Thema 16—Komplexe Analysis, Analytische Funktionen

Die komplexen Zahlen

Identifizieren wir die Zahlen aus $\mathbf{R}$ mit Punkten aus der Zahlengeraden, so ist es natürlich, Punkte aus $\mathbf{R}^2$ (d.h. geordnete Paare (x, y)) mit Punkten einer Ebene zu identifizieren. Wir betrachten diese Objekte als Zahlen – die sogenannten "komplexen Zahlen" – und versehen die Menge $\mathbf{C}$ solcher Zahlen mit einer Addition und Multiplikation wie folgt:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ (x_1, y_1)(x_2, y_2) &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1). \end{aligned}$$

Verwenden wir den Buchstaben i für die komplexe Zahl $(0, 1)$ und identifizieren wir die reelle Zahl x mit der komplexen Zahl $(x, 0)$, so sehen wir:

1. daß $i^2 = -1$
2. daß jedes $z \in \mathbf{C}$ eine eindeutige Darstellung

   $$z = x + iy$$

   $(x, y \in \mathbf{R})$ hat.

x heißt der **Realteil** von z (geschrieben $\Re z$). y heißt der **Imaginärteil** von z (geschrieben $\Im z$). Wir führen folgende Bezeichnung ein: $\bar{z} = x - iy$ heißt die zu z **konjugiert komplexe Zahl**; $|z| = \sqrt{(x^2 + y^2)} = \sqrt{z\bar{z}}$ – der **Absolutbetrag** von z. $\arg z =$ der Winkel $\theta \in [0, 2\pi[$, sodaß

$$\cos\theta = \frac{x}{|z|}, \sin\theta = \frac{y}{|z|} \quad (z \neq 0).$$

Wir haben die folgenden einfachen Beziehungen zwischen diesen Größen:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2$$

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2| \\ |z_1 z_2| &= |z_1||z_2|. \end{aligned}$$

Falls $z \neq 0$, dann gilt $zz^{-1} = 1$ wobei $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ **die Inverse** von z ist.

Die Polardarstellung: Jedes $z \neq 0$ aus $\mathbf{C}$ hat die Darstellung

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

wobei $\rho = |z|$ (und daher eindeutig bestimmt) und θ ein Winkel ist, mit $\cos\theta = \frac{x}{|z|}, \sin\theta = \frac{y}{|z|}$ (d.h. $\theta = \arg z$ bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π). In bezug auf diese Darstellung hat die Multiplikation die einfache Gestalt:

$$z_1z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$

wobei $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$.

Korollar 1 *(Gesetz von de Moivre). Für $n \in \mathbf{Z}$ gilt:*

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

Aus diesen Formeln folgt die wichtige Tatsache: Für jede komplexe Zahl

$$\zeta = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

(ungleich Null) und jedes $n \in \mathbf{N}$ existieren genau n komplexe Zahlen z, sodaß $z^n = \zeta$, nämlich

$$z = \rho^{1/n}\left(\cos\left(\frac{2k\pi + \theta}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi + \theta}{n}\right)\right)$$

$(k = 0, 1, \ldots, n-1)$.
Insbesondere gibt es n komplexe Zahlen z, sodaß $z^n = 1$, nämlich

$$z = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, \ldots, n-1).$$

Sie heißen die n-ten **Wurzeln der Einheit**.
Eine der wichtigsten Eigenschaften der komplexen Zahlen ist der sogenannte

Satz 2 Fundamentalsatz der Algebra: *Sei p ein komplexes Polynom von Grad $n > 1$, etwa*

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n.$$

Dann hat p genau n Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ d.h.

$$p(z) = a_n(z - \lambda_1)\cdots(z - \lambda_n).$$

Falls p ein reelles Polynom ist, etwa

$$p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n,$$

wobei die a_i reell sind, dann haben die Nullstellen von p die Gestalt:

$$\underbrace{t_1, \ldots, t_r,}_{\text{reell}} \quad \underbrace{\alpha_1 + i\beta_1, \alpha_1 - i\beta_1, \ldots, \alpha_s + i\beta_s, \alpha_s - i\beta_s,}_{\text{konjungiert-komplexe Paare.}} \quad r + 2s = n$$

Es gilt dann

$$p(t) = (t - t_1)\cdots(t - t_r)(t^2 - 2\alpha_1 t + \alpha_1^2 + \beta_1^2)\cdots(t^2 - 2\alpha_s t + \alpha_s^2 + \beta_s^2).$$

Die Zahlen $\exp z, \ln z, z^\alpha$: Für $z \in \mathbf{C}$ definieren wir $\exp(z)$ (oder einfach e^z) bzw. $\ln z$ (für $z \neq 0$) wie folgt

$$\begin{aligned} e^z &= e^x(\cos y + i\sin y) \quad (z = x + iy) \\ \ln z &= \ln|z| + i\theta, \text{ wobei } z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \end{aligned}$$

(Wegen der Mehrdeutigkeit der Wahl von θ gibt es unendlich viele mögliche Werte für $\ln z$. Normalerweise wählt man $\theta = \arg z$ (d.h. den Winkel θ, der zwischen 0 und 2π liegt). Der ensprechende Wert von $\ln z$ heißt der **Hauptwert** des Logarithmus.
Falls $z (\neq 0) \in \mathbf{C}$, $\alpha \in \mathbf{C}$, dann definieren wir $z^\alpha = \exp(\alpha \ln z)$.
Wegen der Mehrdeutigkeit des Logarithmus hat z^α i.a. unendlich viele mögliche Werte. Wählen wir den Hauptwert des Logarithmus, so bekommen wir den **Hauptwert** von z^α. (N.B. Wenn $\alpha = n$ eine ganze Zahl ist, dann stimmen diese Werte alle überein, sodaß man in Wirklichkeit einen eindeutigen Wert hat. Falls $\alpha = \frac{p}{q}$ rational ist (wobei p und q keine gemeinsamen Faktoren besitzen), dann bekommt man q Werte.)

