Thema 13—Integrale, die von einem Parameter abhängen, Integrale von Funktionen auf Teilmengen von $\mathbf{R}^n$

Wir erinnern daran, daß eine Funktion $h : [a,b] \to \mathbf{R}$ eine Treppenfunktion ist, falls es eine Unterteilung

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

des Intervalls $[a,b]$ gibt, so daß h auf $]x_{k-1}, x_k[$ konstant ist für jedes k.
Es ist klar, wie man Treppenfunktionen auf $\mathbf{R}^n$ definiert (Die Konstanzmengen sind jetzt "Rechtecke" oder "Quader" d.h. Produkte von Intervallen). Man kann damit den Begriff einer Riemann-integrierbaren Funktion geeignete Funktionen mehrerer Variablen übertragen, indem man Ober- und Unterintegrale völlig analog definiert. Da ein viel allgemeinerer und effizienterer Integralbegriff (das Lebesgue-Integral) in der Mathematik verwendet wird und dieser Zugang sehr aufwendig ist, werden wir stattdessen iterierte Integrale behandeln. Dies genügt, um konkrete Integrale, die von praktischer Bedeutung sind, zu berechnen.

Integrale, die von einem Parameter abhängen

Satz 1 *Sei $[a,b] \subset \mathbf{R}$, Q ein abgeschlossener Quader in $\mathbf{R}^n$ und $f : [a,b] \times Q \to \mathbf{R}$ stetig. Dann ist die Funktion $\varphi : Q \to \mathbf{R}$, wobei $\varphi(y) = \int_a^b f(x,y)dx$, stetig.*

Beweis. Wähle $\epsilon > 0$. Da f gleichmäßig stetig ist, existiert $\delta > 0$, sodass aus $\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} < \delta$ folgt $|f(x,y) - f(x',y')| < \epsilon$. Damit gilt $|\phi(y) - \phi(y')| < \epsilon(b-a)$, wenn $(y - y') < \delta$.

$\blacksquare$

Ähnlicherweise zeigt man:

Satz 2 *Seien $I, I' \subset \mathbf{R}$ kompakte Intervalle und $f : I \times I' \to \mathbf{R}$ stetig und stetig partiell differenzierbar nach der zweiten Variablen. Dann ist die Funktion $\varphi : I' \to \mathbf{R}$, definiert durch*

$$\varphi(y) := \int_I f(x,y)dx,$$

stetig differenzierbar und es gilt

$$\frac{d\varphi(y)}{dy} = \int_I \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx.$$

Einschub — Eulersche Differentialgleichungen der Variationsrechnung

Sei $I = [a,b] \subset \mathbf{R}$, $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$. Die Funktion $L : (t,y,p) \mapsto L(t,y,p)$ von $I \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ sei zweimal stetig partiell differenzierbar, $\mathcal{R}$ bezeichne die Familie der Funktionen $\varphi : [a,b] \to \mathbf{R}$, sodaß φ zweimal stetig differenzierbar ist und $\varphi(a) = c_1, \varphi(b) = c_2$. Die Abbildung

$$S : \mathcal{R} \to \mathbf{R}$$

sei definiert durch

$$S(\varphi) = \int_a^b L(t, \varphi(t), \varphi'(t))dt.$$

Gesucht ist nun ein $\varphi \in \mathcal{R}$, so daß $S(\varphi)$ minimal ist, d.h. $S(\varphi) \leq S(\psi)$ für alle $\psi \in \mathcal{R}$.

Satz 3 *Eine notwendige Bedingung dafür, daß $S(\varphi)$ minimal ist für ein $\varphi \in \mathcal{R}$, ist die Gültigkeit der* **Eulerschen Differentialgleichung**

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial p}(t, \varphi(t), \varphi'(t)) - \frac{\partial L}{\partial y}(t, \varphi(t), \varphi'(t)) = 0.$$

