Thema 10—Gewöhnliche Differentialgleichungen

Viele Naturgesetze stellen eine Beziehung zwischen einer physikalischen Größe und ihren Ableitungen (etwa als Funktion der Zeit) dar:

Beispiele.

1. $\ddot{x} = -g$ (freier Fall);
2. $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$ (Hookesches Gesetz);
3. $m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = 0$ (gedämpfte Schwingungen);
4. $\frac{dA}{dt} = V_1 k - V_1 \frac{A}{V}$ (Mischung von Flüssigkeiten);
5. $\frac{dP}{dt} = P(a - bP)$ (logistische Gleichung);
6. $L\frac{di}{dt} + Ri = V(t)$ (Schaltkreisgleichung).

Daher die Aufgabe: Gegeben sei eine Beziehung zwischen einer Funktion f und ihren Ableitungen. Bestimme alle Funktionen, die diese Beziehung erfüllen. Solche Aufgaben heißen **gewöhnliche Differentialgleichungen** (gewöhnlich, weil es sich um Funktionen *einer* Variablen handelt).

Beispiele.

1. $\frac{d^2f}{dt^2} = -b$ oder $\frac{d^2y}{dx^2} = -b$ oder $y'' = -b$;
2. $a\frac{d^2f}{dx^2} + b\frac{df}{dx} + cf = 0$ (oder $ay'' + by' + cy = 0$);
3. $a\frac{d^2y}{dx^2} = -kf$ (oder $a\frac{d^2f}{dx} = -ky$ oder $ay'' = -ky$);
4. $y' = a - by$;
5. $y' = y(a - by)$;
6. $ay' + by = f(t)$.

Man unterscheidet zwischen:

a) **impliziten Gleichungen** wie $\sin(y') = y$ oder $y'y = (y')^2$ und

b) **expliziten Gleichungen** wie $y' = y^2 \exp y$.

Die **Ordnung** der Gleichung ist der Index der höchsten Ableitung, die vorkommt:
Beispiele. $(y')^2 - xy + y = 0$ (implizit, Ordnung 1);
$(2yy' - (y')^2 \ln(y'')x^2 + y^2 = 0$ (implizit, Ordnung 2);
$y'' + (e^{2y} + x)(y')^2 = 0$ (explizit, Ordnung 2).

Explizite Differenzialgleichungen erster Ordnung

Solche Gleichungen haben die Gestalt:

$$y' = f(x, y)$$

(f eine Funktion von zwei Variablen).
Beispiele.

$$\begin{aligned} y' &= x \quad (\text{Lösung } y = \frac{x^2}{2} + c); \\ y' &= -y^2 \quad (\text{Lösung } \frac{1}{(x-c)}); \\ y' &= \frac{4y}{x} \quad (\text{Lösung } y = cx^4). \end{aligned}$$

Im allgemeinen haben solche Gleichungen unendlich viele Lösungen — genauer, eine Lösungsschar mit **einem** freien Parameter. Eindeutigkeit der Lösung wird durch die Festsetzung einer Anfangsbedingung erreicht.
Beispiele. $y' = x, y = 0$ für $x = 0$. Die eindeutige Lösung ist $y = \frac{x^2}{2}$;
$y' = -y^2, y = 5$ für $x = 1$. Die eindeutige Lösung ist $y = \frac{1}{(x-\frac{4}{5})}$.
Wir betrachten einige einfache Arten von Gleichungen, für die es möglich ist, explizite Lösungen anzugeben:

I. Getrennte Variablen: Das sind Gleichungen der Gestalt:

$$y' = \frac{g(x)}{h(y)} \quad (h(y)\,dy = g(x)\,dx).$$

Man bekommt eine (implizite) Lösung der Gestalt:

$$H(y) = G(x) + x \quad (c \in \mathbf{R})$$

wobei H bzw. G eine Stammfunktionvon h bzw. g ist.
Beispiele. $y' = \frac{x-4}{x-3}$. Lösung $y = x + \ln \frac{1}{x-3} + c$

$$y' = y^2 - 4 \qquad y = 2\frac{1 + ce^{4x}}{1 - ce^{4x}}.$$

II. Lineare Gleichungen: Das sind Gleichungen der Gestalt:

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = a_2(x).$$

Falls a_0 keine Nullstellen hat, dann kann man die Gleichung in der Gestalt

$$y' + a(x)y = b(x)$$

schreiben.
Die Lösung ist dann $y = \exp(-A(x)[c + \int b(x) \exp A(x)\,dx])$, (wobei $A = \int a(x)\,dx$).
Beispiele.

$$\begin{aligned} y' + ((\tan x)y &= \sin x \\ \text{Lösung: } \quad xy' - 2y &= -x^2 \end{aligned}$$