Beispiele. Berechne $e^i, \ln i, i^i$:

$$\begin{aligned} e^i &= \cos 1 + i \sin 1; \\ \ln i &= i\frac{\pi}{2} \text{ (Hauptwert)}; \\ i^i &= \exp(i \ln i) = \exp\left(-\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}} \text{ (Hauptwert)}. \end{aligned}$$

Einfache Eigenschaften der Funktionen exp und ln:

$$\begin{aligned} \exp(z_1 + z_2) &= \exp z_1 \exp z_2; \\ \ln(z_1 z_2) &= \ln z_1 + \ln z_2 + 2i\epsilon\pi \quad (\epsilon = 1, 0, -1). \end{aligned}$$

Wir schließen dieses Kapitel mit einer Liste von Zahlensystemen und ihren charakteristischen Eigenschaften:

N
Division nicht immer möglich d.h. $ax = b$ nicht immer lösbar

Q$^+$
Wurzel ziehen nicht immer möglich d.h. $x^2 = a$ nicht immer lösbar

R$^+$
Subtrahieren nicht immer möglich da $x + a = b$ nicht immer lösbar

R
$x^2 = a$ nicht lösbar für a negativ

C
alle Polynomialgleichungen lösbar

Die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen

Jetzt beschäftigen wir uns mit den elementaren Eigenschaften von komplex-differenzierbaren Funktionen. Die Definition entspricht der bekannten Beschreibung der Ableitung als Grenzwert von Differenzenquotienten.

Definition 3 *Eine Funktion $f : U \to \mathbf{C}$ (wobei U offen in $\mathbf{C}$ ist) heißt* **analytisch** *(oder* **komplex analytisch**, *oder* **holomorph** *oder* **komplex differenzierbar***) an der Stelle $z_0 \in U$, falls ein $a \in \mathbf{C}$ existiert, sodaß*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = a.$$

a heißt dann die **Ableitung** *von f an der Stelle z_0, geschrieben $f'(z_0)$. Falls $f'(z)$ existiert für jedes $z \in U$, dann ist f* **auf** *U* **differenzierbar** *und die Funktion $z \mapsto f'(z)$ ist die* **Ableitung** *von f.*

Zunächst einige triviale Bemerkungen: Es gilt:

$$\begin{aligned} (f+g)' &= f' + g' \\ (fg)' &= f'g + fg' \\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{gf' - fg'}{g^2} \\ (f \circ g)' &= (f' \circ g)g' \text{ (Kettenregel)} \end{aligned}$$

für (geeignete) analytische Funktionen. (Beweise genau wie im reellen Fall.)

Falls f analytisch auf $U(z_0, r) = \{z \in \mathbf{C} \colon |z - z_0| < r\}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + \int_{z_0}^{z} f'(z)\, dz \\ &= f(z_0) + (z - z_0) \int_0^1 f\big(z_0 + t(z - z_0)\big) dt \end{aligned}$$

(der Integrationsweg ist die Kurve $t \mapsto z_0 + t(z - z_0) \quad \big(t \in [0,1]\big)$)

(Übungsbeispiel.)

Satz 4 *Sei (f_n) eine Folge von analytischen Funktionen von U nach $\mathbf{C}$, sodaß folgendes gilt:*

a) es existiert eine Funktion $f : U \to \mathbf{C}$ mit $f_n \to f$ fast gleichmäßig, d.h. $f_n \to f$ gleichmäßig auf jeder beschränkten abschlossenen Teilmenge von U.

b) die Ableitungen (f_n') sind stetig und konvergieren fast gleichmäßig gegen eine Funktion g. Dann ist f differenzierbar und es gilt: $f' = g$.

Dieser Satz wird mit genau denselben Argumenten wie in der reellen Analysis bewiesen. Später werden wir sehen, daß in der komplexen Theorie wesentlich mehr gilt – die Annahme der Konvergenz der Ableitungen ist überflüssig.
Es ist klar, daß jedes Polynom differenzierbar ist. Weiters gilt:

$$p'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \cdots + n a_n z^{n-1}$$

wobei

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n.$$

Aus diesen Tatsachen folgt, daß eine Funktion $f : U_R \to \mathbf{C}$, die mit Hilfe der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

definiert wird (wobei $R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}}$ der Konvergenzradius der Reihe ist), differenzierbar ist und daß gilt:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

(Bemerke: der Konvergenzradius dieser Reihe ist auch R, da $n^{\frac{1}{n}} \to 1$). U_R bezeichnet den offenen Kreis um 0 mit Radius R).

Zusammenfassend: Jede konvergente Taylorreihe ist im Inneren ihres Konvergenzkreises analytisch.

