Thema 11—Vektorwertige Funktionen, Kurven

Definition 1 *Eine* **Kurve** *in* $\mathbf{R}^n$ *ist eine stetige Abbildung auf einem Intervall* I *mit Werten in* $\mathbf{R}^n$.

Wir verwenden den Buchstaben c für Kurven und schreiben $c = (c_1, \ldots, c_n)$, wobei c_i die **Komponenten** von c sind.

Beispiele.

I. Die Kreislinie in $\mathbf{R}^2$ ist die Kurve

$$c(t) = (r \cos t, r \sin t)$$

mit Definitionsbereich $[0, 2\pi]$. Hier ist $r > 0$ der **Kreisradius**.

II. Eine **Gerade** in $\mathbf{R}^n$ ist eine Kurve der Form

$$c(t) = a + tb,$$

wobei $a, b \in \mathbf{R}^n$, $b \neq 0$.

III. Die Kurve mit Parametrisierung

$$c(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

heißt eine **Schraubenlinie** in $\mathbf{R}^3$.

Definition 2 *Falls* $c : I \to \mathbf{R}^n$, *sagen wir, daß* c **differenzierbar bzw. stetig differenzierbar** *ist, wenn das Gleiche gilt für jedes* c_i.

$$c' = (c_1', \ldots, c_n')$$

ist dann die **Ableitung** *von* c.
Ähnlicherweise sagen wir, daß c *integrierbar ist, falls dies für jedes* c_i *gilt und setzen dann*

$$\int_a^b c(t)\, dt = \left(\int_a^b c_1(t)\, dt, \ldots, \int_a^b c_n(t)\, dt \right).$$

In diesem Zusammenhang ist folgende Ungleichung wichtig:

$$\left| \int_a^b c(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |c(t)|\, dt.$$

($|\ |$ bezeichnet die Länge eines Vektors aus $\mathbf{R}^n$).
Beweis. Wir bemerken, daß das Integral $\int_a^b c(t)\, dt$ der Limes der Riemann-Summen

$$\sum_k c(\xi_k)(t_k - t_{k-1})$$

ist. Aus der Dreiecksungleichung folgt:

$$\left| \sum_k c(\xi_k)(t_k - t_{k-1}) \right| \leq \sum_k |c(\xi_k)|(t_k - t_{k-1}).$$

Die rechte Seite ist eine Riemann-Summe für $\int_a^b |c(t)|\, dt$.

■

BEISPIEL. Falls c und d diffenzierbar sind, dann auch die skalare Funktion $t \mapsto (c(t)|d(t))$, und es gilt:

$$\frac{d}{dt}(c(t)|d(t)) = (c'(t)|d(t)) + (c(t)|d'(t)).$$

(Beweis wie bei der Produktregel in $\mathbf{R}$).

Bogenlänge. Sei $c : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ ein Kurve. Man definiert die **Bogenlänge** von c wie folgt: Betrachte zunächst eine Unterteilung $\mathcal{P}$

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

und bilde die Summe

$$L_{\mathcal{P}} = \sum_{k=1}^{n} |c(t_i) - c(t_{i-1})|.$$

Die Kurve heißt **rektifizierbar** (mit der Bogenlänge L), falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für jede Unterteilung mit $\max |t_i - t_{i-1}| < \delta$ gilt

$$|L_{\mathcal{P}} - L| < \epsilon.$$

BEISPIEL. Falls die Kurve c stetig-differenzierbar ist (d.h. jede Komponente c_i ist stetig-differenzierbar), dann ist c rektifizierbar und es gilt:

$$L = \int_a^b |c'(t)|\, dt.$$

Als konkretes Beispiel berechnet man sofort, daß die Länge der Kreislinie mit Radius r gleich $2\pi r$ ist.

