Thema 4—Limiten und Stetigkeit von Funktionen

Wir betrachten jetzt Funktionen zwischen geeigneten Punktmengen. Dazu wiederholen wir einige grundlegende Begriffe und Schreibweisen aus der Mengentheorie. Wir benötigen öfters folgende spezielle Teilmengen von $\mathbf{R}$:
$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} : a \leq x \leq b\}$
$[a, b[= \{x \in \mathbf{R} : a \leq x < b\}$
$]a, b] = \{x \in \mathbf{R} : a < x \leq b\}$
$]a, b[= \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}$
$[a, \infty[= \{x \in \mathbf{R} : a \leq x\}$
$]a, \infty[= \{x \in \mathbf{R} : a < x\}$
$]-\infty, a] = \{x \in \mathbf{R} : x \leq a\}$
$]-\infty, a[= \{x \in \mathbf{R} : x < a\}$.
Außerdem schreiben wir

$$\mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 0\}.$$

Wir betrachten jetzt reelle Funktionen, genauer Funktionen von einer Teilmenge D von $\mathbf{R}$ mit Werten in $\mathbf{R}$. D heißt **Definitionsbereich** von f und der **Graph** von f ist die Menge

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in D \times \mathbf{R} : y = f(x)\}.$$

Beispiele von wichtigen Funktionen sind:

I. Die konstanten Funktionen. Das sind Funktionen der Gestalt: $x \mapsto a$ für ein festes $a \in \mathbf{R}$.

II. Die identische Abbildung. Wir schreiben id_D für die Abbildung $x \mapsto x$ auf D.

III. Absolutbetrag. Das ist die Abbildung $x \mapsto |x|$.

IV. entier: Diese Funktion bildet x auf die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.

V. Polynomfunktionen. Funktionen der Gestalt:

$$x \mapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

VI. Rationale Funktionen: Das sind Funktionen, die Quotienten $\dfrac{p}{q}$ von Polynomfunktionen sind. (Der Definitionsbereich ist $\{x \in \mathbf{R} : q(x) \neq 0\}$).

VII. Treppenfunktionen: Funktionen der Gestalt: $\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{I_i}$, wobei $I_1, \ldots I_n$ Intervalle und $a_1, \ldots, a_n$ Zahlen. Das berühmteste Beispiel ist die **Heaviside-Funktion** $\chi_{[0,\infty[}$.

VIII. Die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen. Diese sind über Potenzreihen (siehe dazu unten) definiert:

$$\begin{aligned} \exp(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

Rationale Operationen auf Funktionen: Falls f, g Funktionen auf D sind, danns definieren wir $f+g$, cf ($c \in \mathbf{R}$), fg und f/g auf natürlicher Art. Z.B. ist $f+g$ die Funktion

$$x \mapsto f(x) + g(x).$$

($\frac{f}{g}$ ist auf der Menge $\{x \in D : g(x) \neq 0\}$ definiert).

Hintereinanderschaltung von Funktionen: Seien $f : D \to \mathbf{R}$ und $g : E \to \mathbf{R}$ Funktionen mit $f(D) \subset E$. Dann ist die Funktion

$$g \circ f : D \to \mathbf{R}$$

definiert durch $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ für $x \in D$.

Beispiele. Wir bekommen die rationalen Funktionen aus den Konstanten und der Identitätsabbildung, durch wiederholte Anwendungen der arithmetischen Operationen. Andere Funktionen, die wir aus Einfacheren auf diese Weise konstruieren sind:

$$\begin{aligned}
\cosh x &= \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x)) \\
\sinh(x) &= \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x)) \\
\tan(x) &= \frac{\sin x}{\cos x} \\
\operatorname{cotan}(x) &= \frac{\cos x}{\sin x} \\
\sec(x) &= \frac{1}{\cos x} \\
\operatorname{cosec}(x) &= \frac{1}{\sin x}.
\end{aligned}$$

Grenzwerte: Sei $f : D \to \mathbf{R}$ eine Funktion und $a \in \mathbf{R}$ so, daß a ein Häufungspunkt von $D \setminus \{a\}$ d.h. es gibt eine Folge (a_n) aus D, die gegen a konvergiert. (Dies ist der Fall, zum Beispiel, wenn $a \in D$). Man definiert:

$$\lim_{x \to a} f(x) = c,$$

falls für jede Folge (a_n) aus $D \setminus \{a\}$ mit $a_n \to a$ gilt:

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = c.$$

Beispiele.

