi))\hat{\varphi}(\xi)d\xi \\
&= x^\alpha (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\gamma\leq\beta} \binom{\beta}{\gamma} \xi^\gamma e^{ix\cdot\xi}(D_x^{\beta-\gamma}\sigma)(x,\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\gamma\leq\beta} \binom{\beta}{\gamma} \xi^\gamma (D_\xi^\alpha e^{ix\cdot\xi})(D_x^{\beta-\gamma}\sigma)(x,\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi \\
&= \frac{(-1)^{|\alpha|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\gamma\leq\beta} \binom{\beta}{\gamma} e^{ix\cdot\xi} \\
&\quad D_\xi^\alpha \left\{(D_x^{\beta-\gamma}\sigma)(x,\xi)\xi^\gamma\hat{\varphi}(\xi)\right\} d\xi \\
&= \frac{(-1)^{|\alpha|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\gamma\leq\beta}\sum_{\delta\leq\alpha} \binom{\beta}{\gamma}\binom{\alpha}{\delta} e^{ix\cdot\xi} \qquad (6.6) \\
&\quad \left(D_\xi^{\alpha-\delta} D_x^{\beta-\gamma}\sigma\right)(x,\xi) D_\xi^\delta(\xi^\gamma\hat{\varphi}(\xi))d\xi.
\end{aligned}
$$

Verwenden wir nun (6.6) und die Tatsache, dass σ ein Symbol (z.B $\sigma \in S^m$) ist, so können wir eine positive Konstante $C_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ finden, sodass

$$
\begin{aligned}
&\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha \left(D^\beta \left(T_\sigma\varphi\right)\right)(x)\right| \qquad (6.7) \\
\leq\ & \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \sum_{\gamma\leq\beta}\sum_{\delta\leq\alpha} \binom{\beta}{\gamma}\binom{\alpha}{\delta} C_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^{m-|\alpha|+|\delta|} |D_\xi^\delta(\xi^\gamma\hat{\varphi}(\xi))| d\xi.
\end{aligned}
$$

Da $\varphi \in \mathcal{S}$, folgt nun aus (6.7), dass

$$
\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha \left(D^\beta \left(T_\sigma\varphi\right)\right)(x)\right| < \infty
$$

und damit ist der Beweis komplett, wenn wir das Austauschen der Ordnung der Differentiation und Integration in (6.6) rechtfertigen können. Unter Anwendung derselben Argumentation wie in der Ableitung von (6.7) sehen wir, dass das letzte Integral in (6.6) absolut konvergent ist. ■

Bemerkung 6.13. T_σ bildet also den Schwartzraum $\mathcal{S}$ in sich selbst ab. •

Definition 6.14 (Asymptotische Entwicklung eines Symbols)**.** Sei $\sigma \in S^m$. Wenn wir ein $\sigma_j \in S^{m_j}$ finden können, mit

$$
m = m_0 > m_1 > m_2 > \ldots > m_j \to -\infty, \quad j \to \infty,
$$

so, dass

$$
\sigma - \sum_{j=0}^{N-1} \sigma_j \in S^{m_N}
$$

für alle positiven ganzen Zahlen N, dann nennen wir $\sum_{j=0}^\infty \sigma_j$ eine asymptotische Entwicklung von σ und wir schreiben

$$
\sigma \sim \sum_{j=0}^\infty \sigma_j
$$

Satz 6.15. Sei $m = m_0 > m_1 > m_2 > \ldots > m_j \to -\infty$, für $j \to \infty$ und $\sigma_j \in S^{m_j}$. Dann gibt es ein Symbol $\sigma \in S^{m_0}$ so, dass $\sigma \sim \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j$. Ist τ ein anderes Symbol mit derselben asymptotischen Entwicklung, dann gilt $\sigma - \tau \in \bigcap_{m\in\mathbb{R}} S^m$.

