Thema 15—Vektoranalysis

Differentialformen:
Eine Funktion von $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^n$ ist die mathematische Realisierung eines Vektorfeldes. Wir können dies natürlich verallgemeinern, indem wir Funktionen auf $\mathbf{R}^n$ mit Werten in einem (abstrakten) Vektorraum V betrachten. Falls V m-dimensional ist und $(e_1, \dots, e_m)$ eine Basis dafür, dann ist jede solche Funktion durch ein m-Tupel $(f_1, \dots, f_m)$ von reellwertigen Funktionen darstellbar, wobei

$$f = f_1 e_1 + \cdots + f_m e_m.$$

Die formale Definition einer Differentialform entspricht dem Fall, wo V ein Raum von alternierenden Formen ist (siehe Vorlesung "Lineare Algebra"). Wir benutzten hier einen pragmatischen Zugang:

1-**Formen:** Man bezeichnet die Basis mit $(dx_1, \dots, dx_n)$. Eine allgemeine 1-Form hat damit die Gestalt:

$$\omega = a_1(x)\,dx_1 + \cdots + a_n(x)\,dx_n.$$

(Konkret: Für $n = 2$ hat die typische 1-Form die Gestalt: $\omega = a\,dx + b\,dy$;

$n = 3$: $\omega = a\,dx + b\,dy + c\,dz$.

Bemerkung: Die Koeffizienten a, b usw. sind glatte Funktionen).

2-**Formen:** Die Basis ist $\{dx_i\,dx_j : 1 \leq i < j \leq n\}$ ($\binom{n}{2}$ Elemente).

(Konkret: Für $n = 2$: $\omega = a\,dx\,dy$.

$n = 3$: $\omega = a\,dy\,dz + b\,dz\,dx + c\,dx\,dy$).

Die allgemeine Situation ist wie folgt: Eine k-**Differentialform** auf $U \subset \mathbf{R}^n$ ist ein Ausdruck der Gestalt

$$\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \dots dx_{i_k}.$$

(N.B. In diesem Fall hat die Basis $\binom{n}{k}$ Elemente).

Operationen mit Differentialformen: Man kann

a) zwei k-Formen auf $\mathbf{R}^n$ addieren (man summiert einfach die entsprechenden Koeffizienten);

b) eine k-Form mit einer l-Form multiplizieren (das Ergebnis ist dann eine $k+l$-Form). Man multipliziert wie mit Zahlen, in dem man folgende Rechenregel beachtet:

$$dx_i dx_j = -dx_j dx_i \text{ (und daher } dx_i dx_i = 0).$$

c) eine k-Form differenzieren (das Ergebnis ist ein $k + 1$-Form): Dazu genügen folgende Rechenregeln:

Falls ω eine Funktion f ist, dann ist das Differential df wie folgt definiert:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,dx_n. \quad \text{(Gradient!)}$$

(Bemerkung: Man betrachtet glatte Funktionen als 0-Formen).

Falls

$$\omega = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} a_{i_1\ldots i_k} dx_{i_1} \ldots dx_{i_k},$$

allgemeine k-Form ist, setzten wir

$$d\omega = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} da_{i_1\ldots i_k} dx_{i_1} \ldots dx_{i_k}.$$

Beispiele.

I. Für $\omega = a\,dx + b\,dy$ gilt:
$$d\omega = \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

II. Für $\omega = a\,dx + b\,dy + c\,dz$, gilt
$$d\omega = \left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial y}\right) dzdx + \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) dxdy. \quad \text{(Rotation!)}$$

III. Für
$$\omega = a\,dy\,dz + b\,dz\,dx + c\,dx\,dy,$$
gilt:
$$d\omega = \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz. \quad \text{(Divergenz!)}$$

d) Man kann eine k-Form
$$\omega = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} a_{i_1\ldots i_k} dy_{i_1} \ldots dy_{i_k}$$
auf $\mathbf{R}^n$ mit einer glatten Funktion $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ von $\mathbf{R}^m$ in $\mathbf{R}^n$ zusammensetzen. Rechenregel: Man ersetzt dy_i in ω durch
$$d\phi_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial \phi_n}{\partial x_m} dx_n.$$

Beispiel. Wir berechnen $x\,dx + y\,dy$ in Polarkoordinaten. Aus $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ folgt

$$\begin{aligned} dx &= \cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta \\ dy &= \sin\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta \end{aligned}$$

und damit $x\,dy + y\,dy = r\,dr$.