1. $$\lim_{x \to 0} \exp x = 1.$$

Denn falls $1 > x > 0$, dann haben wir die Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\exp(x) - 1 &= x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\
&\leq x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{x}{1-x}.
\end{aligned}$$

Für $x < 0$ benützt man die Beziehung $\exp(-x) = (\exp(x))^{-1}$.

2. Für die Heaviside-Funktion existiert der Limes $\lim_{x\to 0} H(x)$ nicht.

Einseitige Limiten: Gerade das letzte Beispiel ist die Motivation für die folgende Verfeinerung der Definition:

Definition 1 *Sei $f : D \to \mathbf{R}$ und sei a wie oben. Wir schreiben $\lim_{x\to a^+} f(x) = c$, falls c der Limes der Einschränkung der Funktion f auf $D \cap [a, \infty[$. $\lim_{x\to a^-} f(x)$ wird ähnlich definiert. Es gilt also:*

$$\lim_{x\to 0^-} H(x) = 0 \text{ und } \lim_{x\to 0^+} H(x) = 1.$$

Stetigkeit

Definition 2 *Sei $f : D \to \mathbf{R}$ eine Funktion, a ein Punkt aus D. f heißt* **stetig im Punkt** *a, falls $f(x_n) \to f(a)$ für jede Folge (x_n) aus D mit $x_n \to a$.*
f heißt **stetig in** *D, falls f in jedem Punkt von D stetig ist.*
Ähnlicherweise definieren wir Linksseitig- oder Rechtsseitigstetigkeit an einem Punkt.

Beispiel.

1. Die konstante Funktion ist klarerweise stetig im jeden Punkt.

2. Die Heaviside Funktion ist rechtsstetig, aber nicht linksstetig im Punkt 0.

3. Die Exponentialfunktion ist überall stetig. Denn

$$\lim_{h\to 0} \exp(x+h) - \exp(x) = \exp(x) \lim_{h\to 0}(\exp h - 1) = \exp(x).$$

(Wir benützen hier die Funktionalgleichung $\exp(x+y) = \exp x . \exp y$ der Exponentialfunktion—siehe unten).

Satz 3 *Seien $f, g : D \to \mathbf{R}$ Funktionen, die in $a \in D$ stetig sind, und sei $c \in \mathbf{R}$. Dann sind auch die Funktionen $f + g, cf, fg$ in a stetig. Falls g keine Nullstellen hat, dann ist f/g stetig.*

Da die Identitätsfunktion und konstante Funktionen stetig sind, folgt aus dem Satz, daß rationale Funktionen (und damit auch Polynomfunktionen) stetig sind. Weitere Beispiele von Funktionen, deren Stetigkeit sofort ableitbar ist, sind die hyperbolischen Funktionen sinh, cosh.

Satz 4 *Seien $f : D \to \mathbf{R}$ und $g : E \to \mathbf{R}$ stetig und $f(D) \subset E$. Dann ist $g \circ f$ stetig*

Beweis. Übung.

■

Satz 5 *Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ ist beschränkt, d.h. die Menge $\{f(x) : x \in [a, b]\}$ ist beschränkt (es gibt eine Konstante M, so daß für alle $x \in [a, b]$ $|f(x)| \le M$.).*

Beweis. (Widerspruchsbeweis) Man nehme an, die stetige Funktion f sei nicht beschränkt. Es existiert damit für jedes n eine Stelle x_n, wo $|f(x_n)| > n$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß, hat (x_n) eine konvergent Teilfolge (x_{n_k}). Sei $x = \lim x_{n_k}$. Wegen der Stetigkeit von f und der Tatsache, daß die Folge (x_{n_k}) konvergent folgt, daß die Bildfolge $(f(x_{n_k}))$ auch konvergent ist. Dies steht offensichtlich im Widerspruch zur Tatsache, daß letzere Folge nicht beschränkt ist.