Bemerkung 6.16. Sei $m_1 > m_2$ dann ist $S^{m_1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \subset S^{m_2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. •

Bemerkung 6.17. $\beta \in \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ heißt (und ist) unendlich oft glättend. •

6.3 Partition der Eins, Lokalisierung im Frequenzbereich

Satz 6.18 (Partition der Eins)**.** Es existiert eine Folge $(\varphi_k)_{k=0}^{\infty}$ in $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ sodass

- $0 \leq \varphi_k(x) \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}^n,$
- bei jedem $x \in \mathbb{R}^n$, ist mindestens eines, aber höchstens drei der φ_k ungleich null,
- $\operatorname{supp}(\varphi_0) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 2\}$,
- $\operatorname{supp}(\varphi_k) \subseteq \left\{x \in \mathbb{R}^n : 2^{k-2} \leq |x| \leq 2^{k+1}\right\}, \quad k = 1, 2, \ldots,$
- für jeden Multiindex α, gibt es eine Konstante $A_\alpha > 0$ sodass $\forall k \in \mathbb{N}_0 : \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \varphi_k(x)| \leq A_\alpha 2^{-k|\alpha|}$

Definition 6.19. Sei $\sigma \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ und $k \in \mathbb{N}_0$, dann schreiben wir:

$$\sigma_k(x,\xi) := \sigma(x,\xi)\varphi_k(\xi), \tag{6.8}$$

$$K_k(x,z) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iz\cdot\xi} \sigma_k(x,\xi) d\xi = \sigma_k(x,\cdot)\check{}(z), \tag{6.9}$$

wobei φ_k eine Partition der Eins der Bauart von Satz 6.18 ist.

Satz 6.20. Sei $\sigma \in S^m$, dann gilt:

$$\forall N \in \mathbb{N}\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^{(n)} \exists A = A(m,n,\alpha,\beta) :$$

(a) $\forall k \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}^n : \left\| |z|^N \partial_x^\beta \partial_z^\alpha K_k(x,\cdot) \right\|_{L^1(dz)} \leq A 2^{k(m+|\alpha|-N)}$

(b) $\forall k \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}^n : \left\| |z|^N \partial_x^\beta \partial_z^\alpha K_k(x,\cdot) \right\|_{L^2(dz)} \leq A^{\frac{1}{2}} 2^{k(\frac{n}{2}+m+|\alpha|-N)}$

Beweis. Wir beweisen zuerst (b).
Folgende Ungleichung werden wir im Beweis benützen:

$$|z|^{2N} \leq n^N \sum_{|\gamma|=N} |z^\gamma|^2, \quad z \in \mathbb{R}^n. \tag{6.10}$$

Sei γ ein Multiindex. Mit (6.8), (6.9), dem Satz von Plancherel, dem Satz von Leibniz und Satz 6.18 folgt:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} |z^\gamma (\partial_x^\beta \partial_z^\alpha K_k)(x,z)|^2 dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left|\partial_\xi^\gamma \left\{\xi^\alpha (\partial_x^\beta \sigma_k)(x,\xi)\right\}\right|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \sum_{\gamma' \leq \gamma} \binom{\gamma}{\gamma'} \partial_\xi^{\gamma'} \left\{\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)\right\} \left(\partial_\xi^{\gamma-\gamma'} \varphi_k\right)(\xi) \right|^2 d\xi
\end{aligned}$$

$\partial_\xi^{\gamma-\gamma'} \varphi_k(\xi)$ hat als Träger eine Teilmenge von

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n : 2^{k-1} \leq |x| \leq 2^{k+1}\right\} = W_k.$$

Damit können wir das Integral auf W_k betrachten. Aus Satz 6.18 folgt

$$\partial_\xi^{\gamma-\gamma'} \varphi_k(\xi) \leq 2^{-k(|\gamma|-|\gamma'|)}.$$

Da $\partial_x^\beta \sigma(x,\xi) \in S^m$ gilt $\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi) \in S^{m+|\alpha|}$ und somit folgt für eine Konstante C_1

$$\partial_\xi^{\gamma'} \left\{\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)\right\} \leq C_1 (1+|\xi|)^{m+|\alpha|-|\gamma'|} \leq C_1 (2^k)^{m+|\alpha|-|\gamma'|}$$

Insgesamt folgt nun für Konstanten C_2, C_3 und A.

