Thema 3—Folgen, Grenzwerte

Definition 1 *Eine* **Folge** *von reellen Zahlen ist eine Abbildung von* $\mathbf{N}$ *in* $\mathbf{R}$ *d.h. jedem* $n \in \mathbf{N}$ *ist eine Zahl* a_n *zugeordnet. Wir schreiben*

$$(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \text{ oder } (a_1, a_2, a_3, \dots)$$

für eine solche Folge.

Beispiele.

die konstante Folge $(a, a, \dots)$ d.h. $a_n = a$ für jedes n;

$a_n = \frac{1}{n}$ für jedes n $((1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots))$;

rekursiv definierte Folgen: Das berühmteste Beispiel ist die Fibonacci-Reihe

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots).$$

Das ist jene Folge (a_n), die durch

1) $$a_1 = a_2 = 1$$

2) $$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n > 2)$$

definiert wird.

Folgen entstehen oft als suksessive Versuche, eine gegebene Zahl exakt auszurechnen. Der Erfolg eines solchen Versuches ist in der folgenden Definition charakterisiert:

Definition 2 *Eine Folge* (a_n) *reeller Zahlen konvergiert gegen* a *(in Zeichen:* $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ *oder* $a_n \to a$*), falls gilt: zu jedem* $\epsilon > 0$ *existiert* $N = N(\epsilon)$*, so daß* $|a_n - a| < \epsilon$*, falls* $n \geq N$*.*

Beispiele. Die konstante Folge $(a, a, \dots)$ konvergiert gegen a.
Die Folge $(\frac{1}{n})$ konvergiert gegen 0.
Die Folge $(-1)^n$ konvergiert nicht.
Wir sammeln einige triviale Eigenschaften von Limiten in einem

Satz 3 *Der Limes ist eindeutig d.h.* $a_n \to a$ *und* $a_n \to b$ *impliziert* $a = b$;

Der Limes ist additiv d.h. $a_n \to a$ *und* $b_n \to b$ *impliziert* $a_n + b_n \to a + b$;

Der Limes ist multiplikativ d.h. $a_n \to a$ *und* $b_n \to b$ *impliziert* $a_n . b_n \to a.b$.

Falls eine Folge (a_n) *von nicht-verschwindenden reellen Zahlen gegen* $a \neq 0$ *konvergiert, dann gilt* $\lim \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$.

Es ist eine Konsequenz der Ordnungsvollständigkeit der reellen Zahlen, daß Folgen, die konvergieren sollen, dies auch *tun.*

Definition 4 *Ein Folge* (a_n) *heißt* **Cauchy-Folge***, falls gilt: Zu jedem* $\epsilon > 0$ *existiert ein* $N \in \mathbf{N}$*, so daß*

$$|a_n - a_m| < \epsilon \text{ für alle } n, m \geq N.$$

Es ist leicht zu sehen, daß jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist.

Beweis. Sei $\lim a_n = a$. Wähle $N \in \mathbf{N}$, so daß $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$, falls $n \geq N$. Dann gilt, für $m, n \geq N$,

$$|a_m - a_n| = |(a_m - a) - (a_n - a)| \leq |a_m - a| + |a_n - a| \leq \epsilon.$$

■

Beispiel. Betrachte einen unendlichen Dezimalbruch

$$N, a_1 a_2 \ldots\ldots = N + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots \qquad (0 \leq a_i \leq 9).$$

Dann bilden die Approximanten

$$A_n := N + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k},$$

eine Cauchy-Folge.

Der entscheidende Grund, warum man Analysis in $\mathbf{R}$ und nicht in $\mathbf{Q}$ betreibt, liegt in der sogenannten **Vollständigkeit** von $\mathbf{R}$:

Satz 5 *In* $\mathbf{R}$ *konvergiert jede Cauchy-Folge.*

Dieser Satz wird später bewiesen.

An dieser Stelle erweitern wir den Konvergenzbegriff, um Konvergenz gegen ∞ behandeln zu können.

Definition 6 *Eine Folge* (a_n) **konvergiert gegen** ∞ *(in Zeichen:* $a_n \to \infty$ *oder* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$*), wenn*

$$\text{zu jedem } K > 0 \text{ existiert } N \in \mathbf{N}, \text{ so daß } a_n \geq K \text{ falls } n \geq N.$$

$a_n \to -\infty$ *wird ähnlich definiert.*

Beispiele. Für die Folge (x^n) gilt: Falls $|x| < 1$, dann konvergiert die Folge gegen 0. Falls $x = 1$, dann konvergiert die Folge gegen 1. Falls $x = -1$ konvergiert die Folge nicht. Falls $x > 1$, dann konvergiert die Folge gegen ∞. Falls $x < -1$, dann konvergiert die Folge nicht.