(Beispiel: (Das gleiche für $-\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$.)

Satz 1 *Sei ω eine k-Form, ω_1 eine l-Form. Es gilt dann:*
$d^2\omega = 0$;
$d(\omega.\omega_1) = (d\omega).\omega_1 + (-1)^{kl}\omega.(d\omega_1)$;
$d(\omega \circ \phi) = (d\omega \circ \phi)$, *wobei ϕ eine geeignete glatte Funktion ist.*

e) Integration von k-Formen entlang k-Würfeln: Sei $c : I^k \to U$, (U offen in $\mathbf{R}^n$) ein k-Würfel. Falls ω eine k-Form auf U ist, dann ist $\omega \circ c$ eine k-Form auf $\mathbf{R}^k$ und hat damit die Gestalt

$$a(x_1, \ldots, a_k)\, dx_1 \ldots dx_k,$$

wobei a eine glatte Funktion ist. Wir definieren

$$\int_c \omega = \int_{I^k} a(x_1, \ldots, x_k)\, dx_1 \ldots dx_k.$$

Wir bringen jetzt einen abstrakten Integralsatz. aus dem alle gängigen Versionen abgeleitet sind.

Satz 2 Integralsatz von Stokes. *Sei c ein k-Würfel in U, ω eine $(k-1)$-Form auf U. Dann gilt:*

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\,\omega.$$

Beispiele:

1. 1-Würfel. Ein 1-Würfel in $\mathbf{R}^n$ ist genau eine Kurve (vgl. Thema 11). Falls $\omega = a_1 dx_1 + \cdots + a_n\, dx_n$ und $c(t) = (c_1(t), \ldots, c_n(t))$, dann gilt

$$\omega \circ c = a_1(c_1(t), \ldots, c_n(t)) \frac{dc_1}{dt} + \cdots + a_n(c_1(t), \ldots, c_n(t)) \frac{dc_n}{dt}.$$

   Damit entspricht $\int_c \omega$ genau dem Kurvenintegral aus Thema 11. (Physikalische Schreibweise: $\int_c \mathbf{F} \cdot ds$, wobei $\mathbf{F}(x_1, \ldots, x_1) = (a_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, a_n(x_1, \ldots, x_n))$.

   (Man verwendet auch in der Physik ein Kurvenintegral der 2-ten Art $\int_c f \cdot ds = \int_a^b f(c_1(t), \ldots, c_n(t))(\dot{c}_1^2(t) + \cdots + \dot{c}_n^2(t))^{\frac{1}{2}}\, dt$, wobei f ein Skalarfeld.

2. 2 Würfel in $\mathbf{R}^n$. Diese entspricht einer Abbildung $c : [0,1]^2 \to \mathbf{R}^n$ – geschrieben $(c_1(u,v), \ldots, c_n(u,v))$. Der wichtigste Spezialfall ist $n = 2$ d.h.

$$c(u_2 v) = (c_1(u,v), c_2(u,v), c_3(u,v)).$$

   Dann gilt: falls $\omega = a\, dy\, dz + b\, dz\, dx + c\, dx\, dy$ eine 2-Form, so ist

$$\omega \circ c = a(c_1, c_2, c_3)\, dc_2\, dc_3 + b(c_1, c_2, c_3)\, dc_3\, dc_1 + c(c_1, c_2, c_3)\, dc_1\, dc_2.$$

   Das ist das Skalarprodukt des Vektors (a, b, c) mit dem Vektor $\frac{\partial c}{\partial u} \times \frac{\partial c}{\partial v}$.
   Denn

$$dc_2\, dc_3 \left(\frac{\partial c_2}{\partial u} du + \frac{\partial c_2}{\partial v} dv \right) \left(\frac{\partial c_3}{\partial u} du + \frac{\partial c_3}{\partial v} dv \right) = \left(-\frac{\partial c_2}{\partial v} \frac{\partial c_3}{\partial u} + \frac{\partial c_2}{\partial u} \frac{\partial c_3}{\partial v} \right) du\, dv$$

   usw.