III. Homogene Gleichungen: Das sind Gleichungen der Gestalt:

$$y' = f(x, y)$$

wobei f homogen ist (d.h. $f(tx, ty) = f(x, y)$). Mit Hilfe des Ansatzes $y = vx$ bekommt man die Gleichung

$$v' = \frac{(f(1, v) - v)}{x}$$

mit getrennten Variablen.
BEISPIEL. $y' = \frac{x^2+y^2}{xy-x^2}$ Lösung: $xe^{\frac{y}{x}} = c(y + x)$.
IV. Exakte Gleichungen: Das sind Gleichungen der Gestalt:

$$y' = \frac{-M(x, y)}{N(x, y)} \quad (Ndy + Mdx = 0)$$

wobei $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.
Dann gibt es eine Funktion F von zwei Variablen, sodaß

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = N$$

(nämlich $f(x, y) = \int M(x, y)dx + g(y)$). Die Lösungen sind dann implizit durch die Formel

$$f(x, y) = c$$

gegeben.
BEISPIEL. $y' = \frac{2xy}{1-x^2}$ Lösung: $y = \frac{c}{(x^2-1)}$.

Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Das sind Gleichungen der Gestalt:

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = g(x).$$

Sie spielen eine zentrale Rolle in der klassischen angewandten Mathematik:
BEISPIELE. $y'' - xy = 0$ (Airysche Gleichung)
$x^2y'' + xy' + (x^2 - p)y = 0$ (Besselsche Gleichung)
$(1 - x^2)y'' - xy' + p^2y = 0$ (Tschebyscheffsche Gleichung)
$x(1 - x)y'' + (c - (a + b + 1)x)y' - by = 0$ (Hypergeometrische Gleichung)
$y'' - 2xy' + 2py = 0$ (Hermitesche Gleichung)
$xy'' + (1 - x)y' + py = 0$ (Laguerresche Gleichung)
$(1 - x^2)y'' - 2xy' + p(p + 1) = 0$ (Legendresche Gleichung)
Man unterscheidet zwischen homogenen Gleichungen ($g = 0$) und inhomogenen Gleichungen ($g \neq 0$). Für homogene Gleichungen gilt das Superpositionsprinzip:

$$y_1, y_2 \text{ Lösungen } \Rightarrow c_1y_1 + c_2y_2 \text{ eine Lösung }.$$

Im allgemeinen gibt es zwei unabhängige Lösungen y_1, y_2. Jede Lösung hat die Gestalt $c_1y_1 + c_2y_2$ (zwei Lösungen y_1, y_2 sind unabhängig, falls die Wronkische Determinate

$$y_1(xy_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$$

nicht verschwindet).
Um die inhomogene Gleichung zu lösen, sucht man zunächst die allgemeine Lösung $c_1y_1+c_2y_2$ der homogenen Gleichung, zusammen mit einer partikulären Lösung y_3 der inhomogenen Gleichung. Die allgemeine Lösung ist dann $c_1y_1+c_2y_2+y_3$ (eine zwei-parametrige Lösungsschar).

Lösungsmethoden:

I. **Homogene Gleichungen mit konstanten Koeffizienten**:

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Man bestimmt zunächst die Nullstellen des Polynom $\lambda^2+a\lambda+b$. Es gibt drei Möglichkeiten:

a) zwei reelle Nullstellen $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Dann ist die allgemeine Lösung

$$c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

b) eine reelle Nullstelle λ_1: Dann ist die allgemeine Lösung

$$c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x}$$

c) zwei komplexe Nullstellen $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$. Die allgemeine Lösung ist

$$e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x).$$

Beispiele. $2y'' - 5y' - 3y = 0$; Lösung: $y = c_1 e^{\frac{-x}{2}} + c_2 e^{3x}$;
$y'' - 10y' + 2y = 0$; Lösung: $y = c_1 e^{5x} + c_2 x e^{5x}$;
$y'' + y' + y = 0$; Lösung: $y = e^{-x/2}\left(c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

II. **Unbestimmte Konstanten**: Eine Methode zur Bestimmung von einer partikulären Lösung für eine Gleichung mit konstanten Koeffizienten, wobei die rechte Seite aus elementaren Funktionen zusammengesetzt ist. In gewissen Fällen kann man eine Lösung durch Einsetzen von geeigneten elementaren Funktionen und einem Koeffizientenvergleich bekommen — siehe Tabelle ($p_n(x)$ ist ein Polynom von Grad n).

$f(x)$	y_p
$p_n(x)$	$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$
$e^x p_n(x)$	$e^x(a_n x^n + \cdots + a_0)$

$e^{\alpha x} \sin \beta x p_n(x)$ oder
$a^{\alpha x} \sin \beta x(a_n x^n + \cdots + a_0)$
$e^{\alpha x} \cos \beta x p_n(x) + e^{\alpha x} \cos \beta x(b_n x^n + \cdots + b_0)$

(WARNUNG: Diese Methode funktioniert nur dann, wenn kein Term der rechten Seite eine Lösung der homogenen Gleichung ist).