■

Beispiel. Die Funktion $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ auf $]0, 1]$ ist stetig, aber nicht beschränkt.

Satz 6 *Jede in einem abgeschlossenen beschränkten Intervall stetige Funktion*

$$f : [a, b] \to \mathbf{R}$$

nimmt ihr Maximum und Minimum an, d.h. es existieren x_0 und x_1, so daß

$$f(x_0) = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$$

und

$$f(x_1) = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

Beweis. Man wähle eine Folge (x_n) so, daß

$$f(x_n) \geq \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} - \frac{1}{n}.$$

Der Limes x_0 einer konvergierenden Teilfolge erfüllt die Bedingung.

■

Wiederum gilt dieser Satz nicht für Funktionen auf offenen oder halb-offenen Intervallen.

Satz 7 *(Zwischenwertsatz.) Sei $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < y$, $f(b) > y$. Dann existiert $x_0 \in]a, b[$ mit $f(x_0) = y$.*

Beweis. Setze $x_0 = \sup\{x \in [a, b] : f(x) < y\}$.

■

Für manche Zwecke ist eine Umformung der Definition der Stetigkeit sinnvoll. Dies ist die $\epsilon - \delta$ Definition:

Definition 8 *Sei $f : D \to \mathbf{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$. f ist genau dann in x_0 stetig, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß*

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \text{ für alle } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

Diese ist äquivalent zu der ursprünglichen Definition.

Beweis. Übung.

■

Es gibt zwei Verschärfungen des Begriffes der Stetigkeit.

Definition 9 *$f : D \to \mathbf{R}$ ist* **gleichmäßig stetig***, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für alle $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$, $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.*
$f : D \to \mathbf{R}$ ist **Lipschitz-stetig***, wenn eine $K > 0$ existiert, so daß*

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

für jedes Paar x, y von Punkten aus D.

Es ist klar, daß jede Lipschitz-stetige Funktion gleichmäßig stetig ist und jede gleichmäßig stetige Funktion stetig.
Die Umkehrung gilt nicht.
Beispiele. Die Funktion $x \mapsto x^2$ auf $\mathbf{R}$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig. Die Funktion $x \mapsto \sqrt{x}$ auf $[0, 1]$ ist gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig. (Die Funktion $\sqrt{x}$ wird unten definiert).
Allerdings gilt folgender Satz:

Satz 10 *Jede stetige Funktion auf einem abgeschlossenen, beschränkten Intervall ist gleichmäßig stetig.*

Beweis. (Widerspruchsbeweis). Wenn die stetige Funktion f nicht gleichmäßig stetig wäre, dann gäbe es, für jedes n, Punkte x_n und y_n mit $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$, aber $|f(x_n) - f(y_n)| > \epsilon$ für ein festes positives ϵ. Es existieren konvergierende Teilfolgen (x_{n_k}) und (y_{n_k}). (Frage an den Leser: Warum kann man annehmen, daß diese zwei Teilfolgen die gleichen Indexmengen haben?). Aus der ersten Bedingung folgt: $\lim_k x_{n_k} = \lim_k y_{n_k}$. Sei a dieser Limes. Es gilt dann: $\lim_k f(x_{n_k}) = \lim_k f(y_{n_k}) = f(a)$, was offensichtlich im Widerspruch zu der zweiten Abschätzung steht.

■

Inversfunktionen: Eine Funktion $f : D \to \mathbf{R}$ ist

monoton wachsend, falls $x \leq y$ impliziert $f(x) \leq f(y)$;

streng monoton wachsend, falls $x < y$ impliziert $f(x) < f(y)$;

monoton fallend, falls $x \leq y$ impliziert $f(x) \geq f(y)$;

streng monoton fallend, falls $x < y$ impliziert $f(x) > f(y)$.