Der Tangentenvektor. Sei $c : I \to \mathbf{R}^n$ eine glatte Kurve. Falls $c'(t_0) \neq 0$, dann heißt t_0 ein **regulärer Punkt** der Kurve. Sonst ist t_0 ein **singulärer Punkt**. Z.B. Ist der Ursprung eine Singularität der Kurve $c(t) = (t^2, t^3)$ (Neilsche Parabel).
Die Kurve heißt **glatt**, falls jedes $t \in [a, b]$ ein regulärer Punkt ist.
Falls t_0 ein regulärer Punkt ist, dann ist

$$\mathbf{T}_c(t_0) = \frac{c'(t_0)}{|c'(t_0)|}$$

ein **Tangenteneinheitsvektor** zur Kurve im Punkt t_0. Die Gerade

$$t \mapsto c(t_0) + tc'(t_0)$$

ist dann die **Tangentialgerade** zur Kurve an der Stelle t_0.

Falls c und d Kurven sind, so daß $c(t_0) = d(t_1)$ (d.h. der entsprechende Punkt ist ein Schnittpunkt der Kurven), dann ist der **Schnittwinkel** von c und d an dieser Stelle der Winkel θ, wobei

$$\cos\theta = \frac{(c'(t_0)|d'(t_1))}{|c'(t_0)||d'(t_1)|}.$$

Definition 3 *(Parametertransformationen.) Seien* $c : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ *und* $d : [a_1, b_1] \to \mathbf{R}^n$ *zwei Kurven. Eine Parametertransformation zwischen c und d ist eine stetig-differenzierbare, bijektive Abbildung*

$$\phi : [a,b] \to [a_1, b_1]$$

mit $\phi'(t) \neq 0$ *für jedes* t*, so daß* $c = d \circ \phi$*. (Dann ist* ϕ^{-1} *auch stetig differenzierbar). Falls* $\phi'(t) > 0$ *für jedes* t*, dann heißt* ϕ **orientierungserhaltend***, sonst ist* ϕ **orientierungsumkehrend***.*

Bemerkung.

I. Falls ϕ orientierungserhaltend ist, dann gilt

$$\mathbf{T}_c(t) = \mathbf{T}_d(\phi(t)) \quad (t \in [a,b]).$$

(Für orientierungsumkehrende Abbildungen gilt:

$$\mathbf{T}_c(t) = -\mathbf{T}_d(\phi(t))).$$

II. Bogenlänge: Es gilt: $L(c) = L(d)$.

Bogenlängenparametrisierung. Sei c eine glatte stetig-differenzierbare Kurve. Wir schreiben

$$s = \phi(t) = \int_a^t |c'(u)| \, du.$$

ϕ ist eine Umparametrisierung und wir setzen $\gamma = c \circ \phi^{-1}$. Es gilt also $\gamma(s) = c(t)$. γ heißt die **Bogenlängenparametrisierung** von c. Für Kurven γ mit Bogenlängenparametrisierung gilt die einfache Formel $\mathbf{T}_\gamma(s) = \gamma'(s)$ für den Tangentenvektor.

Kurvenintegrale. Seien $a_1, \ldots, a_n$ stetige Funktionen auf einer Teilmenge U von $\mathbf{R}^n$, c eine stetig-differenzierbare Kurve in U. Wir definieren das **Kurvenintegral der ersten Art** $\int_c a_1(x)\, dx_1 + \cdots + a_n(x)\, dx_n$ als das Riemann-Integral:

$$\int_a^b [a_1(c(t))c_1'(t) + \cdots + a_n(c(t))c_n'(t)] \, dt.$$

(Andere Schreibweise: $\int_c \mathbf{X} \cdot d\mathbf{s}$, wobei X das Vektorfeld $(a_1, \ldots, a_n)$ ist).

Der Integrand

$$a_1 \, dx_1 + \cdots + a_n \, dx_n$$

des obigen Integrals heißt eine **Pfaffsche Differentialform**. Wir betrachten solche Formen hier als formale Ausdrücke, die über Kurven integriert werden. (Physikalische Veranschaulichung: Die Differentialform stellt etwa ein Kraftfeld dar, das Kurvenintegral ist die von einem Teilchen geleistete Arbeit, wenn es die Kurve durchläuft—für eine saubere begriffliche Erklärung siehe die Vorlesung “Differentialgeometrie”).