BEWEIS. Sei $\psi : [a, b] \to \mathbf{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit

$$(*) \qquad \psi(a) = \psi(b) = 0.$$

Sei $\varphi \in \mathcal{R}$ so, daß $S(\varphi) = \min_{\chi \in \mathcal{R}} S(\chi)$. Für beliebiges $\epsilon \in \mathbf{R}$ ist $\varphi + \epsilon\psi \in \mathcal{R}$ und damit

$$S(\varphi) \leq S(\varphi + \epsilon\psi).$$

Die Funktion $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sei definiert durch

$$\phi(\epsilon) := S(\varphi + \epsilon\psi).$$

ϕ besitzt für $\epsilon = 0$ ein Minimum, also ist

$$(**) \qquad \frac{d\phi}{d\epsilon}(0) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{d\phi(\epsilon)}{d\epsilon} &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial\epsilon} L(t, \varphi(t) + \epsilon\psi(t), \varphi'(t) + \epsilon\psi'(t))dt \\ &= \int_a^b \left\{ \frac{\partial}{\partial y} L(\dots)\psi(t) + \frac{\partial}{\partial p} L(\dots)\psi'(t) \right\} dt. \end{aligned}$$

Wegen $(*)$ ist

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\partial L}{\partial p}\psi'(t)dt &= \frac{\partial L}{\partial p}\psi(t)\bigg|_a^b - \int_a^b \psi(t)\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial p}\right) dt \\ &= -\int_a^b \psi(t)\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial p}\right) dt. \end{aligned}$$

Damit erhält man schließlich mit $(**)$

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d\phi}{d\epsilon}(0) &= \int_a^b \left\{ \frac{\partial L}{\partial y}(t, \varphi, \varphi')\psi + \frac{\partial L}{\partial p}(t, \varphi, \varphi')\psi' \right\} dt \\ &= \int_a^b \left\{ \frac{\partial L}{\partial y}(t, \varphi, \varphi') - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial p}(t, \varphi, \varphi') \right\} \psi dt. \end{aligned}$$

(Wir haben zur Vereinfachung nur $\varphi, \varphi', \dots$ statt $\varphi(t), \varphi'(t), \dots$ geschrieben.)
Mit dem folgenden Lemma folgt daraus

$$\frac{\partial L}{\partial y}(t, \varphi(t), \varphi'(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial p}(t, \varphi(t), \varphi'(t)) = 0, \text{ q.e.d.}$$

■

Die folgende Aussage ist naheliegend:

Lemma 4 *Sei $[a,b] \subset \mathbf{R}$ mit $a < b$ ein abgeschlossenes Intervall und $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ eine stetige Funktion. Falls für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion*

$$\psi : [a,b] \to \mathbf{R} \text{ mit } \psi(a) = \psi(b) = 0$$

gilt:

$$\int_a^b f(t)\psi(t)dt = 0,$$

dann ist $f(t) = 0$ für alle $t \in [a,b]$.

Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen

Sei $[a,b] \subset \mathbf{R}$ ein abgeschlossenes Intervall, $c = (c_1,\ldots,c_n)$, $d = (d_1,\ldots,d_n) \in \mathbf{R}^n$. $\mathcal{R} = \{\varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_n) : [a,b] \to \mathbf{R}^n$: φ zweimal stetig differenzierbar mit $\varphi(a) = c, \varphi(b) = d\}$. $L : (t, y_1,\ldots,y_n,p_1,\ldots,p_n) \mapsto L(t,y_1,\ldots,y_n,p_1,\ldots,p_n)$ von $[a,b]\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ sei eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Ein reelles Funktional $S : \mathcal{R} \to \mathbf{R}$ sei definiert durch

$$S(\varphi) = \int_a^b L(t,\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t),\varphi_1'(t),\ldots,\varphi_n'(t))dt.$$

Man kann auch hier zeigen: Ist für ein $\varphi \in \mathcal{R}$

$$S(\varphi) \leq S(\psi) \text{ für alle } \psi \in \mathcal{R},$$

dann gelten die "Eulerschen Differentialgleichungen"

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial p_i}(t,\varphi(t),\varphi'(t)) - \frac{\partial L}{\partial y_i}(t,\varphi(t),\varphi'(t)) = 0$$

für $i = 1,\ldots,n$.

Wir kehren zurück zum Thema der Integration.

Das Integral von stetigen Funktionen mit kompaktem Träger

Sei jetzt f eine stetige Funktion von zwei Variablen, die auf einer Menge $[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$ definiert ist. Man definiert dann

$$\int f(x,y)\,dx\,dy = \int\left(\int f(x,y)\,dx\right)\,dy.$$

Ähnlicherweise definiert man

$$\int f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots\,dx_n$$

als ein iteriertes Integral.

