

Thema 2—Die reellen Zahlen

Ausgehend von den natürlichen Zahlen kann man schrittweise die ganzen Zahlen, die Rationalzahlen und die reellen Zahlen konstruieren. Die ersten zwei Konstruktionen sind rein algebraisch und werden hier kurz skizziert. Die dritte Konstruktion ist etwas komplizierter und wird nicht behandelt.

Die ganzen Zahlen: Wir definieren die Menge der ganzen Zahlen \mathbf{Z} als $\mathbf{N} \times \mathbf{N}|_{\sim}$, wobei

$$(m, n) \sim (\bar{m}, \bar{n}) \iff m + \bar{n} = \bar{m} + n.$$

(\sim ist eine **Äquivalenzrelation**. $\mathbf{N} \times \mathbf{N}|_{\sim}$ bezeichnet den entsprechenden Quotientenraum — vgl. die Vorlesung “Lineare Algebra”).

Man erweitert die algebraischen Operationen auf \mathbf{Z} ohne Schwierigkeit wie folgt:

$$[(m, n)] + [(\bar{m}, \bar{n})] = [(m + \bar{m}, n + \bar{n})]$$

$$[(m, n)] \cdot [(\bar{m}, \bar{n})] = [(m \cdot \bar{m} + n \cdot \bar{n}, m \cdot \bar{n} + \bar{m} \cdot n)].$$

($[(m, n)]$ bezeichnet die Äquivalenzklasse, die von (m, n) bestimmt wird).

Wiederum gelten die bekannten Gesetze der Multiplikation und Addition.

Die Rationalzahlen: Die Menge \mathbf{Q} der Rationalzahlen wird als $\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} \setminus \{0\})|_{\sim}$ definiert, wobei

$$(m, n) \sim (\bar{m}, \bar{n}) \iff m \cdot \bar{n} = \bar{m} \cdot n.$$

Die algebraische Operationen werden wie folgt erweitert: $[(m, n)] + [(\bar{m}, \bar{n})] = [(m \cdot \bar{n} + \bar{m} \cdot n, n \cdot \bar{n})]$

$[(m, n)] \cdot [(\bar{m}, \bar{n})] = [(m \cdot \bar{m}, n \cdot \bar{n})]$. Man stellt fest, daß \mathbf{Q} die sogenannten **Körperaxiome** erfüllt:

Axiome der Addition:

$$x + (y + z) = (x + y) + z \text{ für } x, y, z \in \mathbf{Q};$$

$$x + y = y + x \text{ (} x, y \in \mathbf{Q}\text{);}$$

$$x + 0 = 0 + x = x \text{ (} x \in \mathbf{Q}\text{);}$$

zu jedem $x \in \mathbf{Q}$ existiert eine Zahl y , so daß $x + y = 0$.

Axiome der Multiplikation:

$$(xy)z = x(yz) \text{ (} x, y, z \in \mathbf{Q}\text{);}$$

$$xy = yx \text{ (} x, y \in \mathbf{Q}\text{);}$$

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x \text{ (} x \in \mathbf{Q}\text{);}$$

zu jedem $x \neq 0$ in \mathbf{Q} existiert ein Element x^{-1} , so daß $x \cdot x^{-1} = 1$.

Distributivgesetz: $x(y + z) = xy + xz$ ($x, y, z \in \mathbf{Q}$).

Wir sagen dann, daß \mathbf{Q} ein Körper ist. Der Leser wird einige weitere Körper im Laufe der späteren Vorlesungen kennenlernen. (Beispiel: der Körper der komplexen Zahlen). Außerdem Strukturen, die einige, aber nicht alle, der obigen Axiome erfüllen. Beispiel: Schiefkörper—hier verzichten wir auf die Kommutativität der Multiplikation. Das bekannteste Beispiel ist die Menge der Quaternionen.

Zweites Beispiel: Ein **Ring**: Wir verwenden hier die Axiome der Addition, das Distributivgesetz und Axiom (1) der Multiplikation. (Beispiele: die $n \times n$ -Matrizen (Lineare Algebra), die Polynome.)

Q ist ein **geordneter Körper**. Dazu definieren wir sukzessiv die natürlichen Ordnungsstrukturen auf **N**, **Z** und **Q**:

in **N**: $m < n \iff$ es existiert $p \in \mathbf{N}$ mit $n = m + p$;

in **Z**: $[(m, n)] < [(\bar{m}, \bar{n})] \iff m + \bar{n} < \bar{m} + n$.

Für die Ordnung in **Q** bemerken wir zunächst, daß jedes Element eine Darstellung $[(m, n)]$ mit $n > 0$ hat. Falls also $n, \bar{n} > 0$, so definieren wir

$$[(m, n)] < [(\bar{m}, \bar{n})] \iff m \cdot \bar{n} < \bar{m} \cdot n.$$

Q erfüllt folgende weitere Axiome:

Die Anordnungsaxiome:

Für jedes $x \in \mathbf{Q}$ gilt genau eine der Beziehungen: $x > 0, x < 0, x = 0$;

$x > 0, y > 0$ impliziert $x + y > 0$;

$x > 0, y > 0$ impliziert $xy > 0$.

Wir schreiben dann $x < y$, falls $y - x > 0$.