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} |z^\gamma (\partial_x^\beta \partial_z^\alpha K_k)(x,z)|^2 dz \\
&\leq \int_{W_k} \left\{ \sum_{\gamma' \leq \gamma} \binom{\gamma}{\gamma'} C_2 2^{(k+2)(m+|\alpha|-|\gamma'|)} 2^{-k(|\gamma|-|\gamma'|)} \right\}^2 d\xi \\
&= C_3 \cdot 2^{2k(m+|\alpha|-|\gamma|)} \int_{W_k} \left\{ \sum_{\gamma' \leq \gamma} \binom{\gamma}{\gamma'} \right\}^2 d\xi \\
&\leq A \cdot 2^{2k(m+|\alpha|-|\gamma|)} \underbrace{|W_k|}_{=2^{kn}} = A \cdot 2^{k(n+2m+2|\alpha|-2|\gamma|)}
\end{aligned}$$

Wir verwenden nun (6.10), für eine neue Konstante A_1 gilt:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} |z|^{2N} |(\partial_x^\beta \partial_z^\alpha K_k)(x,z)|^2 dz \\
&\leq n^N \sum_{|\gamma|=N} \int_{\mathbb{R}^n} |z^\gamma (\partial_x^\beta \partial_z^\alpha K_k)(x,z)|^2 dz \\
&\leq A_1 \cdot 2^{k(n+2m+2|\alpha|-2N)}
\end{aligned}$$

Jetzt ziehen wir die Wurzel und es folgt:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |z|^{2N} |(\partial_x^\beta \partial_z^\alpha K_k)(x,z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \leq A_2 \cdot 2^{k(\frac{n}{2}+m+|\alpha|-N)} \tag{6.11}$$

Damit ist Teil (b) des Satzes gezeigt.
Beweis von (a): Um Teil (a) aus Teil (b) abzuleiten wenden wir folgende Idee an:

$$\int |f| \leq \int |f \cdot g \cdot g^{-1}| \leq (\int |f \cdot g|^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (\int |g|^2)^{\frac{1}{2}}$$

Zunächst spalten wir das Integral auf:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |z|^N |(\partial_x^\beta \partial_z^\alpha K_k)(x,z)| dz = \int_{\{z:|z| \leq 2^{-k}\}} + \int_{\{z:|z|>2^{-k}\}} = A + B$$

Für eine Konstante C gilt nun, unter Verwendung der Cauchy-Schwarz Ungleichung und (6.11):

$$\begin{aligned} A &= \int 1_{\{|z| \leq 2^{-k}\}} |z|^N |(\partial_x^\beta \partial_z^\alpha K_k)(x,z)| dz \\ &\leq \left\{ \int 1_{\{|z| \leq 2^{-k}\}} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int |z|^{2N} |(\partial_x^\beta \partial_z^\alpha K_k)(x,z)|^2 dz \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \cdot (2^{-kn})^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{k(\frac{n}{2}+m+|\alpha|-N)} \leq C \cdot 2^{k(m+|\alpha|-N)} \end{aligned} \tag{6.12}$$

Wieder mit (6.11) erhalten wir:

$$\begin{aligned} B &= \int |z|^{N+n} \, |(\partial_x^\beta \partial_z^\alpha K_k)(x,z)| \, |z|^{-n} 1_{\{|z|>2^{-k}\}} dz \\ &\leq \left\{ \int |z|^{2(N+n)} \, |(\partial_x^\beta \partial_z^\alpha K_k)(x,z)|^2 dz \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{\{|z|>2^{-k}\}} |z|^{-2n} dz \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq A_2 \cdot 2^{k(\frac{n}{2}+m+|\alpha|-N-n)} \left\{ \int_{\{|z|>2^{-k}\}} |z|^{-2n} dz \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Nun transformieren wir das letzte Integral auf Polarkoordinaten und damit folgt für eine neue Konstante und D:

$$\begin{aligned} B &\leq D \cdot 2^{k(m+|\alpha|-N)} \cdot 2^{-k\frac{n}{2}} \left\{ \int_{2^{-k}}^\infty r^{-2n} r^{n-1} dr \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq D \cdot 2^{k(m+|\alpha|-N)} \cdot 2^{-k\frac{n}{2}} \left\{ \int_{2^{-k}}^\infty r^{n-1} dr \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{D}{\sqrt{n}} 2^{k(m+|\alpha|-N)} \cdot 2^{-k\frac{n}{2}} \cdot 2^{k\frac{n}{2}} \leq \overline{D} \cdot 2^{k(m+|\alpha|-N)} \end{aligned} \tag{6.13}$$