Was Konvergenz betrifft, ist das Verhalten von **monotonen** Folgen besonders einfach:

Definition 7 *Eine Folge* (a_n) *ist*

monoton wachsend, *falls* $a_n \leq a_{n+1}$ *für jedes* $n \in \mathbf{N}$;

streng monoton wachsend, *falls* $a_n < a_{n+1}$ *für jedes* $n \in \mathbf{N}$;

monoton fallend, *falls* $a_n \geq a_{n+1}$ *für jedes* $n \in \mathbf{N}$;

streng monoton fallend, *falls* $a_n > a_{n+1}$ *für jedes* $n \in \mathbf{N}$.

Definition 8 *Eine Folge* (a_n) *heißt*

beschränkt, *falls* $K > 0$ *existiert, so daß für* $n \in \mathbf{N}$ *gilt:* $|a_n| < K$; **nach oben beschränkt**, *falls* $K > 0$ *existiert, so daß für* $n \in \mathbf{N}$ *gilt:* $a_n < K$;

Satz 9 *Sei* (a_n) *eine monoton wachsende Folge. Falls* (a_n) *nach oben beschränkt ist, dann konvergiert die Folge gegen* $\sup\{a_n\}$. *Wenn* (a_n) *nicht beschränkt ist, dann konvergiert die Folge gegen* ∞.

Beweis. Wir zeigen: Ist (a_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt, dann gilt: $a_n \to a = \sup\{a_n\}$. Denn sei $\epsilon > 0$. Es existiert $N \in \mathbf{N}$ mit $a_N > a - \epsilon$. Dann gilt aber, für $n \geq N$,

$$a - \epsilon \leq A_N \leq a_n \leq a < a + \epsilon$$

d.h. $|a_n - a| < \epsilon$.

■

Beispiele.

I. **b-adische Entwicklungen:** Sei b eine natürliche Zahl ≥ 2. Eine b-adischer Bruch ist ein Limes der Gestalt $\lim A_n$, wobei

$$A_n = N + \sum_{k=1}^{n} a_k b^{-k}$$

Dabei ist (a_k) eine Folge natürlichen Zahlen, so daß $0 \leq a_k \leq b - 1$ und $N \in \mathbf{N}$. Es ist klar, daß (A_n) eine Cauchy-Folge ist. Nach der Vollständigkeit, konvergiert sie gegen eine reelle Zahl x. Umgekehrt gilt:

Satz 10 *Jede reelle Zahl x läßt sich als b-adischer Bruch entwickeln.*

Die wichtigsten Fälle sind

$b = 10$ —Dezimalentwicklung;

$b = 2$—Dyadische Entwicklung;

$b = 60$—Sexagesimalentwicklung;

$b = 12$—Duodezimalentwicklung.

Beispiel. Als Beispiel einer Anwendung des Satzes 9 erwähnen wir die Tatsache, daß der Limes

$$\lim(1 + \frac{1}{n})^n$$

existiert. Dies folgt aus der Tatsache, daß die Folge monoton steigend ist (Induktionsbeweis!), denn sie ist offensichtlich beschränkt (z.B. gilt $(1 + \frac{1}{n})^n \leq 3$). Der Limes ist die Eulersche Zahle e (siehe unten).

Definition 11 *Sei (a_n) eine beschränkte Folge von reellen Zahlen. Dann definieren wir:*

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty}(a_n) &:= \lim_{k\to\infty} \sup(\{a_k, a_{k+1}, \dots\}) \\ \liminf_{n\to\infty}(a_n) &:= \lim_{k\to\infty} \inf(\{a_k, a_{k+1}, \dots\}). \end{aligned}$$

Die Existenz von $\limsup a_n$ und $\liminf a_n$ folgt aus der Ordnungsvollständigkeit von $\mathbf{R}$. Es ist leicht zu sehen, daß folgende Eigenschaften gelten:

Satz 12 $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$;

$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$ *genau dann, wenn* $\lim a_n$ *existiert.*
Der Limes ist dann der gemeinsame Wert von $\liminf$ *und* $\limsup$.