Falls $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ stetig und streng monoton wachsend, dann ist das Bild von f das Intervall $[A, B]$, wobei $A = f(a)$, $B = f(b)$ (dies folgt aus dem Zwischenwertsatz). f ist dann eine Bijektion von $[a, b]$ auf $[A, B]$. Wir können daher die **Inversfunktion** oder **Umkehrfunktion** f^{-1} von $[A, B] \to [a, b]$ wie folgt definieren:

$$x = f^{-1}(y) \iff y = f(x).$$

Satz 11 *In der obigen Situation ist die Umkehrfunktion f^{-1} stetig.*

Beweis. (Widerspruchsbeweis): Wäre die Inversfunktion f^{-1} nicht stetig, dann gäbe es eine Folge (y_n) mit folgenden Eigenschaften: $y_n \to d$ in $[A, B]$ aber $|x_n - c| > \epsilon$ für ein festes $\epsilon > 0$, wobei $d = f(c)$ (Warum?). Hier ist (x_n) die Folge $x_n = f^{-1}(y_n)$. Wir können übergehen zu einer konvergenten Teilfolge (x_{n_k}). Sei c_1 der Limes dieser Folge. Dann gilt: $c \neq c_1$ aber $f(c) = f(c_1)$. Dies widerspricht der Injektivität von f.

■

Unter Verwendung dieser Tatsachen können wir unsere Liste von speziellen Funktionen erheblich erweitern:

Die Wurzelfunktionen: Wir definieren eine stetige Funktion $x \mapsto x^r$ für jede Rationalzahl r. x^n ist definiert für $r = n \in \mathbf{N}$. Für $r = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbf{N})$ definieren wir die Funktion $y \mapsto y^{1/n}$ als die Inversfunktion zu $x \mapsto x^n$ d.h.

$$x = y^{1/n} \iff y = x^n.$$

Diese Funktion ist auf $\mathbf{R}_+$ definiert und stetig (da $x \mapsto x^n$ eine Bijektion von $\mathbf{R}_+$ auf $\mathbf{R}_+$ ist).

Falls $r = \frac{p}{q}$ eine Rationalzahl mit p und q natürlichen Zahlen, dann definieren wir die Funktion $x \mapsto x^r$ als $x^r = \left(x^{1/q}\right)^p$. Für $r < 0$, definieren wir

$$x^r = \frac{1}{x^{-r}}.$$

Die Logarithmusfunktion: Die Logarithmusfunktion ln ist definiert als die Inversfunktion von exp. D.h. $x = \ln y \iff y = \exp x$. Da exp eine Bijektion von $\mathbf{R}$ auf $\mathbf{R}_+$, ist ln eine stetige Funktion von $\mathbf{R}_+$ auf $\mathbf{R}$. Es folgt aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion, daß $\ln xy = \ln x + \ln y$.

Die verallgemeinerten Potenzfunktionen: Wir können jetzt die Funktion $x \mapsto x^\alpha$ für ein allgemeines $\alpha \in \mathbf{R}$ wie folgt definieren: $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$.

Bemerkung. Da $\ln e = 1$, können wir ab jetzt $\exp(x)$ als e^x schreiben.

Weiter interessante Funktionen, die als Inversfunktionen von einfachen Funktion definiert werden, sind die Invers-trigonometrischen Funktionen (arcsin, arccos usw.).

Wir beschließen dieses Kapitel mit einigen Erweiterungen des Limesbegriffes:

Definition 12 *Sei f eine Funktion, deren Definitionsbereich D ein Intervall $[K, \infty[$ enthält. Wir schreiben: $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$, falls gilt:*

$$\textit{zu jedem } \epsilon > 0 \textit{ existiert } K_1 > K, \textit{ so daß } |f(x) - a| < \epsilon \textit{ falls } x > K_1.$$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$ wird analog definiert.
Wir schreiben: $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, falls gilt:

$$\textit{zu jedem } K > 0 \textit{ existiert } \epsilon > 0, \textit{ so daß } f(x) > K, \textit{ falls } 0 < |x - a| < \epsilon.$$