Aus (6.12) und (6.13) folgt Teil (a) des Satzes. ■

Satz 6.21 (Taylorformel)**.** Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, dann gilt für alle $N \in \mathbb{N}$ und $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$

$$f(\xi+\eta) = \sum_{|\alpha|<N} \frac{(\partial^\alpha f)(\xi)}{\alpha!} \eta^\alpha + N \cdot \sum_{|\gamma|=N} \frac{\eta^\gamma}{\gamma!} \int_0^1 (1-\theta)^{N-1} (\partial^\gamma f)(\xi+\theta\eta) \, d\theta$$

6.4 Produkt von Pseudodifferentialoperatoren

Satz 6.22. Seien $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma \in S^{m_1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $\tau \in S^{m_2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ und

$$T_\sigma(\varphi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\sigma(x,\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi$$

$$T_\tau(\varphi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\tau(x,\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi$$

Dann existiert ein Symbol $\lambda \in S^{m_1+m_2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ sodaß

$$T_\sigma(T_\tau(\varphi)) = T_\lambda(\varphi) \text{ für jede } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

und

$$\lambda(\cdot,\cdot) - \sum_{|\mu|<N} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!}\left(\partial_\xi^\mu\sigma(\cdot,\cdot)\partial_x^\mu\tau(\cdot,\cdot)\right) \in S^{m_1+m_2-N}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \tag{6.14}$$

für alle $N \in \mathbb{N}$ oder

$$\lambda \sim \sum_\mu \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!}(\partial_\xi^\mu\sigma)(\partial_x^\mu\tau).$$

Bemerkung 6.23.

1. Wenn τ nicht von x abhängt, d.h. $\tau(x,\xi) = \tau(\xi)$, dann ist $\lambda(x,\xi) = \sigma(x,\xi)\tau(\xi)$.
2. Der führende Term der asymptotischen Entwicklung ist $\sigma(x,\xi)\tau(x,\xi)$, also gilt
$$\lambda - \sigma\tau \in S^{m_1+m_2-1}.$$
Wenn wir $\lambda_1 \in S^{m_1+m_2}$ als das Symbol von $T_\tau T_\sigma$ wählen, dann folgt aus $\lambda_1 - \sigma\tau \in S^{m_1+m_2-1}$ dass das Symbol von $T_\tau T_\sigma - T_\sigma T_\tau$ in $S^{m_1+m_2-1}$ ist. $T_\tau T_\sigma - T_\sigma T_\tau$ hat nämlich das Symbol
$$\lambda_1 - \lambda = (\lambda_1 - \tau\sigma) - (\lambda - \tau\sigma) \in S^{m_1+m_2-1}$$

•

Beweis von Satz 6.22. Sei $\sigma_k(x,\xi) = \sigma(x,\xi)\varphi_k(\xi)$, wobei φ_k ein Partition der Eins wie in Satz 6.18 ist. Dann gilt

$$T_{\sigma_k}\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\sigma_k(x,\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi.$$

Außerdem erhalten wir mit dem Satz von Lebesgue

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^\infty T_{\sigma_k}\varphi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\left(\sum_{k=0}^\infty \sigma_k(x,\xi)\right)\hat{\varphi}(\xi)d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\sigma(x,\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi \\ &= T_\sigma\varphi(x)\end{aligned}$$