   (Geometrische Interpretation. Die Vektoren $\frac{\partial c}{\partial u}$ und $\frac{\partial c}{\partial v}$ sind tangential zur Fläche $\mathbf{n}(u,v) = (\frac{\partial c}{\partial u} \times \frac{\partial c}{\partial v}) / |\frac{\partial c}{\partial u} \times \frac{\partial c}{\partial v}|$ ist daher der Einheitsnormalvektor zur Fläche. Daher entspricht das Integral $\int_c \omega$ genau der klassischen Definition des Flächenintegrals $\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ (vgl. Vorlesung Grundlagen der Physik).

Bemerkungen: A. Falls f ein Skalarfeld, dann ist $\int f \cdot dS$ das Integral

$$\int f(c_1(u,v), c_2(u,v), c_3(u,v)) \left| \frac{\partial c}{\partial u} \times \frac{\partial c}{\partial v} \right| du\, dv.$$

B. Ähnlicherweise können wir parametrisierte Flächen $c : U \to \mathbf{R}^3$, wobei U ein geeignetes Gebiet in $\mathbf{R}^2$ ist, betrachten. Wichtig ist nur, dass klar ist, wie der orientierte Rand ∂c zu bestimmen ist (z.B. wenn $U = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ oder $\{(x,y) : r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$).

3. Ein 3 Würfel in $\mathbf{R}^n$. In diesem Fall gilt: für $\omega = \sum_{i_1<i_2<i_3} a_{i_1 i_2 i_3}\, dx_{i_1}\, dx_{i_2}\, dx_{i_3}$ und $c(u,v,w) = (c_1(u,v,w), \ldots, c_n(u,v,w))$,

$$\omega \circ c = \sum_{i_1<i_2<i_3} a_{i_1 i_2 i_3}\, dc_{i_1}\, dc_{i_2}\, dc_{i_3}.$$

Insbesondere, für $n = 3$, $\omega = a(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$

$$\omega \circ c = a(c_1(u,v,w), c_2(u,v,w), c_3(u,v,w)) \left(\frac{\partial c_1}{\partial u} du + \frac{\partial c_1}{\partial v} dv + \frac{\partial c_1}{\partial w} dw \right)$$

$$\left(\frac{\partial c_2}{\partial u} du + \frac{\partial c_2}{\partial v} dv + \frac{\partial c_2}{dw} dw \right) \left(\frac{\partial c_3}{\partial u} du + \frac{\partial c_3}{\partial v} dv + \frac{\partial c_3}{\partial w} dw \right) = a(c_1, c_2, c_3) J\, du\, dv\, dw,$$

wobei J die Jacobi-Determinante ist (vgl. das Transformationsgesetz).

Die 3 gängigsten Versionenen des Satz von Stokes sind:

1. $\int_{\partial c} P\, dx + Q\, dy : \iint_c (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\, dx\, dy$

   (c ein 2 Würfel in $\mathbf{R}^2$, $\omega = P\, dx + Q\, dy$ eine 1-Form) (der Satz von Green).

2. $\int_{\partial c} (P\, dx + Q\, dy + R\, dz) = \iint_c (-\frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial y})\, dy\, dz + (-\frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial y})\, dz\, dx + (-\frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial y})\, dx\, dy$

   (c ein 2 Würfel in $\mathbf{R}^3$, $\omega = P\, dx + Q\, dy + R\, dz$ eine 1-Form).

   (Der Satz von STOKES (eigentlich von Lord KELVIN entdeckt) – oder Rotationssatz).