Beispiele. Die Funktionen exp, sin, cos sind auf ganz $\mathbf{C}$ und $\ln(1+z)$ ist auf U_1 komplex differenzierbar. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \exp z &= \exp z \\ \frac{d}{dz} \cos z &= -\sin z \\ \frac{d}{dz} \sin z &= \cos z \\ \frac{d}{dz} \ln(1+z) &= \frac{1}{1+z} \quad \big(|z| < 1\big) \end{aligned}$$

Wir betrachten jetzt die Beziehungen zwischen dem Begriff der komplexen Differenzierbarkeit von f und Glattheitseigenschaften der Funktionen u und v (wobei

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)\,).$$

Beispiel. Für $f(z) = z^2$ gilt: $u(x,y) = x^2 - y^2$, $v(x,y) = 2xy$.
Für $f(z) = e^z$ gilt: $u(x,y) = e^x \cos y$, $v(x,y) = e^x \sin y$.

Es stellt sich heraus, daß Komplexdifferenzierbarkeit viel mehr beinhaltet als die Differenzierbarkeit von u und v (als Funktionen von x und y).

Satz 5 *Falls f auf einem Gebiet U komplex differenzierbar ist, dann sind u und v reell-differenzierbar. Außerdem gelten folgende Beziehungen:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

(das sind die sogenannten **Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen**. *Sie bedeuten, daß die Jacobi-Matrix*

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

die Matrix einer direkten Ähnlichkeit ist).

Daraus folgt, daß sowohl u als auch v harmonisch sind, d.h. Lösungen der Laplace'schen Gleichung $\Delta u = 0$. Denn es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(-\frac{\partial v}{\partial x}\Big) \\ &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0. \end{aligned}$$

(Wir nehmen stillschweigend an, daß u und v zweimal stetig differenzierbar sind. Dies gilt in der Tat, wie wir sehen werden).
Umgekehrt gilt: Falls u und v reelle stetig differenzierbare Funktionen auf dem Gebiet U sind, die die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen erfüllen, dann ist die Funktion

$$f : z \mapsto u(x,y) + iv(x,y)$$

komplex differenzierbar und es gilt:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \Big(\frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}\Big).$$

Beweis. Wir nehmen zunächst an, daß f differenzierbar ist. Sei $z_0 \in U$ und $f'(z_0) = a+ib$. Dann gilt:

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x_0+h_1, y_0+h_2) - u(x_0,y_0)}{h_1+ih_2} + i\frac{v(x_0+h_1, y_0+h_2) - v(x_0,y_0)}{h_1+ih_2}\right] = a+ib \quad (h = h_1+ih_2).$$

Setzen wir $h_2 = 0$, so sehen wir, daß $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial v}{\partial x}$ existieren und es gilt:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} = a, \quad \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} = b.$$

Ähnlicherweise existieren $\frac{\partial u}{\partial y}$ bzw. $\frac{\partial v}{\partial y}$ und es gilt:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = -b, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = a.$$

Wir nehmen jetzt umgekehrt an, daß u, v stetig differenzierbar sind und die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen erfüllen. Wir berechnen

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

o.V.d.A. nehmen wir an, daß $z = 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}\big(f(z+h)-f(z)\big) &= \frac{1}{h}\big(f(h)-f(0)\big) \\
&= \frac{u(h_1,h_2)+iv(h_1,h_2)-\big(u(0,0)+iv(0,0)\big)}{h_1+ih_2} \\
&= \frac{1}{h_1+ih_2}\big[(u(h_1,h_2)-u(0,0)\big] + \frac{i}{h_1+ih_2}\big[(v(h_1,h_2)-v(0,0)\big].
\end{aligned}$$

Es gilt nun

$$\begin{aligned}
u(h_1,h_2)-u(0,0) &= \big(u(h_1,h_2)-u(0,h_2)\big)+\big(u(0,h_2)-u(0,0)\big) \\
&= h_1\,\frac{\partial u}{\partial x}\,(sh_1,h_2)+h_2\,\frac{\partial u}{\partial y}\,(0,th_1) \quad \big(s,t\in[0,1]\big) \\
&= h_1\,\left[\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)+\rho_1(h_1,h_2)\right]+h_2\,\left[\frac{\partial u}{\partial y}(0,0)+\rho_2(h_1,h_2)\right]
\end{aligned}$$

wobei $\lim_{h\to 0}\rho_1(h) = \lim_{h\to 0}\rho_2(h) = 0$. In ähnlicher Weise gilt:

$$v(h_1,h_2)-v(0,0) = h_1\,\left(\frac{\partial v}{\partial x}(0,0)+\rho_3\right)+h_2\,\left(\frac{\partial v}{\partial y}(0,0)+\rho_4\right)$$

wobei $\lim_{h\to 0}\rho_3 = \lim_{h\to 0}\rho_4 = 0$. Wir setzen $a = \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial v}{\partial y}(0,0)$, $b = \frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(0,0)$ und berechnen $\frac{1}{h}\big(f(h)-f(0)\big)-(a+ib)$. Dafür bekommen wir

$$\frac{(h_1-ih_2)\Big[\big(h_1(a+\rho_1)+h_2(-b+\rho_2)\big)+i\big(h_1(b+\rho_3)+h_2(a+\rho_4)\big)\Big]}{h_1^2+h_2^2}-(a+ib).$$

Dieser Ausdruck ergibt den Wert

$$\frac{\rho_1 h_1^2+h_1h_2(\rho_2+\rho_3)+h_2^2\rho_4}{h_1^2+h_2^2}$$

der mit $h\to 0$ gegen 0 konvergiert. Q.E.D.

■

Analytische Funktionen und Kurvenintegrale

Wir werden jetzt zeigen, daß die Differenzierbarkeit einer Funktion f in engem Zusammenhang zu ihrem Verhalten gegenüber Kurvenintegralen steht.