Daher ist $\sum\limits_{k=0}^\infty T_{\sigma_k} = T_\sigma$ und $T_\sigma T_\tau = \sum\limits_{k=0}^\infty T_{\sigma_k}T_\tau$. Mit

$$K_k(x,z) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iz\cdot\xi}\sigma_k(x,\xi)d\xi$$

erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
T_{\sigma_k} T_\tau \varphi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \sigma_k(x,\xi) \{\widehat{T_\tau\varphi}(\xi)\} d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \sigma_k(x,\xi) \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\cdot\xi} T_\tau\varphi(y)dy \right\} d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi} \sigma_k(x,\xi) d\xi \right\} T_\tau\varphi(y)dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} K_k(x, x-y) T_\tau\varphi(y)dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} K_k(x, x-y) \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} e^{iy\cdot\eta} \tau(y,\eta)\hat{\varphi}(\eta)d\eta \right\} dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\eta} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(y-x)\cdot\eta} K_k(x,x-y)\tau(y,\eta)dy \right\} \hat{\varphi}(\eta)d\eta \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\eta} \lambda_k(x,\eta)\hat{\varphi}(\eta)d\eta.
\end{aligned}$$

Es folgt dass

$$T_\sigma T_\tau \varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\eta} (\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k(x,\eta)) \hat{\varphi}(\eta)d\eta$$

ein Pseudodifferentialoperator mit dem Symbol

$$\lambda(x,\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k(x,\eta) \tag{6.15}$$

ist, wobei

$$\lambda_k(x,\eta) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz\cdot\eta} K_k(x,z)\tau(x-z,\eta)dz. \tag{6.16}$$

Dies folgt von $\lambda_k(x,\eta) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(y-x)\cdot\eta} K_k(x,x-y)\tau(y,\eta)dy$, nachdem wir $y = x - z$ setzen. Es bleibt zu zeigen, dass λ die asymptotische Entwicklung (6.14) hat. Wir bemerken, dass für beliebiges natürliches N folgende Identität gilt

$$\begin{aligned}
\lambda - \sum_{|\mu|<N} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!} (\partial_\xi^\mu \sigma)(\partial_x^\mu \tau) = \lambda - &\sum_{|\mu|<N_1} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!} (\partial_\xi^\mu \sigma)(\partial_x^\mu \tau) + \\
&\sum_{N\le|\mu|<N_1} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!} (\partial_\xi^\mu \sigma)(\partial_x^\mu \tau)
\end{aligned}$$

wobei N_1 eine beliebige natürliche Zahl größer als N ist. Es gilt außerdem

$$\sum_{N\le|\mu|<N_1} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!} (\partial_\xi^\mu \sigma)(\partial_x^\mu \tau) \in S^{m_1+m_2-N}$$

d.h. damit die asymptotische Entwicklung (6.14) gilt, müssen wir zeigen, dass es für alle Multiindizes α und β eine Konstante $C_{\alpha,\beta} > 0$ gibt, sodass

$$\begin{aligned}
&\left| \left\{ D_x^\alpha D_\xi^\beta [\lambda - \sum_{|\mu|<N_1} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!} (\partial_\xi^\mu \sigma)(\partial_x^\mu \tau)] \right\} (x,\xi) \right| \\
&\qquad \le C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m_1+m_2-N-|\beta|}
\end{aligned} \tag{6.17}$$

Als erstes finden wir einen gleichwertigen Ausdruck für

$$\lambda - \sum_{|\mu|<N_1} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!} (\partial_\xi^\mu \sigma)(\partial_x^\mu \tau),$$

wobei λ gegeben ist durch (6.15) und (6.16). τ hat die Taylorentwicklung

$$\tau(x-z,\eta) = \sum_{|\eta|<N_1} \frac{(-z)^\mu}{\mu!} (\partial_x^\mu \tau)(x,\eta) + R_{N_1}(x,z,\eta)$$

wobei

$$R_{N_1}(x,z,\eta) = N_1 \sum_{|\eta|=N_1} \frac{(-z)^\mu}{\mu!} \int_0^1 (1-\theta)^{N_1-1} (\partial_x^\mu \tau)(x-\theta z,\eta) d\theta \tag{6.18}$$