3. $\iint_{\partial c} (A\, dy\, dz + B\, dz\, dx + C\, dx\, dy) = \iint_c (\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z})\, dx\, dy\, dz$

   (c ein 3 Würfel, $A\, dy\, dz + B\, dz\, dx + C\, dx\, dy$ eine 2-Form.) (Der Satz von GAUSZ oder Divergenzsatz.)

Beispiele.

I. Eine Abbildung der Gestalt:

$$\phi(u,v) = x_0 + u.x_1 + v.x_2,$$

wobei $x_0 \in \mathbf{R}^3$ und x_1, x_2 zwei linear unabhängige Vektoren aus $\mathbf{R}^2$ sind, ist eine **parametrisierte Ebene**.

II. Der 2. Würfel

$$\phi : (u,v) \mapsto (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$$

ist die Parametrisierung der Einheitssphäre

III. Falls S implizit gegeben wird, etwa

$$S = \{(x, y, z) : f(x, y, z) = 0\},$$

dann ist der Normalvektor

$$\mathbf{n} = \frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|}.$$

IV. Die 2-form

$$dF = n_1 dydz + n_2 dzdx + n_3 dxdy$$

nennt man das **Flächenelement** der Fläche.

V. Verwendet man die Formel

$$(x \times y | x \times y) = |x|^2 |y|^2 - (x|y)^2$$

aus der Vorlesung “Lineare Algebra”, bekommt man die Formel:

$$A = \int_U \sqrt{EG - F^2}\, dudv$$

für den Flächeninhalt, wobei $E = (\phi_1|\phi_1)$, $F = (\phi_1|\phi_2)$, $G = (\phi_2|\phi_2)$.

VI. Sei $\phi(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$ $(u^2 + v^2 \leq 1)$ die Halbkugel in $\mathbf{R}^3$. Dann ist das Flächenintegral

$$\begin{aligned}
\int_S dS &= \iint_{u^2+v^2\leq 1} |(1, 0, -u(1 - u^2 - v^2)^{\frac{1}{2}}) \times (0, 1, -v(1 - u^2 - v^2)^{\frac{1}{2}})| dudv \\
&= \iint_{u^2+v^2\leq 1} \frac{1 + u^2 + v^2 + 1 - u^2 - v^2}{(1 - u^2 - v^2)} dudv \\
&= \iint_{u^2+v^2\leq 1} (1 - u^2 - v^2)^{-1} dudv
\end{aligned}$$

VII. **Beispiele von Flächenintegralen.**

Für eine Masse, die über eine Fläche F verteilt ist, gilt:

$$\begin{aligned}
T_x &= \iint_F x\rho(x, y, z)\, dS \\
T_y &= \iint_F y\rho(x, y, z)\, dS \\
T_z &= \iint_F z\rho(x, y, z)\, dS
\end{aligned}$$

bzw. eine Masse, die über einer Raumkurve c verteilt ist, gilt:

$$\begin{aligned}
T_x &= \int_C x\rho(x, y, z)\, ds \\
T_y &= \int_C y\rho(x, y, z)\, ds \\
T_z &= \int_C z\rho(x, y, z) d\, s.
\end{aligned}$$

VIII. **Wegunabhängigkeit eines Kurvenintegrals.** Sei ω eine 1-Form auf U mit $d\omega = 0$. (Dies gilt insbesonders wenn ω die Gestalt df hat, wobei f eine glatte Funktion ist). Dann gilt $\int_c \omega = 0$, falls c eine geschlossene Kurve ist und der Rand eines 2-Würfel in U.

IX. Das Feld f heißt **rotationsfrei**, falls $\operatorname{rot} f = 0$. Ein Gradientenfeld $\operatorname{grad} \phi$ ist immer rotationsfrei (dies folgt aus der Beziehung $d^2 = 0$).

X. **Der Laplacesche Operator:** Dies ist der Operator

$$\Delta : f \mapsto \operatorname{div} (\nabla \phi),$$

der für Skalarfelder ϕ definiert ist.