Wir werden unten zeigen, daß diese Definition unabhängig von der Reihe der Integrationen ist d.h. es gilt (für $n = 2$)

$$\int\left(\int f(x,y)\,dx\right)\,dy = \int\left(\int f(x,y)\,dy\right)\,dx.$$

$\mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$ bezeichne die Menge der stetigen Funktionen $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, sodaß $K > 0$ existiert mit $f(x) = 0$, falls $x \in \mathbf{R}^n, |x| > K$. Ist $f \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$, dann liegt $\int f(x_1,\ldots,x_n)dx_n \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^{n-1})$.

Beweis. Zunächst ist klar, daß das Integral existiert, da die Abbildung $x_n \mapsto f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ bei jeder Wahl von $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ in $\mathcal{K}(\mathbf{R})$ liegt. Die Abbildung $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \mapsto \int f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)dx_n$ hat natürlich kompakten Träger. Nach den obigen Sätzen ist sie auch stetig.

■

Da die Funktion

$$(x_1, \ldots, x_{n-1}) \mapsto \int f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)dx_n$$

in $\mathcal{K}(\mathbf{R}^{n-1})$ liegt, kann man das Integral

$$\int \left(\int f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)dx_n \right) dx_{n-1}$$

bilden und erhält wieder eine Funktion aus $K(\mathbf{R}^{n-2})$, usw. Also kann man jeder Funktion $f \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$ die Zahl

$$I(f) = \int \left(\ldots \left(\left(\int f(x_1, \ldots, x_n)dx_n \right) dx_{n-1} \right) \ldots \right) dx_1$$

zuordnen, die man durch iterierte Integration aus f erhält.

Satz 5 *Das Funktional I hat auf $\mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$ die folgenden Eigenschaften:*
$I(f_1 + f_2) = I(f_1) + I(f_2)$
$I(\alpha f) = \alpha I(f)$ *für* $\alpha \in \mathbf{R}$
$I(f) \geq 0$ *für* $f \geq 0$
$I(E^t f) = I(f)$ *für* $t \in \mathbf{R}^n$, *wobei* $E^t f$ *die Funktion* $x \mapsto f(x+t)$ *bezeichnet*
Falls $|f| \leq K$, *dann* $|I(f)| \leq \prod(b_i - a_i)K$, *wenn* $Tr\, f \subseteq \prod[a_i, b_i]$ *ist (d.h.* $f(x) = 0$, *falls* $x \notin \prod[a_i, b_i]$.*)*

Beweis. Das folgt unmittelbar aus den Eigenschaften des eindimensionalen Integrals für stückweise stetige Funktionen.

■

Es ist interessant, daß das Funktional I durch diese Eigenschaften bis auf einen Proportionalitätsfaktor eindeutig bestimmt ist. Da man von einem Integral alle diese Eigenschaften erwartet, haben wir somit den richtigen Integralbegriff gefunden. Sollte man Funktionen integrieren wollen, die nicht stetig sind, verwendet man folgende natürliche Approximationsmethode:

Definition 6 *Sei f eine nichtnegative beschränkte Funktion mit kompaktem Träger auf* $\mathbf{R}^n$. *Wir nennen f* **integrierbar** *auf* $\mathbf{R}^n$, *wenn für jedes $\epsilon > 0$ Funktionen $g, h \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$ existieren mit $0 \leq g \leq f \leq h$ und $I(g - h) < \epsilon$. Für eine integrierare Funktion f versteht man unter dem Integral $I(f)$ die Zahl*

$$I(f) = \sup_{\substack{0 \leq g \leq f \\ g \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^n)}} I(g) = \inf_{\substack{f \leq h \\ h \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^n)}} I(h).$$

Wenn f integrierbar ist, gibt es für jedes $\epsilon > 0$ Funktionen $g_\epsilon, h_\epsilon \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$ mit $0 \leq g_\epsilon \leq f \leq h_\epsilon$ und $I(h_\epsilon) - I(g_\epsilon) < \epsilon$. Dann ist

$$I(g_\epsilon) \leq \sup_{g \leq f} I(g) \leq \inf_{f \leq h} I(h) \leq I(h_\epsilon)$$

und somit tatsächlich $\sup I(g) = \inf I(h)$, womit gezeigt ist, daß die Definition sinnvoll ist.