III. **Variation der Konstanten**: Sei

$$y'' + ay' + by = g(x)$$

eine Gleichung mit Lösung

$$c_1 y_1 + c_2 y_2$$

für die homogenen Gleichung. Wir suchen eine partikuläre Lösung der Gestalt

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2,$$

wobei v_1, v_2 Funktionen sind.
Wählen wir v_1, v_2, sodaß $v_1' y_1 + v_2' y_2' = 0$, $v_1' y_1' + v_2' y_2 = g$, so sehen wir, daß

$$y_p'' + a y_p' + b y_p = g.$$

Beispiele. $y'' - y' - 2y = 4x^2$. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}.$$

1. Methode — unbekannte Koeffizienten:

   Wir setzen $y_p = ax^2 + bx + c$ und bekommen das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2a - b - 2 &= 0 \\ -2a - 2b &= 0 \\ -2a &= 4 \end{aligned}$$

   Daraus folgt: $a = -2$, $b = 2$, $c = -3$ und die allgemeine Lösung ist: $c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} - 2x^2 + 2x - 3$.

2. Methode — Variation der Konstanten:

   Ansatz: $y_p = v_1 e^{2x} + v_2 e^{-x}$, wobei

$$\begin{aligned} v_1' e^{2x} + v_2' e^{-x} &= 0 \\ 2v_1' e^{2x} - v_2' e^{-x} &= 4x^2 \end{aligned}$$

   Daraus folgt: $v_1'(x) = \left(\frac{4}{3}\right) x^2 e^{-2x}, v_2'(x) = \left(-\frac{4}{3}\right) x^2 e^{x}$. Daher:

$$\begin{aligned} v_1(x) &= -\frac{1}{3} e^{-2x}(2x^2 + 2x + 1) \\ v_2(x) &= -\frac{4}{3} e^{x}(x^2 - 2x + 2) \end{aligned}$$

   also: $y_p = -2x^2 + 2x - 3$.

Potenzreihenmethoden

Die klassische Methode, lineare Gleichungen mit nicht konstanten Koeffizienten zu lösen, ist die des Potenzreihenansatzes:

Beispiel. Wir lösen die AIRYsche Gleichung

$$y'' - xy = 0.$$

Wir setzen voraus, daß die Lösung eine Taylorentwicklung $\sum_a x^n$ besitzt. Daraus folgt:

$$\sum_u (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n = 0.$$

Und daher:

$$2a_2 = 0, 2 \cdot 3 \cdot a_3 - a_0 = 0, \ldots, (3n+2)(3n+1)a_{3n+2} = a_{3n-1}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} a_{3n} &= \frac{(3n-2)(3n-5)\ldots 4 \cdot 1}{(3n)!} a_0 \\ a_{3n+1} &= \frac{(3n-1)(3n-4)\ldots 5 \cdot 2}{(3n+1)!} a_1 \\ a_{3n+2} &= 0 \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ist daher:

$$a_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)\ldots 4 \cdot 1}{(3n)!} x^{3n} \right) + a_1 \left(x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)\ldots 5 \cdot 1}{(3n+1)!} x^{3n+1} \right).$$

Ähnlicherweise zeigt man, daß die Legendre Gleichung

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0$$

die Lösung

$$\begin{aligned} y &= a_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{p(p-2)\ldots(p-2n+2)(p+1)\ldots(p+2n+1)}{(2n+1)!} x^{2n} \right) \\ &+ a_1 \left(x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(p-1)(p-3)\ldots(p-2n+1)(p+2)\ldots(p+2n)}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right) \end{aligned}$$

hat.

(Für $p \in \mathbf{N}$ sind diese Lösungen Polynome:

$$p_0 = 1, p_1(x) = x, p_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, p_3(x) = \frac{5}{4}x^3 - \frac{3}{2}x.)$$

Für die Gleichungen der Gestalt

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x) = 0$$

wobei $a(x), b(x)$ Polstellen der Ordnung ≤ 2 besitzt, verwendet man den Ansatz $x^\rho \sum a_n$ wobei ρ zu bestimmen ist.

Beispiel. Betrachte die Gleichung

$$x(1-x)y'' + \{\gamma - (\alpha+\beta+1)x\}y' - \alpha\beta\gamma = 0.$$

Singulärstellen $x = 0, 1$.
Ansatz: $x^\rho(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)$ führt zu der Gleichung

$$\rho(\rho-1+\gamma)a_0 x^{\rho-1} + \sum_u \{(\rho+n+1)(\rho+n+\gamma)a_{n+1} - (\rho+n+\alpha)(\rho+n+\beta)a_x\}x^{\rho+n} = 0.$$

Aus $\rho(\rho-1+\gamma) = 0$ folgt $\rho = 0$ oder $\rho = 1-\gamma$. Dann gilt:

$$a_{n+1} = \frac{(\rho+n+\alpha)(\rho+n+\beta)}{(\rho+n+1)(\rho+n+\gamma)}$$

$\rho = 0$ liefert die Lösung

$$\begin{aligned} a_0 \Bigg(1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}x &+ \frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{2(\gamma+1)}\frac{\alpha\beta}{\gamma}x^2 + \\ &+ \frac{(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha(\beta+2)(\beta+1)\beta}{3\cdot 2\cdot 1(\gamma+2)(\gamma+1)\gamma}x^3 + \dots \Bigg). \end{aligned}$$