Satz 6 *Sei $f : U \to \mathbf{C}$ eine stetige Funktion, die eine Stammfunktion besitzt (d.h. es existiere eine analytische Funktion F auf U, sodaß $F' = f$). Dann gilt:*

$$\int_{c_1} f(z)\,dz = \int_{c_2} f(z)\,dz$$

falls c_1 und c_2 Kurven mit den gleichen Anfangs- und Endpunkten in U sind. Insbesondere gilt für jede geschlossene Kurve in U, daß $\int_c f(z)\,dz = 0$.

Beweis. Sei F eine Stammfunktion von f. Wir zeigen:

$$\int_c f(z)\,dz = F\big(c(b)\big) - F\big(c(a)\big).$$

Die Aussagen des Satzes folgen dann sofort.
Es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_c f(z)\,dz &= \int_c F'(z)\,dz \\
&= \int_a^b F'\big(c(t)\big)c'(t)\,dt \\
&= \int_a^b \frac{d}{dt}F\big(c(t)\big)\,dt \\
&= F\big(c(t)\big|_{t=a}^{b} \\
&= F\big(c(b)\big) - F\big(c(a)\big).
\end{aligned}$$

■

Die Umkehrung dieses Satzes gilt ebenfalls:

Satz 7 *Falls $f : U \to \mathbf{C}$ eine stetige Funktion ist, mit der Eigenschaft, daß*

$$\int_c f(z)\,dz = 0$$

für jede geschlossene Kurve c in U, dann besitzt f eine Stammfunktion, und zwar die Funktion

$$F : z \mapsto \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta$$

(z_0 ein fester Punkt aus U). (Es genügt sogar, daß f die Bedingung $\int_c f(z)\,dz = 0$ für den Rand c jedes Dreiecks Δ in U erfüllt.)

Beweis. Gemäß den Voraussetzungen ist die Funktion

$$F : z \mapsto \int_c f(\zeta)\,d\zeta$$

wohldefiniert, wobei c eine beliebige Kurve von z_0 nach z ist. Wir zeigen: F ist eine Stammfunktion von f. Sei $z \in U$ und wähle $\delta > 0$ so klein, daß der offene Kreis $U(z,\delta) \in U$ mit Mittelpunkt z und Radius δ in U enthalten ist. Für $|h| < \delta$ gilt:

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_z^{z+h} f(\zeta)\,d\zeta = \int_0^1 f(z+th)dt \to f(z) \text{ für } h \to 0.$$

Q.E.D.

■

Ohne Beweis formulieren wir einen der wichtigsten Sätze der Funktionentheorie, der sagt, daß jede analytische Funktion f auf einem "einfachen" Gebiet U eine Stammfunktion besitzt.

Satz 8 *Sei U offen und konvex, $z_0 \in U$, $f : U \to \mathbf{C}$ stetig auf U und holomorph auf $U \setminus \{z_0\}$. Dann besitzt f eine Stammfunktion und es gilt daher*

$$\int_c f(z)\, dz = 0$$

für jede geschlossene Kurve in U.

Beweis. Wir wählen einen Punkt z_1 aus U und definieren

$$F(z) = (z - z_1) \int_0^1 f\big(z_1 + t(z - z_1)\big) dt.$$

Aus dem vorhergehenden Satz und dem Hilfssatz folgt, daß F differenzierbar ist und $F' = f$.

■

Der gleiche Beweis ist auch für sogenannte **sternförmige** Gebiete U gültig (wobei U bzgl. z_0 sternförmig ist, falls für $z \in U$ und $t \in [0, 1]$ gilt:

$$z_0 + t(z - z_0) \in U \text{).}$$

Bemerkung. Dieser Satz gilt sogar für sogenannte einfach zusammenhängende Gebiete (informelle Definition: U besteht aus einem Stück und besitzt keine Löcher).

Satz 9 *Falls U ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist und $f : U \to \mathbf{C}$ analytisch, dann gilt:*

$$\int_c f(z)\, dz = 0$$

für jede geschlossene Kurve c in U.

Die Cauchy'sche Integralformel für Kreise: Wir verwenden folgenden Hilfssatz:

Lemma 10 *Sei c der Kreis mit Radius r und Mittelpunkt z_0 (d.h. $c(t) = z_0 + re^{it}$ $\big(t \in [0, 2\pi]\big)$. Dann gilt:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{1}{\zeta - z_0}\, d\zeta = \begin{cases} 1 & \text{falls } |z - z_0| < r \\ 0 & \text{falls } |z - z_0| > r. \end{cases}$$

Beweis. Siehe Übungen.

■

Satz 11 *(Cauchy'sche Integralformel:) Sei f eine analytische Funktion auf dem Gebiet U, z_0 ein Punkt aus U und $R > 0$ so, daß $U(z, R) \subseteq U$. Sei $r < R$. Dann gilt:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \quad \big(|z - z_0| < r\big)$$

wobei c der Kreis $c(t) = z + re^{it}$ $\big(t \in [0, 2\pi]\big)$.

Beweis. Betrachte die Funktion

$$g : \zeta \to \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} & (\zeta \neq z) \\ f'(z) & (\zeta = z) \end{cases}$$

g ist analytisch auf $U \setminus \{z\}$ und stetig auf U (und daher auf der konvexen Menge $U(z,R)$). Es gilt daher:

$$\int_c g(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

und damit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta &= \frac{1}{2\pi i}\int_c g(\zeta)\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta \\ &= 0 + f(z)\frac{1}{2\pi i}.2\pi i \\ &= f(z). \end{aligned}$$

Q.E.D.