Um zwischen **Q** und **R** zu unterscheiden, brauchen wir ein weiteres Axiom:

Das Vollständigkeitsaxiom: Wir *postulieren* die Existenz eines geordneten Körpers **R**, der folgendes Axiom erfüllt: Sei $A \neq \emptyset$ eine Teilmenge von **R**, die nach oben beschränkt ist (d.h. es existiert ein y , so daß $x \leq y$ für jedes $x \in A$). Dann existiert eine *kleinste* obere Schranke x_0 für A (genannt **Supremum**). Symbolisch: Es existiert x_0 so, daß

$$1) \quad x \in A \text{ impliziert } x \leq x_0$$

und

$$2) \quad \text{für jedes } \epsilon > 0 \text{ existiert } x \in A \text{ so daß } x_0 - \epsilon < x.$$

Wir schreiben $x_0 = \sup A$. Daraus folgt leicht, daß jede nach unten beschränkte Menge A ein Infimum besitzt. In der Tat ist $\inf A = \sup(-A)$, wobei $-A = \{-x : x \in A\}$.

Es ist dies das Axiom, das zwischen **Q** und **R** unterscheidet. Denn **Q** ist nicht ordnungsvollständig.

Philosophisch ist es von Interesse, daß **R** eindeutig durch diese Axiome bestimmt wird.

Übungsbeispiele

1. Zeige das Axiom von Archimedes: Zu jedem $x \in \mathbf{R}$ existiert ein $n \in \mathbf{N}$ mit $n \geq x$.
Daraus folgt: Zu jedem $\epsilon > 0$ aus **R** existiert $n \in \mathbf{N}$ mit $\frac{1}{n} \leq \epsilon$.
2. Zeige: $\sqrt{2}$ und $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ sind irrational.
3. Sei $x > 0$. Zeige: Es existiert eine irrationale Zahl y mit $0 < y < x$.

4. Seien p_1, \dots, p_n positive Zahlen mit $p_1 + \dots + p_n = 1$. Dann gilt:

$$\min(a_1, \dots, a_n) \leq p_1 a_1 + \dots + p_n a_n \leq \max(a_1, \dots, a_n).$$

5. Seien $a, b > 0$. Zeige:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

6. Seien a_1, \dots, a_n positiv. Zeige:

$$\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}.$$

7. Seien a und b die Nullstellen des Polynomes $x^2 - x - 1$ und setze $x_n = \frac{(a^n - b^n)}{a - b}$.
Zeige: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ und $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$.

8. Seien $(a_k)_{k=1}^n$ und $(b_k)_{k=1}^n$ endliche Folgen von reellen Zahlen. Berechne die Diskriminante der quadratischen Funktion

$$t \mapsto \sum_{k=1}^n (a_k t + b)^2.$$

Beweise damit die **Cauchy-Schwarz Ungleichung**

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right).$$

9. Seien x_1, \dots, x_n positive Zahlen. Zeige:

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right) \geq n^2.$$

10. Beweise die Identität von Lagrange:

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) - \sum_{1 \leq k < j \leq n} (a_k b_j - a_j b_k)^2.$$

(Konsequenz: Ein zweiter Beweis der Cauchy-Schwarz Ungleichung).

11. Falls $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ und $b_1 \geq \dots \geq b_n$, zeige:

$$\left(\sum_k a_k \right) \left(\sum_k b_k \right) \leq n \sum_k a_k b_k.$$

12. Zeige: die Menge aller reellen Zahlen der Gestalt $a + b\sqrt{2}$ ($a, b \in \mathbf{Q}$) bildet einen Körper.

13. Die Familie aller reellen Polynome bildet einen Ring. Die Familie aller rationalen Funktionen bildet einen Körper. Die Familie aller $n \times n$ Matrizen bildet einen Ring.

14. Für eine Zahl x setze

$$|x| = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x \leq 0). \end{cases}$$

Zeige:

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad |xy| = |x| \cdot |y| \quad \text{und} \quad \sup\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|).$$

Was ist die entsprechende Formel für $\inf\{x, y\}$?

15. Zeige:

$$|a| - |b| \leq ||a| - |b|| \leq |a - b|$$

bzw.

$$||a| - |b|| \leq |a + b|$$

($a, b \in \mathbf{R}$).

16. Zeige:

$$\left| \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right| \geq 2$$

($a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$).

17. Sei n eine natürliche Zahl, die nicht das Quadrat eines $p \in \mathbf{N}$ ist. Dann ist \sqrt{n} irrational.

18. Seien a, b, c, d reelle Zahlen mit $b > 0$, $d > 0$, sodaß $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Zeige: $\frac{a+c}{b+d}$ liegt zwischen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$.

19. Berechne $\sup A$, $\inf B$, wobei

$$A = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n : n \in \mathbf{N} \right\}$$

bzw.

$$B = \left\{ (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n} \right) : n \in \mathbf{N} \right\}.$$

20. Seien A, B Teilmengen von \mathbf{R} . Zeige:

$$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B).$$

Was ist der entsprechende Ausdruck für $\inf(A \cup B)$? Gilt eine ähnliche Formel für $\sup(A \cap B)$?

21. Seien A und B Teilmengen von \mathbf{R} . Zeige: Es gilt $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ aber nicht immer $\sup(AB) = \sup A \cdot \sup B$. Für welche Mengen gilt diese Formel? Finde eine Formel, die im allgemeinen Fall gültig ist.

22. Seien a und b positive Zahlen. Zeige: $\sqrt{2}$ liegt zwischen $\frac{a}{b}$ und $\frac{a+2b}{a+b}$. (Welche der zwei liegt näher bei $\sqrt{2}$?)