Setzen wir in die Taylorformel in (6.16) ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\lambda_k(x,\eta) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz\cdot\eta} K_k(x,z) \sum_{|\eta|<N_1} \frac{(-z)^\mu}{\mu!} (\partial_x^\mu \tau)(x,\eta) dz + T_{N_1}^k(x,\eta) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \sum_{|\eta|<N_1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz\cdot\eta} K_k(x,z) \frac{(-z)^\mu}{\mu!} dz \right) (\partial_x^\mu \tau)(x,\eta) + T_{N_1}^k(x,\eta) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \sum_{|\eta|<N_1} \frac{1}{\mu!} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz\cdot\eta} K_k(x,z)(-z)^\mu dz \right) (\partial_x^\mu \tau)(x,\eta) + T_{N_1}^k(x,\eta)
\end{aligned}$$

wobei

$$T_{N_1}^k(x,\eta) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz\cdot\eta} K_k(x,z) R_{N_1}(x,z,\eta) dz$$

Wir folgern weiter, dass

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz\cdot\eta} K_k(x,z)(-z)^\mu dz &= (K_k(x,z) z^\mu)\hat{} = \\
&= ((\sigma_k(x,\eta)\check{}(x,z)(-z)^\mu)\hat{} = (D_\eta^\mu \sigma_k)(x,\eta) = \\
&= (-i)^{|\mu|} (\partial_\eta^\mu \sigma_k)
\end{aligned}$$

also

$$\lambda_k(x,\eta) = \sum_{|\eta|<N_1} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!} (\partial_\eta^\mu \sigma_k)(x,\eta)(\partial_x^\mu \tau)(x,\eta) + T_{N_1}^k(x,\eta). \tag{6.19}$$

In Folge dessen, durch einsetzen von (6.19) in (6.16) und wenn wir noch beachten, dass $\sigma_k(x,\xi) = \sigma(x,\xi)\varphi_k(\xi)$, erhalten wir

$$\lambda(x,\xi) - \sum_{|\mu|<N_1} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!} (\partial_\xi^\mu \sigma)(\partial_x^\mu \tau) = \sum_{k=0}^\infty T_{N_1}^k.$$

Um (6.17) zu zeigen, müssen wir $D_x^\alpha D_\xi^\beta T_{N_1}^k$ mit $k \in \mathbb{N}$ berechnen und formulieren dazu das

Lemma 6.24. Für jedes $M \in \mathbb{N}$ gibt es eine Konstante $C_{\alpha,\beta,M,N_1} > 0$, sodass für alle $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left| (D_x^\alpha D_\xi^\beta T_{N_1}^k)(x,\xi) \right| \leq C_{\alpha,\beta,M,N_1} (1+|\xi|)^{m_2-2M} 2^{(m_1+2M-N_1)k}.$$

Für den Moment nehmen wir an, Lemma 6.24 wäre bewiesen. Wenn $N \in \mathbb{N}$ dann beliebig ist, können wir für alle Multiindizes α und β eine Konstante $M \in \mathbb{N}$ so wählen, dass für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$(1+|\xi|)^{m_2-2M} \leq (1+|\xi|)^{m_1+m_2-N-|\beta|}.$$

Für dieses M wählen wir dann $N_1 \in \mathbb{N}$ sodass

$$m_1 + 2M - N_1 < 0.$$

Also haben wir nach Lemma 6.24

$$\left| \left\{ D_x^\alpha D_\xi^\beta [\lambda - \sum_{|\mu|<N_1} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!} (\partial_\xi^\mu \sigma)(\partial_x^\mu \tau)] \right\} (x,\xi) \right| \\ \leq \sum_{k=0}^\infty C_{\alpha,\beta,M,N_1} (1+|\xi|)^{m_1+m_2-N-|\beta|} 2^{(m_1+2M-N_1)k}.$$

Mit der Bezeichnung

$$C_{\alpha,\beta} = C_{\alpha,\beta,M,N_1} \sum_{k=0}^\infty 2^{(m_1+2M-N_1)k}$$

kommen wir zur Schlussfolgerung

$$\left| \left\{ D_x^\alpha D_\xi^\beta [\lambda - \sum_{|\mu|<N_1} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!} (\partial_\xi^\mu \sigma)(\partial_x^\mu \tau)] \right\} (x,\xi) \right| \\ \leq C_{\alpha,\beta} (1+|\xi|)^{m_1+m_2-N-|\beta|}.$$