Bemerkung. Diese Definition ist im wesentlichen die Archimedische Exhaustionsmethode zur Bestimmung des Inhalts eines Körpers. Man approximiert die Funktion f von oben und unten durch Funktionen, für welche das Integral bereits definiert ist.

Definition 7 *Eine beschränkte reellwertige Funktion f heißt integrierbar, wenn $f^+ = \max(f, 0)$ und $f^- = \max(-f, 0)$ integrierbar sind. Man definiert dann das Integral durch $I(f) = I(f^+) - I(f^-)$.*

Satz 8 *Mit f_1 und f_2 sind auch $f_1 + f_2$, αf_1, $f_1 f_2$, $\max(f_1, f_2)$, $\min(f_1, f_2)$ und $|f_1|$ integrierbar.*

Das erweiterte Integral hat ähnliche Eigenschaften:

Satz 9 *Für integrierbare Funktionen f, f_1, f_2 gilt*
$I(f_1 + f_2) = I(f_1) + I(f_2)$
$I(\alpha f) = \alpha I(f), \alpha \in \mathbf{R}$
$I(f) \geq 0$ *für* $f \geq 0$
$I(E^t f) = I(f), t \in \mathbf{R}^n$
$|I(f)| \leq \prod(b_i - a_i)K$, *falls* $Tr\, f \subseteq \prod[a_i, b_i]$ *und* $|f| \leq K$.

Die o.e. Eindeutigkeit wird im folgenden Satz (ohne Beweis) formuliert.

Satz 10 *Sei $J : \mathcal{K}(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$ eine Abbildung mit den folgenden Eigenschaften:*
$J(f_1 + f_2) = J(f_1) + J(f_2)$
$J(\alpha f) = \alpha J(f), \alpha \in \mathbf{R}$
$J(f) \geq 0$ *für* $f \geq 0$
$J(E^t f) = J(f), t \in \mathbf{R}^n$
$|J(f)| \leq \alpha \prod(b_i - a_i)K$ *für jedes f mit $Tr\, f \subseteq \prod[a_i, b_i]$ und $|f| < K$ mit einer von f und $Tr\, f$ unabhängigen Konstanten $\alpha > 0$.*
Dann existiert ein $\lambda \geq 0$ mit $J(f) = \lambda I(f)$ für alle $f \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$.

Als einfache Folgerung aus diesem Satz ergibt sich, daß es in der Definition von $I(f)$ auf die Reihenfolge der Integrationen nicht ankommt.

Satz 11 *Sei $J(f) = \int \ldots (\int f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_{i_1})\, dx_{i_2} \ldots dx_{i_n}$, wobei $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ irgendeine Permutation von $\{1, 2, \ldots, s\}$ ist. Dann gilt $J(f) = I(f)$.*

Beweis. $J(f)$ erfüllt 1) — 5) und $J(\chi_{W_1}) = 1$.

■

Wir schreiben daher kurz $I(f) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)dx$, wobei $dx = dx_1 \ldots dx_n$ bedeutet.
Nun sind wir in der Lage, den bis jetzt nur vage umschriebenen Begriff des Flächeninhalts oder Volumens exakt zu definieren.

Definition 12 *Ist $A \subseteq \mathbf{R}^n$ und die Indikatorfunktion χ_A integrierbar im $\mathbf{R}^n$, dann nennt man die Zahl $m(A) = I(\chi_A)$ das (n-dimensionale)* **Maß** *oder den* **Inhalt** *von A und nennt A eine* **integrierbare Menge**. *(Für $n = 2$ spricht man von Flächeninhalt, für $n = 3$ von Volumen.)*

Bemerkung. Man erhält auf diese Weise eine Klasse von integrierbaren Mengen, die alle jene Mengen umfaßt, welchen man üblicherweise einen Inhalt zuschreiben möchte.