■

Bemerkung. Man kann die Cauchy'sche Integralformel auch in folgender Weise schreiben:

$$f(z) = \int_0^1 f(z + re^{2\pi i t})\, dt.$$

In der Tat: Sei $c(t) = z + r.e^{2\pi i t}$, $t \in [0,1]$. Dann ist $c'(t) = 2\pi i r e^{2\pi i t}$ und daher

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{f(z + r.e^{2\pi i t})}{r.e^{2\pi i t}}.2\pi i r.e^{2\pi i t}\, dt \\ &= \int_0^1 f(z + r.e^{2\pi i t})\, dt. \end{aligned}$$

Dies erlaubt folgende Interpretation der Cauchy'schen Integralformel: Der Wert $f(z)$ einer analytischen Funktion auf $U(z,R)$ ist für $0 < r < R$ gleich dem Mittelwert der Werte $f(z+r.e^{2\pi i t})$ entlang dem Kreis um z mit Radius r. Wenn man den Real- und Imaginärteil von f betrachtet, erhält man die entsprechende Aussage für harmonische Funktionen.
Aus der Cauchy'schen Integralformel folgt die verblüffende Tatsache, daß jede analytische Funktion lokal als Taylorreihe darstellbar ist. (Dieses entscheidende Merkmal der komplexen Funktionentheorie steht in krassem Gegensatz zur reellen Theorie: Schon Cauchy hat bemerkt, daß die Funktion $e^{\frac{-1}{t^2}} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ unendlich oft differenzierbar ist, sich aber nicht um den Nullpunkt als Taylorreihe darstellen läßt.)

Satz 12 *Sei $f : U \to \mathbf{C}$ analytisch, $z_0 \in U$, $r > 0$, sodaß $U(z_0, r) \subset U$. Dann gilt:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \big(z \in U(z_0; r)\big)$$

wobei

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta$$

und $c(t) = z_0 + r'e^{it}$ $\big(t \in [0, 2\pi]\big)$ mit $0 < r' < r$.

Beweis. O.V.d.A. kann man annehmen, daß $z_0 = 0$. Es gilt, für $|z| < r'$,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{z}{\zeta}\Big)^n\,d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi_i}\int \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta\right) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \end{aligned}$$

mit a_n wie oben.

∎

Das nächste Korollar unterscheidet wieder die komplexe Funktionentheorie radikal von der reellen Theorie:

Korollar 13 *Falls $f : U \to \mathbf{C}$ analytisch (d.h. also einmal differenzierbar), dann ist f unendlich oft differenzierbar.*

Man sieht sofort, daß $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ d.h. die Reihe $\sum a_n(z - z_0)^n$ ist tatsächlich die Taylorreihe von f. Daraus folgt, daß eine stetige Funktion f mit Stammfunktion automatisch analytisch ist.

Korollar 14 (der Satz von MORERA): *Sei f eine stetige Funktion auf einem Gebiet U, sodaß*

$$\int_c f(z)\,dz = 0$$

für jede geschlossene Kurve in U. Dann ist f analytisch.

Beweis. Wir wissen, daß f eine Stammfunktion F besitzt, d.h. $f = F'$. Nach dem Korollar ist F unendlich oft differenzierbar und damit auch f.

∎

Existenz einer harmonisch konjugierten Funktion: Sei U ein Gebiet, worauf jede analytische Funktion eine Stammfunktion besitzt (z.B. eine konvexe oder – allgemeiner – eine einfach zusammenhängende Menge). Sei $u : U \to \mathbf{R}$ harmonisch. Dann existiert ein $v : U \to \mathbf{C}$, sodaß $f = u + iv$ analytisch. (Damit ist jede harmonische Funktion auf U der Realteil einer analytischen Funktion. Insbesondere ist jede harmonische Funktion auf U unendlich oft differenzierbar.)
Beweis. Die Funktion

$$\phi(z)\phi(x + iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$$

ist analytisch. Denn ϕ ist stetig und erfüllt die Bedingungen des Satz von Morera. (Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_c \phi(z)\,dz &= \int_c (\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy) + i\int_c \left(-\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy\right) \\ &= \int_S \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\,dx\,dy + i\int_S \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\,dx\,dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

(S ist das von c berandete Gebiet.) (Wir haben den Satz von Green verwendet.)
Sei f eine Stammfunktion von ϕ. Die Funktion f erfüllt die obige Bedingung.
Wir bemerken noch, daß f bis auf eine komplexe Konstante eindeutig durch μ bestimmt ist. (Das folgt aus den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen).

■

Das Beispiel der Funktion

$$z \mapsto \ln |z|$$

von $\mathbf{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ zeigt, daß nicht jede harmonische Funktion eine konjugierte Funktion besitzt. ($\mathbf{C} \setminus \{0\}$ ist nicht sternförmig – auch nicht einfach zusammenhängend.)