Das ist aber (6.17), und der Beweis ist hiermit vollständig, bis auf den ■

Beweis von Lemma 6.24. Wir beweisen als erstes dass es für alle Multiindizes α, β, γ eine Konstante $C_{\alpha,\beta,\gamma} > 0$ gibt, sodass für alle $x, z, \xi \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\left| (\partial_z^\gamma \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta R_{N_1})(x,z,\xi) \right| \leq C_{\alpha,\beta,\gamma} \left[\sum_{\gamma' \leq \gamma} z^{N_1-|\gamma'|} \right] (1+|\xi|)^{m_2-|\beta|} \tag{6.20}$$

Mit (6.18) erhalten wir

$$(\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta R_{N_1})(x,z,\xi) = N_1 \sum_{|\mu|=N_1} \frac{(-z)^{|\mu|}}{\mu!} \int_0^1 (1-\theta)^{N_1-1} (\partial_x^{\alpha+\mu} \partial_\xi^\beta \tau)(x-\theta z, \xi) d\theta.$$

Also, wenn wir die Leibniz-Formel benutzen

$$(\partial_z^\gamma \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta R_{N_1})(x,z,\xi) = N_1 \sum_{|\mu|=N_1} \sum_{\gamma' \leq \gamma} \binom{\gamma}{\gamma'} \frac{1}{\mu!} \{\partial_z^{\gamma'} (-z)^\mu\} \int_0^1 (1-\theta)^{N_1-1} \\ (\partial_x^{\gamma-\gamma'+\alpha+\mu} \partial_\xi^\beta \tau)(x-\theta z, \xi)(-\theta)^{|\gamma-\gamma'|} d\theta.$$

Weil $|x^\alpha| \leq |x|^{|\alpha|}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle Multiindezes α gilt und weil $\tau \in S^{m_2}$, gibt es Konstanten $C_{\gamma'} > 0$ und $C_{\alpha,\beta,\gamma',\mu} > 0$, sodass

$$\left| (\partial_z^\gamma \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta R_{N_1})(x,z,\xi) \right| \leq N_1 \sum_{|\mu|=N_1} \sum_{\gamma' \leq \gamma} \binom{\gamma}{\gamma'} C_{\gamma'} |z|^{N_1-|\gamma'|} \\ \int_0^1 C_{\alpha,\beta,\gamma',\mu} (1+|\xi|)^{m_2-|\beta|} d\theta.$$

Mit der Bezeichnung

$$C_{\alpha,\beta,\gamma} = N_1 \sum_{|\mu|=N_1} \sup_{\gamma'\leq\gamma} \left\{ \binom{\gamma}{\gamma'} C_{\gamma'} C_{\alpha,\beta,\gamma',\mu} \right\}$$

kann das als

$$\left|(\partial_z^\gamma \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta R_{N_1})(x,z,\xi)\right| \leq C_{\alpha,\beta,\gamma} \left[\sum_{\gamma'\leq\gamma} z^{N_1-|\gamma'|} \right] (1+|\xi|)^{m_2-|\beta|}$$

geschrieben werden.
Nun folgt der Ausdruck aus Lemma 6.24 mittels der Leibniz-Formel und partieller Integration. ■

6.5 Die Adjungierte eines Pseudodifferentialoperators

Definition 6.25.
- Für $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definieren wir die Sesquilinearform

$$(\varphi,\psi) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\overline{\psi(x)}dx$$

.

- Sei $m \in \mathbb{R}$, $\sigma \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ und T_σ ein Pseudodifferentialoperator. Wenn ein Operator $T_\sigma^* : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ existiert, sodass

$$(T_\sigma^*\psi, \varphi) = (\psi, T_\sigma\varphi) \quad \forall\ \varphi,\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

dann heisst T_σ^* die *Adjungierte* von T_σ.