Ebene Kurven: Sei $c : I = [a,b] \to \mathbf{R}^2$ eine ebene Kurve. In diesem Spezialfall ist

$$s = \int_a^t \sqrt{(\dot{c}_1)^2 + (\dot{c}_2)^2} \, dt$$

die Bogenlänge von c,

$$L = \int_a^b \sqrt{(\dot{c}_1)^2 + (\dot{c}_2)^2}\, dt$$

die Gesamtlänge.
Falls $(\dot{c}_1)^2 + (\dot{c}_2)^2 = 1$, dann hat die Kurve **Bogenlängenparametrisierung**. Wir benutzen wie oben den Buchstaben s für die unabhängige Variable und γ für die Parametrisierung. In diesem Fall ist

$$\mathbf{T}(s) = (\gamma_1'(s), \gamma_2'(s))$$

der **Tangentenvektor** zu γ im Punkt s. Es gilt $|\mathbf{T}| = 1$. Sei $\mathbf{N} = D_{\frac{\pi}{2}}\mathbf{T}$. $\mathbf{N}$ heißt der **Normalvektor** an γ und $(\mathbf{T}, \mathbf{N})$ bildet eine orthogonale Basis für $\mathbf{R}^2$ (**das begleitende Zweibein**). ($D_{\frac{\pi}{2}}$ ist der Operator der Drehung um 90°, d.h. $D_\pi((\xi, \eta)) = (-\eta, \xi)$.)
Es gibt eine reellvertige Funktion κ, sodaß

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa(s)\mathbf{N}(s), \quad \frac{d\mathbf{N}}{ds} = -\kappa(s)\mathbf{T}(s).$$

κ heißt die **Krümmung** von γ an der Stelle s. $\rho = \dfrac{1}{|\kappa|}$ heißt der **Krümmungsradius**, $C = \gamma(s) + \dfrac{1}{\kappa(s)}\mathbf{N}(s)$ das **Krümmungszentrum**, falls κ (nur definiert, wenn $\kappa(s) \neq 0$).
Kurvenintegrale, 2. Art: Für eine skalarwertige Funktion f definieren wir

$$\int_c f ds = \int_a^b f(c_1(t), c_2(t))\sqrt{((\dot{c}_1)^2 + (\dot{c}_2)^2)}dt.$$

Bemerkung.

I. Fall c eine geschlossene Kurve ohne Durchkreuzungen ist, dann ist das Kurvenintegral

$$\frac{1}{2}\int_c (y\, dx - x\, dy)$$

der Inhalt der von c eingeschlossenen Fläche.

II. Falls $\mathbf{X} = \operatorname{grad} f$ das Gradientenfeld einer skalaren Funktion f ist (siehe Kapitel 3), dann gilt

$$\int_c \mathbf{X} \cdot d\mathbf{s} = f(b) - f(a)$$

wobei a, b die Endpunkte von c sind. In diesem Falls ist das Kurvenintegral **wegunabhängig**. Dies ist der Fall, wenn $\dfrac{\partial X_1}{\partial y} = \dfrac{\partial X_2}{\partial x}$ (falls der Definitionsbereich von X "keine Löcher" hat).

Beispiel. Berechne $\int_c X_1\, dx + X_2\, dy$ wobei
$X(x, y) = (y, -\sin x)$, c die Kurve $t \mapsto (t, t^2)$ $(t \in [0, 1])$
$X(x, y) = (x + y, x - y)$, c die Kurve $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ $(t \in [0, 2\pi])$.