Wir betrachten noch einmal die Gleichung

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta$$

und differenzieren beide Seiten k-mal. Daraus erhalten wir die verallgemeinerte Cauchy'sche Integralformel

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} \, d\zeta$$

und somit die Abschätzung

$$\left| f^{(k)}(z) \right| \leq \frac{Mk!}{r^k} \qquad \text{wobei} \qquad M = \sup\Big\{ \left| f(\zeta) \right| \Big\}.$$

Wir können nun den bekannten **Satz von LIOUVILLE** formulieren:

Satz 15 *Falls $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ eine beschränkte ganze (d.h. auf ganz $\mathbf{C}$ analytische) Funktion ist, dann ist f konstant.*

Beweis. Da $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$, genügt es zu zeigen, daß $f^{(k)}(0) = 0$ $(k \geq 1)$. Aber wir haben die Abschätzung

$$\left| f^{(k)}(0) \right| \leq \frac{Mk!}{r^k} \qquad \text{wobei} \qquad M = \sup\Big\{ \left| f(z) \right| : z \in \mathbf{C} \Big\}$$

Für $k > 0$ gilt $\frac{Mk!}{r^k} \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$. Q.E.D.

■

Der Fundamentalsatz der Algebra läßt sich leicht aus dem Satz von Liouville ableiten (siehe Übungen).
Die Laurentreihe: Sei f analytisch in einem ringförmigen Gebiet $\big\{ z : r < |z| < R \big\}$, wobei $0 \leq r < R < \infty$. Dann gilt:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

mit $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_{r'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} \, d\zeta$ $(r < r' < R)$.

Beweis. Sei $z \in \{z : r < |z| < R\}$ und wähle r', R', sodaß

$$r < r' < |z| < R' < R.$$

Wir integrieren $\frac{1}{2\pi i} f(\zeta)\zeta - z$ entlang einer geeigneten Kurve c (siehe Vorlesung). Es gilt

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c_{R'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{c_{r'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{c_{R'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{c_{r'}} \frac{f(\zeta)}{z - zeta}\, d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{c'_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^n \int_{c_{r'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta}\sum_{n=-1}^{-\infty}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^n\right] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n,
\end{aligned}$$

wobei

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{cC_{r'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}$$

(dieses Integral ist von $r' \in]r, R[$ unabhängig).

■

Geometrische Eigenschaften – Konforme Abbildungen

Konforme (oder winkeltreue) Abbildungen: Das sind bijektive analytische Abbildungen von einem Gebiet U auf ein Gebiet V. Es gilt dann, daß $f'(z) \neq 0$ und daß f^{-1} ebenfalls analytisch und daher konform ist. Der Grund für die Bezeichnung liegt im folgenden Satz:

Satz 16 *Sei f wie oben und seien c_1, c_2 Kurven in U, die sich im Punkt z_0 schneiden. Die Kurven $\widetilde{c}_1 = f \circ c_1$ und $\widetilde{c}_2 = f \circ c_2$ schneiden sich dann im Punkt $f(z_0)$ und es gilt:*

$$\textit{Winkel zwischen } c_1 \textit{ und } c_2 = \textit{Winkel zwischen } \widetilde{c}_1 \textit{ und } \widetilde{c}_2$$

Beweis. o.V.d.A. nehmen wir an, daß

$$z_0 = c_1(t_0) = c_2(t_0).$$

Der Vektor $\dot{c}_1(t)$ (bzw. $\dot{c}_2(t)$) ist proportional zu dem Tangentialvektor an der Kurve c_1 (bzw. c_2) an der Stelle $c_1(t)$ (bzw. $c_2(t)$). Es gilt:

$$\dot{\widetilde{c}}(t) = f'\big(c(t)\big)\dot{c}(t)$$

oder, in Matrizenschreibweise:

$$\begin{bmatrix} \dot{\widetilde{c}}_1(t) \\ \dot{\widetilde{c}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \end{bmatrix}$$

Aber dies ist die Matrix einer Drehstreckung - daraus folgt, daß der Winkel konstant ist. Für den Punkt t_0, an dem $c_1(t_0) = c_2(t_0) = z_0$ gilt daher, daß der Winkel zwischen c_1 und c_2 gleich dem zwischen $\widetilde{c}_1$ und $\widetilde{c}_2$ im Punkt $f(z_0)$ ist.

Umgekehrt gilt: Falls $f = u + iv$ ein glatter Diffeomorphismus von U auf V (beide offene Teilmengen in $\mathbf{R}^2$), sodaß f winkeltreu ist, dann ist f entweder

a) analytisch (falls orientierungserhaltend), oder

b) der Gestalt $z \to \overline{g}(z)$ (wobei g analytisch) (falls nicht orientierungserhaltend).

■

Beweisskizze: (für orientierungserhaltende Abbildungen) Wir verwenden die Tatsache, daß die einzigen winkeltreuen und orientierungserhaltenden linearen Abbildungen auf $\mathbf{R}^2$ die Drehstreckungen sind. Diese haben Matrizen der Gestalt

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \quad (a^2 + b^2 \neq 0)$$

Es folgt aus den Voraussetzungen, daß die Jacobi Matrix des Vektorfeldes (u, v) immer diese Gestalt hat. Das bedeutet aber, daß u und v die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen erfüllen.

Anwendung: Betrachte eine Familie von Kurven, die Equipotentiale bzgl. eines Skalarfeldes u auf $\mathbf{R}^2$ sind. Falls u harmonisch, dann existiert ein harmonisch konjugiertes v zu u (d.h. so, daß $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analytisch ist, wobei wir $\mathbf{C}$ mit $\mathbf{R}^2$ identifizieren). Falls das Vektorfeld $X = (u, v)$ so ist, daß $f'(z) \neq 0$ $(z \in \mathbf{C})$, dann ist f lokal konform. Insbesondere bilden die Urbilder der Koordinatenlinien (d.h. die Kurven $\{(x, y)\} \in \mathbf{R}^2 : u(x, y) = c\}$ bzw. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : v(x, y) = d\}$) zwei orthogonale einparametrige Kurvenscharen.