Nun sieht man leicht, daß für eine Cauchy-Folge (a_n) gilt

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Damit ist der Satz über die Konvergenz von Cauchy-Folgen bewiesen.
Wir bringen jetzt eine Anwendung der Vollständigkeit—die Methode der Intervallschachtelung:

Satz 13 *Sei I_n eine fallende Folge von abgeschlossenen, beschränkten Intervallen. Dann ist der Durchschnitt $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ nicht-leer. Falls weiterhin $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} I_n = 0$, dann existiert genau ein Punkt im Durchschnitt. (diam I, wobei I ein Intervall ist, bezeichnet die Länge von I).*

Beweis. Sei $I_n = [a_n, b_n]$. Nach den Voraussetzungen gilt: (a_n) ist monoton-steigend und (b_n) ist monoton-fallend. Daher gilt $[a, b] \subset \bigcap I_n$, wobei $a = \lim a_n$, $b = \lim b_n$. Der zweite Teil folgt leicht.

■

Als Anwendung dieser Methode bringen wir einen zweiten Beweis der Tatsache, daß $[0, 1]$ überabzählbar ist (vgl. den Beweis im Anhang). Dazu folgende Definition:

Definition 14 *Eine Menge A heißt* **abzählbar***, wenn es eine surjektive Abbildung von* $\mathbf{N}$ *auf A gibt d.h. wenn A die Bildmenge $\{a_n\}$ einer Folge (a_n) (d.h. eine Funktion $n \mapsto a_n$ von* $\mathbf{N}$ *in* $\mathbf{R}$*) ist.*

Beispiele. Jede endliche Menge A ist abzählbar. $\mathbf{N}$ ist abzählbar. $\mathbf{Z}$ und $\mathbf{Q}$ sind abzählbar. Falls (A_n) eine Folge von abzählbaren Mengen ist, dann ist die Vereinigung $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n$ wieder abzählbar.

G. Cantor zeigte, mit Hilfe seines berühmten Diagonalverfahren, daß $\mathbf{R}$ nicht abzählbar ist. (Siehe Anhang).
Wir bringen einen Widerspruchsbeweis dieser Tatsache. Wir nehmen also an, daß $[0, 1]$ abzählbar ist und betrachten daher eine Numerierung $x_1, x_2, \ldots$. Wir konstruieren eine Intervallschachtelung (I_n) wie folgt: Wähle irgendein nicht entartetes abgeschlossenes Intervall I_1, das x_1 nicht enthält. Dann ein solches $I_2 \subset I_1$, das x_2 nicht enthält. Auf dieser Weise bekommen wir eine Intervallschachtelung (I_n), wobei $x_n \notin I_n$. Wir wissen aber, daß der Durchschnitt nicht-leer ist. Ein Element aus diesem Durchschnitt ist aber kein Element der Folge (x_n).

Definition 15 *Sei (a_n) eine Folge. Eine* **Teilfolge** *von (a_n) ist eine Folge der Gestalt*

$$(a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots),$$

wobei

$$n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$$

Falls die Folge (a_n) konvergiert, dann auch jede Teilfolge.

Satz 16 *(Satz von Bolzano-Weierstraß) Jede beschränkte Folge (a_n) besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Ohne Verlust der Allgemeinheit kann man annehmen, daß die Folge aus Elementen des Intervalles $[0,1]$ besteht. Wir betrachten jetzt die zwei Teilintervalle $[0,\frac{1}{2}]$ und $[\frac{1}{2},1]$ und setzen

$$A_1 = \{n : a_n \in [0,\frac{1}{2}]\} \text{ bzw. } A_2 = \{n : a_n \in [\frac{1}{2},1]\}.$$

Da $\mathbf{N} = A_1 \cup A_2$, ist entweder A_1 oder A_2 unendlich. Wir bekommen daher eine Teilfolge, die wir mit $(a_1^1, a_2^1, \dots)$ bezeichnen, so daß die Elemente aus einem Teilintervall der Länge $\frac{1}{2}$ kommen.
Wir wiederholen diese Methode und bekommen damit eine Folge $(a_k^n)_{k=1}^{\infty}$ von Folgen, so daß

> für jedes n ist $(a_k^{n+1})_k$ eine Teilfolge von $(a_k^n)_k$;
>
> es gilt $|a_r^n - a_s^n| \leq 2^{-n}$ für $r,s \in \mathbf{N}$.