Die Transformationsregel

Satz 13 *Sei $g = (g_1, \ldots, g_n)$ eine stetig differenzierbare Funktion auf U (offen in $\mathbf{R}^n$). Wir nehmen an, g ist injektiv und $\det J_g(x) \neq 0$ auf U. Sei f stetig auf $g(U)$. Dann gilt:*

$$\int_{g(U)} f(x)\, dx = \int_U f \circ g(u) |\det J_g(u)|\, du$$

für jede stetige Funktion f auf $g(U)$.

Beweis. (Beweisskizze) Wir betrachten das Funktional

$$f \mapsto \int_U f \circ g(u) |\det J_g(u)|\, du.$$

Man prüft nach, daß dieses Funktional den Bedingungen von oben genügt. Daraus folgt die Aussage des Satzes.

■

Beispiel. Berechne $\int_V x^2 z\, dxdydz$ wobei

$$V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h\}.$$

Wir benutzen zylindrische Koordinaten d.h. die Abbildung

$$\phi : (r, \theta, \zeta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, \zeta)$$

$\phi(V') = V$ wobei

$$V' = \{(r, \theta, \zeta) : 0 \leq r \leq a, \theta \in [0, 2\pi], 0 \leq \zeta \leq h\}.$$

Daher gilt:

$$\int_V x^2 z dxdydz = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a (r \cos \theta)^2 r \zeta\, dr d\theta d\zeta = \frac{\pi a^4 h^2}{8}.$$

Beispiel. Wir berechnen eine Formel für das Volumen des Rotationskörpers $0 \leq x^2 + y^2 \leq (\phi(z))^2$: Es gilt:

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b \iint_{0 \leq (x^2+y^2) \leq \phi(z)^2} dxdydz \\ &= \int_a^b dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\phi(z)} r\, dr \quad \text{(in zylindrische Koordinaten)} \\ &= \pi \int_a^b \phi(z)^2 dz. \end{aligned}$$

Anwendungen des Integrals:

1. Falls $\rho(x, y, z)$ die Dichte an der Stelle (x, y, z) ist, dann ist

   $$\iiint_G \rho(x, y, z)\, dxdydz$$

   die Gesamtmasse von G.

2. Statisches Moment: Die Größen

$$\begin{aligned} T_x &= \iiint_G x\rho(x,y,z)\,dxdydz, \\ T_y &= \iiint y\rho(x,y,z)\,dxdydz, \\ T_z &= \iiint z\rho(x,y,z)\,dxdydz \end{aligned}$$

sind die statischen Momente der Masse.

3. Der Schwerpunkt von G ist der Punkt $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, wobei

$$\bar{x} = \frac{\iiint x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint \rho(x,y,z)\,dxdydz} = \frac{T_x}{V} \text{ usw.}$$

4. Die Trägheitsmomente I_x, I_y, I_z im Bezug auf die $x-$ (bzw. $y-, z-$) Achse ist:

$$I_x = \iiint (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,dxdydz, \text{ – usw.}$$

5. Das Potential der Massenanziehung eines Körpers G mit Dichte ρ ist

$$f(x,y,z) = \iiint_G \frac{\rho(x,y,z)}{\sqrt{(x-h)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\,dhd\eta d\zeta.$$

(Das entsprechende Kraftfeld ist $\operatorname{grad} f$).

Beispiel. Berechne $T_x, T_y, T_z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ für die homogene Halbkugel $\{(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 \le 1, z \ge 0\}$, $T_x = T_y = 0$ (aus Symmetriegründen)

$$\begin{aligned} T_z = \iiint_V z\,dxdydz &= \int_0^1 zdz \int_0^{\sqrt{1-z^2}} rdr \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{1-z^2}{2} z\,dz = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Da die Gesamtmasse $= \frac{2\pi}{3}$ gilt

$$\bar{x} = 0, \bar{y} = 0, \bar{z} = \frac{3}{8}.$$

Beispiel. Berechne I_x für die Kugel mit Massendichte 1. Es gilt:

$$\begin{aligned} I_x &= \iiint (y^2+z^2)\,dxdydz = I_y = I_z \text{ wegen der Symmetrie} \\ &= \frac{1}{3}\iiint (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz \\ &= \frac{2}{3}\int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^4 \sin v dr dv du = \frac{8\pi}{15}. \end{aligned}$$