(1) Das Integral =

$$\int_0^1 (t^2 \cdot 1 + (-\sin t) \cdot 2t)dt = \int_0^1 (t^2 - 2t \sin t)dt$$

(2) Das Integral =

$$\int_0^{2\pi} ((\cos t + \sin t)(-\sin t) + (\cos t - \sin t)\cos t)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t - \sin^2 t)dt.$$

Raumkurven: Sei $c(t) = (c_1(t), c_2(t), c_3(t))$ eine Kurve in $\mathbf{R}^3$. Wiederum definieren wir

$$\begin{aligned} s &= \int_a^t \sqrt{(\dot c_1)^2 + (\dot c_2)^2 + (\dot c_3)^2}\, dt \\ L &= \int_a^b \sqrt{(\dot c_1)^2 + (\dot c_2)^2 + (\dot c_3)^2}\, dt. \end{aligned}$$

c hat **Bogenlängenparametrisierung**, falls $\frac{ds}{dt} = 1$ das heißt

$$(\dot c_1)^2 + (\dot c_2)^2 + (\dot c_3)^2 = 1.$$

Dann gilt: $\mathbf{T}(s) = \gamma'(s)$ ist ein Einheitsvektor — der **Tangentenvektor**.
$\mathbf{N}(s) = \dfrac{\mathbf{T}'(s)}{|\mathbf{T}'(s)|}$ ist der **Normalvektor**
$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s)$ ist die **Binormale**.

Satz 4 *Es gibt eine positive Funktion κ und eine reelle Funktion τ, sodaß*

$$\begin{array}{rcrcrcr} \mathbf{T}' & = & & & \kappa\mathbf{N} & & \\ \mathbf{N}' & = & -\kappa\mathbf{T} & & & + & \tau\mathbf{B} \\ \mathbf{B}' & = & & & -\tau\mathbf{N} & & . \end{array}$$

$\kappa(s)$ heißt die **Krümmung** von c, $\tau(s)$ die **Windung**, $\rho = \dfrac{1}{\kappa}$ ist der **Krümmungsradius**, $C = c(s) + \rho(s)\mathbf{N}(s)$ das **Krümmungszentrum** (τ ist ein Maß für die Abweichung der Kurve von der Ebene, der **Schmiegebene**, die von $\mathbf{T}, \mathbf{N}$ aufgespannt wird).

Beispiel. Die Schraubenlinie $c(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos t, \sin t, t)$. Es gilt:

$$(\dot c_1)^2 + (\dot c_2)^2 + (\dot c_3)^2 = 1$$

d.h. die Kurve hat Bogenlängenparametrisierung:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(s) &= \dot c(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin s, \cos s, 1) \\ \mathbf{T}'(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos s, -\sin s, 0) \\ \mathbf{N}(s) &= (\cos s, -\sin s, 0) \\ \mathbf{B}(s) &= \mathbf{N}(s) \times \mathbf{T}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin s, -\cos s, 1). \end{aligned}$$

Aus $\mathbf{T}'(s) = \kappa(s)\mathbf{N}(s)$ sieht man, daß $\kappa(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Aus $\mathbf{B}'(s) = -\tau(s)\mathbf{N}(s)$ und $\mathbf{N}'(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos s, \sin s, 0)$ sieht man, daß $\tau(s) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Für eine allgemeine Kurve $c(t) = (c_1(t), c_2(t), c_3(t))$, d.h. nicht notwendigerweise mit Bogenlängenparametrisierung, gilt

$$\mathbf{T} = \frac{\dot{c}}{|\dot{c}|}, \qquad \mathbf{B} = \frac{\dot{c} \times \ddot{c}}{|\dot{c} \times \ddot{c}|}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{N}$$

$$\kappa = \frac{|\dot{c} \times \ddot{c}|}{|\dot{c}|^3} \qquad \tau = \frac{[\dot{c}, \ddot{c}, \dddot{c}]}{|\dot{c} \times \ddot{c}^2|}$$