Betrachte jetzt die **Diagonalfolge** (a_n^n):

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{a_1^1} & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 & \dots \\ a_1^2 & \mathbf{a_2^2} & a_3^1 & a_4^1 & \dots \\ a_1^3 & a_2^3 & \mathbf{a_3^3} & a_4^3 & \dots \end{array}$$

Dies ist

> eine Teilfolge von (a_n);
>
> eine Cauchy-Folge—also konvergent.

■

Bemerkung. Diese Beweismethode heißt das **Diagonalverfahren**. Varianten davon kommen sehr häufig in der Mathematik vor (vgl. den Beweis von Cantor im Anhang, daß $\mathbf{R}$ nicht abzählbar ist).

Definition 17 *Eine Zahl a ist* **Häufungspunkt** *einer Folge (a_n), wenn eine Teilfolge (a_{n_k}) existiert, die gegen a konvergiert.*

Der Satz von Bolzano-Weierstraß sagt also, daß jede beschränkte Folge einen Häufungspunkt besitzt.
Beispiel. Die Folge $(-1)^n$ ist nicht konvergent. Sie besitzt die zwei Häufungspunkte 1 und -1.

Aufgaben

Aufgabe 1. Gilt die Aussage:

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \to \frac{1}{n}?$$

Aufgabe 2. Berechne

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \frac{n-m}{n+m}$$

und

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{n-m}{n+m}.$$

Aufgabe 3. Berechne $\lim_{n\to\infty}$ für die folgenden Ausdrücke:

$$\frac{n^2-2n+1}{n^2-6},\quad \frac{6(-1)^n n+11}{n^2-5},\quad \frac{3n^2-20n}{n+1}.$$

Aufgabe 4. Zeige: Falls $a_n \to a$, $b_n \to b$, dann $|a_n| \to |a|$ und $\max\{a_n, b_n\} \to \max\{a, b\}$.

Aufgabe 5. Sei p eine nicht-triviale Polynomfunktion. Zeige:

$$\lim\frac{p(n+1)}{p(n)} = 1.$$

Aufgabe 6. Sei (a_n) eine Folge, die gegen a konvergiert. Zeige:

$$\frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_n) \to a.$$

Aufgabe 7. Berechne folgende Limiten:

$$\lim\frac{x^n}{n!}\qquad \lim a^{1/n}\qquad \lim n^{k/n}.$$

(x ist eine reelle Zahl, a positiv, $k \in \mathbf{N}$).

Aufgabe 8. Berechne $\lim(1+\frac{a}{n})^n$ $(a \geq 0)$.

Aufgabe 9. Sei (a_n) eine Folge, die gegen a konvergiert. Zeige:

$$\frac{na_1+(n-1)a_2+\cdots+a_n}{\frac{1}{2}n(n+1)} \to a.$$

Aufgabe 10. Sei (a_n) eine Folge, so daß

$$a_n < \frac{1}{2}(a_{n-1}+a_{n+1}) \quad (n > 1).$$

Zeige: (a_n) konvergiert (eventuell gegen $-\infty$ oder ∞).

Aufgabe 11. Sei (a_n) so, daß $a_{n+1} = \dfrac{3a_n+1}{a_n+3}$ und $a_1 > -1$. Zeige: $a_n \to 1$.

Aufgabe 12. Sei (a_n) so, daß

$$a_{n+1}^2 = a_n + 6 \quad (a_{n+1} \geq 0).$$

Zeige: Falls $a_1 \geq -6$, dann $a_n \to 3$.

Aufgabe 13. Seien a und b reelle Zahlen. Untersuche, ob die Folge

$$a_n = \frac{an^4 + 13n^2}{bn^4 + 4n^2 + 1}$$

konvergiert oder divergiert.

Aufgabe 14. Seien a und b reelle Zahlen. Die Folge (a_n) ist wie folgt rekursiv definiert:

$$a_1 = a, a_2 = b, a_k = \frac{1}{2}(a_{k-1} + a_{k-2}).$$

Bestimme den Grenzwert.

Aufgabe 15. Berechne den Limes der partiellen Summen der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}.$$

Aufgabe 16. Man berechne das unendliche Produkt

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$$

d.h. den Limes der Folge

$$p_k = \prod_{n=2}^{k} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}.$$

Aufgabe 17. Seien a und x_0 positiv und (x_n) rekursiv wie folgt definiert:

$$x_{n+1} = \frac{1}{k}((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}).$$

Dann ist (x_n) eine Cauchy-Folge. Der Limes ist eine positive Zahl b, sodaß $b^k = a$.

Aufgabe 18. Zeige: Eine Folge reeller Zahlen konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist und genau einen Häufungspunkt besitzt.