Beispiele.

1. $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$
   $v(x, y) = 3x^2y - y^3$ (entspricht der Funktion $z \mapsto z^3$)
2. $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$
   $v(x, y) = \frac{-y}{z^2+y^2}$ (entspricht der Funktion $z \mapsto \frac{1}{z}$).
3. $u(x, y) = \sin x \cosh\ y$
   $v(x, y) = \cos x \sinh y$ (entspricht der Funktion $z \mapsto \sin z$).

Die Bilder der Koordinatenlinien $x = c$ bzw. $y = d$ bzgl. letzter Abbildung sind die Kurvenfamilien

$$\frac{u^2}{\sin^2 c} - \frac{v^2}{\cos^2 c} = 1 \quad \text{(Hyperbeln)}$$

bzw.

$$\frac{u^2}{\cosh^2 d} + \frac{v^2}{\sinh^2 d} = 1 \quad \text{(Ellipsen)}$$

Um die Wirkung einer konformen Abbildung zu veranschaulichen, ist es oft zweckmäßig, die Bilder bzw. Urbilder der Koordinatenlinien $x = c, y = d$ (bzw. $u = c, v = d$) zu betrachten, d.h. die Kurven

$$\begin{array}{lll} t & \mapsto & \big(u(x_0, t), v(x_0, t)\big) \quad \text{(das Bild von} \quad x = x_0) \\ t & \mapsto & \big(u(t, y_0), v(t, y_0)\big) \quad \text{(das Bild von} \quad y = y_0) \end{array}$$

bzw.

$$\begin{array}{lll} \big\{(x, y) & : & u(x, y) = c\big\} \quad \text{(das Urbild von} \quad u = c) \\ \big\{(x, y) & : & v(x, y) = d\big\} \quad \text{(das Urbild von} \quad v = d) \end{array}$$

Beispiel. $z \mapsto z^2$.

$$\begin{aligned} u(x,y) &= x^2 - y^2 \\ v(x,y) &= 2xy. \end{aligned}$$

d.h. die Urbilder sind die Familien $x^2 - y^2 = c$ bzw. $xy = \frac{d}{2}$ von Hyperbeln. Die Bilder der Koordinationslinien $x = x_0$ bzw. $y = y_0$ bzgl. der Abbildung $z \mapsto z^2$ sind die Parallelen

$$\begin{aligned} t &\mapsto (x_0^2 - t^2, 2x_0 t) \\ \text{bzw. } t &\mapsto (t^2 - y_0, 2tx_0) \end{aligned}$$

Beispiel. $f(z) = \frac{1}{z}$.

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

Der Kreis $|z| = c$ wird auf dem Kreis $|w| = \frac{1}{c}$ abgebildet. Die Geraden $\arg\ z = d$ auf die Gerade $\arg\ z = -d$.

Elementare konforme Abbildungen: Das sind konforme Abbildungen, die mit elementaren Funktionen explizit angegeben werden können, etwa $z \mapsto z^\alpha$, $z \mapsto \ln\ z$, $z \mapsto e^z$, Möbiustransformationen.

Beispiele.

1. Möbiustransformationen: Das sind Transformationen der Gestalt

   $$T = T_{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}.$$

   Z.B. bildet diese Transformation $H_+ = \{z \in \mathbf{C} : \text{Im } z > 0\}$ auf $U = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ ab, genau dann, wenn T die Gestalt

   $$T : z \mapsto e^{i\vartheta} \frac{z - z_1}{z - \overline{z}_1} \quad (\vartheta \in \mathbf{R},\ \text{Im } z_1 > 0)$$

   hat.

   T bildet U auf U ab $\Leftrightarrow T : z \mapsto e^{i\vartheta} \frac{z - z_0}{\overline{z}_0 z - 1}$ wobei $|z_0| < 1$. (Diese Abbildung bildet 0 in z_0 ab.)

   $T : z \mapsto k\frac{z-a}{z-b}$ führt a in 0, b in ∞ über. Die Urbilder der Geraden: $\arg\ w = c$ sind Kreise durch a, b. Die Urbilder der Kreise $w = \rho$ sind ebenfalls Kreise (die zur obigen Schar orthogonal sind). Das sind die Kreise von Apollonius, mit Gleichungen

   $$\left| \frac{z-a}{z-b} \right| = \text{konst.}$$

   (Diese zwei Kreisscharen bilden das sogenannte STEINER'sche Netzwerk).

2. $z \mapsto z^\alpha$:

   $z \mapsto z^2$ bildet $\left\{z : \arg(z) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\right\}$ auf $\{z : \arg(z) \in]-\pi, \pi[\}$ ab.

   $z \to z^\alpha$ bildet die Geraden $\arg\ z = c$ auf die Gerade $\arg\ w = \alpha c$, bzw. die Kreise $|z| = d$ auf den Kreis $|w| = d^\alpha$ ab.

3. $z \mapsto \exp\ z$ bildet $\left\{z : \mathrm{Im}(z) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right\}$ auf $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ bzw. $\left\{z : |y| < \frac{\pi}{2}\right\}$ auf $\{w : \mathrm{Re}\ w > 0\}$ ab.

Durch die Zusammensetzung solcher Abbildungen bekommt man kompliziertere konforme Abbildungen, z.B.