Beispiel. Für $c(t) = (1 + t^2, t, t^3)$ gilt

$$\dot{c} = (2t, 1, 3t^2), \ddot{c} = (2, 0, 6t), \dddot{c} = (0, 0, 6)$$

$$\dot{c} \times \ddot{c} = (-6t, -6t^2, -2), [\dot{c}, \ddot{c}, \dddot{c}] = -12.$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned}
\kappa &= \frac{(36t^2 + 36t^4 + 4)^{\frac{1}{2}}}{(4t^2 + 1 + 9t^4)^{\frac{3}{2}}} \\
\tau &= \frac{-12}{(4t^2 + 1 + 9t^4)^{\frac{2}{3}}} \\
\mathbf{T} &= \frac{(2t, 1, 3t^2)}{(4t^2 + 1 + 9t^4)^{\frac{1}{2}}} \\
\mathbf{B} &= \frac{16t, -6t^2, -2)}{36t^2 + 36t^4 + 9t^4)^{\frac{1}{2}}} \\
\mathbf{N} &= \frac{(-18t^4 + 2, -4t - 18t^3, 6t + 12t^3)}{(4t^2 + 1 + 9t^4)^{\frac{1}{2}}(36t^2 + 36t^4 + 4)^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

Beispiel. Die Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ entspricht dem Würfel

$$c(s, t) = (R \sin s \cos t, R \sin s \sin t, R \cos s) \quad (0 \leq s \leq \pi, 0 \leq t \leq 2\pi).$$

Die Kugeloberfläche besitzt keinen Rand (genauer, der Rand ist gewissermaßen trivial). Der Zylinder $x^2 + y^2 = r^2, 0 \leq z \leq h$ entspricht dem Würfel

$$c(s, t) = (r \cos s, r \sin s, t) \quad 0 \leq s \leq 2\pi, 0 \leq t \leq h.$$

Der Rand des Zylinders besteht aus den Kreisen

$$s \mapsto (r \cos s, r \sin s, 0)$$

und

$$s \mapsto (r \cos s, r \sin s, h)$$

(mit geeigneter Orientierung).

k-Würfel, Ketten: Wir können den Begriff einer Kurve wie folgt verallgemeineren:

Definition 5 *Ein* k-**Würfel** *in* $\mathbf{R}^n$ *ist eine glatte (etwa stetig-differenzierbare) Abbildung* $c : [0,1]^k \to \mathbf{R}^n$. *Eine* **Kette** *von* k*-Würfeln ist eine formale Kombination*

$$n_1 c_1 + \cdots + n_r c_r$$

von k*-Würfeln, wobei die Koeffizienten* n_i *ganze Zahlen sind. Falls* c *ein* k*-Würfel ist, dann ist der Rand* ∂c *von* c *die* $k-1$*-Kette*

$$\sum_{i=1}^{k-1} (\partial_O^i c - \partial_U^i c),$$

wobei

$$\partial_O^i c : (t_1, \ldots, t_{k-1}) \mapsto c(t_0, \ldots, t_{i-1}, 1, t_{i+1}, \ldots, t_k)$$

bzw.

$$\partial_U^i c : (t_1, \ldots, t_{k-1}) \mapsto c(t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \ldots, t_k).$$

Beispiele von Kurvenintegralen aus der Physik:
1. Art: $Q = \int_C (c_V \, dT + \frac{RT}{V} \, dV)$ wobei
$Q =$ Wärmemenge eines idealen Gases
$V =$ Volumen
$c_V =$ spezifische Wärme (V konst.)
$R =$ Gaskonstante
2. Art: $T = \int_C \frac{ds}{c(x,y)}$ wobei T die Zeit, die ein Lichtstrahl benötigt, um die Kurve C zu durchlaufen, und $c(x,y)$ die Lichtgeschwindigkeit im Punkt (x,y) eines (inhomogenen) Mediums ist.

Beispiele. Berechne $\int_C X_1 \, dx + X_2 \, dy$ wobei

a) $X(x,y) = (y, -\sin x)$, C die Kurve $\phi(t) = (t, t^2)$ $(t \in [0,1])$

b) $X(x,y) = (x+y, x-y)$, C die Kurve $\phi(t) = (\cos t, \sin t)$ $(t \in [0, 2\pi])$.

a) Das Integral =

$$\int_0^1 (t^2 \cdot 1 + (-\sin t) \cdot 2t) dt = \int_0^1 (t^2 - 2t \sin t) dt$$

b) Das Integral =

$$\int_0^{2\pi} ((\cos t + \sin t)(-\sin t) + (\cos t - \sin t) \cos t) \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t - \sin^2 t) \, dt.$$