Bemerkung 6.26. Wenn $\sigma(x,\xi)$ ein Polynom in ξ ist, dann gilt $T_\sigma^* = T_{\bar\sigma}$. •

Bezüglich der Existenz und des Aussehens von T_σ^* gilt der folgende

Satz 6.27. Für alle $\sigma \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ existiert ein $\tau \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ sodass $T_\tau = T_\sigma^*$ Außerdem gilt für alle $N \in \mathbb{N}$

$$\tau(x,\xi) - \sum_{|\mu|<N} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!} \left(\partial_x^\mu \partial_\xi^\mu \overline{\sigma}\right)(x,\xi) \in S^{m-N}$$

Bemerkung 6.28. Wenn $\sigma(x,\xi) = \sigma(\xi)$, dann ist $\tau(x,\xi) = \bar\sigma(\xi)$.
Wenn $N = 1$, dann ist $\tau(x,\xi) - \bar\sigma(x,\xi) \in S^{m-1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. •

6.6 Elliptische Pseudodifferentialoperatoren. Existenz einer Parametrix

Definition 6.29. Sei $m \in \mathbb{R}$. Ein Symbol $\sigma \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ heißt elliptisch, wenn es ein $c > 0$ und ein $R > 0$ gibt, sodass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $|\xi| > R$ gilt

$$|\sigma(x,\xi)| \geq c(1+|\xi|)^m.$$

Satz 6.30. Seien $m \in \mathbb{R}$, $\sigma \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ elliptisch und T_σ ein Pseudodifferentialoperator. Dann existieren $\tau \in S^{-m}$ und $\delta, \rho \in \bigcap_{k\in\mathbb{R}} S^k$ sodass

$$T_\sigma T_\tau = \mathrm{Id} + T_\delta$$
$$T_\tau T_\sigma = \mathrm{Id} + T_\rho$$

Bemerkung 6.31. Satz 6.30 besagt also, dass ein elliptischer Pseudodifferentialoperator T_σ invertiert werden kann mit Fehlertermen T_δ und T_ρ mit $\delta, \rho \in \bigcap_{k\in\mathbb{R}} S^k$. Dies sind die unendlich glättenden Symbole und aus diesem Grund wird T_τ *approximierende Inverse* oder *Parametrix* genannt. •

6.7 L^p-Beschränktheit von Pseudodifferentialoperatoren

Satz 6.32. Sei $\sigma \in \bigcup_{k\in\mathbb{R}} S^k$ und T_σ ein Pseudodifferentialoperator. Dann ist $T_\sigma : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ stetig, d. h. wenn $\varphi_k \to 0$ in $\mathcal{S}$, dann gilt auch $T_\sigma \varphi_k \to 0$ in $\mathcal{S}$ für $k \to \infty$.

Definition 6.33. Sei $\sigma \in \bigcup_{k\in\mathbb{R}} S^k$. Dann kann man den Definitionsbereich eines Pseudodifferentialoperators folgendermaßen auf die temperierten Distributionen ausdehnen. $T_\sigma : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ ist definiert durch

$$(T_\sigma u)(\varphi) := u(\overline{T_\sigma^* \overline{\varphi}}), \quad \forall u \in \mathcal{S}'.$$

wobei T_σ^* die Adjungierte von T_σ ist.

Satz 6.34. Sei $\sigma \in \bigcup_{k\in\mathbb{R}} S^k$ und T_σ ein Pseudodifferentialoperator auf den temperierten Distributionen. Dann ist $T_\sigma : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ stetig.

Satz 6.35. Sei $\sigma \in S^0$ und $1 < p < \infty$. Dann ist $T_\sigma : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ stetig.

Definition 6.36. Seien $1 < p < \infty$ und $-\infty < s < \infty$. Die Räume

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^n) := \{u \in \mathcal{S}' : ((1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}(\xi))^{\check{}} \in L^p(\mathbb{R}^n)\}$$

heißen Sobolevräume.

Satz 6.37. Seien $m \in \mathbb{R}$, $\sigma \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ und $-\infty < s < \infty$. Dann ist $T_\sigma : W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \to W^{s-m,p}(\mathbb{R}^n)$ stetig.

Literatur

[1] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Grad. Stud. Math., vol. 19, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

[2] L. C. Evans, *Weak Convergence Methods for Nonlinear Partial Differential Equations*, CBMS #74, Amer. Math. Soc., 1990

[3] M. W. Wong, *An Introduction to Pseudo Differential Operators*, 2nd ed., World Scientific Publishing, 1999