$z \mapsto w = e^z$ bildet $\left\{z : |y| < \frac{\pi}{2}\right\}$ auf $\{w : \mathrm{Re}\ w > 0\}$ ab.

$w \mapsto \zeta = \frac{1-w}{1+w}$ bildet $\{w : \mathrm{Re}\ w > 0\}$ auf $U = \big\{\zeta : |\zeta| < 1\big\}$ ab.

Also $z \mapsto \frac{1-e^z}{1+e^z}$ bildet $\left\{z : |\mathrm{Im}\ z| < \frac{\pi}{2}\right\}$ auf U ab. (Bild 19)

Beispiel: Die Möbiustransformation $w_1 = \frac{z+1}{z-1}$ bildet $U_1 = \mathbf{C} \setminus [-1, 1]$ auf $U_2 = \mathbf{C}\big(]-\infty, 0] \cup \{1\}\big)$ ab, $w_2 = \sqrt{w_1}$ bildet U_2 auf $U_3 = \{z \in \mathbf{C}\colon \mathrm{Re}\ z > 0\} \setminus \{1\}$ ab, $w_3 = \frac{w_2-1}{w_2+1}$ bildet U_3 auf $U_4 = \big\{z \in \mathbf{C}\colon 0 < |z| < 1\big\}$ ab. Damit bildet die Zusammensetzeung $z \to w_3\ U_1$ auf U_4 ab.

(Es gilt: $z = \frac{1}{2}\left(w_3 + \frac{1}{w_3}\right)$ bzw. $w_3 : z - \sqrt{z^2 - 1}$, wie man leicht nachrechnet).

Die Urbilder der Kreise $|w_3| = r$ sind die Ellipsen

$$\frac{x^2}{\left[\frac{1}{2}(r + r^{-1})\right]^2} + \frac{y^2}{\left[\frac{1}{2}(r - r^{-1})\right]^2} = 1$$

und die Urbilder der Geraden $\arg w_3 = \vartheta$ sind die Hyperbeläste

$$\frac{x^2}{\cos^2\vartheta} - \frac{y^2}{\sin^2\vartheta} = 1.$$

Harmonische Funktionen - das Dirichlet Problem

Eine wichtige Eigenschaft von analytischen Abbildungen ist, daß sie Lösungen der Laplace'schen Gleichung $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = 0$ in ebensolche überführen, d.h. u harmonisch, g analytisch $\Rightarrow u \circ g$ harmonisch.
Beweisskizze: Sei $u : U \to \mathbf{R}$ harmonisch, $g : V \to U$ analytisch. Sei v eine harmonische Konjugierte zu u, f die analytische Funktion $u + iv$. $f \circ g$ ist analytisch und daher ist $u \circ g = \mathrm{Re}\ f \circ g$ harmonisch.

Das Dirichlet'sche Problem: Seien ein Gebiet G in $\mathbf{C}$ und eine stetige reelle Funktion g auf dem Rand ∂G gegeben. Bestimme f in G, sodaß f stetig auf $\overline{G}$, $\Delta f = 0$ auf G und $f = g$ auf ∂G.

Das Neumann'sche Problem: Seien ein Gebiet G in $\mathbf{C}$ und eine stetige reelle Funktion g auf ∂G ist gegeben. Bestimme f in G, sodaß f stetig auf $\overline{G}$, $\Delta f = 0$ auf G und $\frac{\partial f}{\partial n} = g$ auf ∂G.
Methode: Man bestimmt eine konforme Abbildung ϕ, die G auf $U = \big\{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\big\}$ und ∂G auf ∂U abbildet. Man löst dann das entsprechende Dirichlet'sche oder Neumann'sche Problem für U bezüglich der Funktion $g \circ \phi^{-1}$. Falls f dessen Lösung ist, dann ist $f \circ \phi$ die gesuchte Lösung für G. (Nach dem Riemann'schen Abbildungssatz existiert eine solche konforme Abbildung für jedes einfach-zusammenhängende Gebiet G mit $\partial G \neq \emptyset$). Wir erinnern uns daran, wie wir früher diesen Spezialfall mit Hilfe von

Fourierreihen gelöst haben. Sei u die gesuchte Lösung und v eine konjugierte Funktion zu u (sodaß $f = u + iv$ analytisch ist). Die Funktion f hat eine Taylorentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Am Rand ∂U gilt: $z = e^{i\vartheta}$ – also

$$\begin{aligned}
f(e^{i\vartheta}) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\vartheta} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (b_n + ic_n)(\cos n\vartheta + i \sin n\vartheta) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (b_n \cos n\vartheta - c_n \sin n\vartheta) + i \sum_{n=0}^{\infty} (c_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta),
\end{aligned}$$

wobei $a_n = b_n + ic_n$. Dies führt zu folgendem Lösungsansatz: Sei h die Randfunktion. Wir entwickeln h in eine Fourierreihe

$$h(e^{i\vartheta}) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\vartheta + B_n \sin n\vartheta).$$

Die Koeffizienten b_n und c_n (und daher a_n) werden mit Hilfe des Koeffizientenvergleichs bestimmt, also

$$\begin{aligned}
b_0 &= \frac{1}{2} A_0 \\
b_n &= A_n \ (n \geq 1) \\
c_n &= -B_n \ (n \geq 1) \\
a_n &= b_n + ic_n.
\end{aligned}$$

Die Lösung des Dirichlet Problems ist dann $u = \text{Re } f$, wobei f die analytische Funktion $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ist.