Thema 5—Differentiation

Definition 1 *Sei $f : D \to \mathbf{R}$. Dann ist f im Punkt x_0 differenzierbar, falls*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

auf der Menge $D \setminus \{x_0\}$ existiert. Der Limes ist dann die **Ableitung** *von f im Punkt x_0, geschrieben $f'(x_0)$. Falls die Ableitung in jedem Punkt aus D existiert, dann ist f* **differenzierbar** *und die Funktion*

$$x \mapsto f'(x)$$

ist die **Ableitung** *von f. Falls diese Abbildung stetig ist, dann heißt f* **stetig differenzierbar**.

Wir können dann die n-te Ableitung rekursiv definieren. f ist n-mal differenzierbar, falls f' existiert und $(n-1)$-mal differenzierbar ist. Die n-te Ableitung $f^{(n)}$ von f ist dann die Ableitung von $f^{(n-1)}$. Falls $f^{(n)}$ stetig ist, dann ist f n-mal stetig-differenzierbar.
Es ist klar, daß eine differenzierbare Funktion stetig ist.
Die Definition der Differenzierbarkeit kann wie folgt umgeschrieben werden.

es existiert eine Zahl a, so daß die Funktion

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & (x \neq x_0) \\ a \quad (x = x_0) \end{cases}$$

auf D stetig. (a ist dann die Ableitung von f im Punkt x_0). es existieren Zahlen a und eine Funktion ρ auf $D \setminus \{x_0\}$, so daß

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)a + \rho(x)$$

und

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\rho(x)}{x - x_0} = 0.$$

Wiederum ist a die Ableitung $f'(x_0)$.

(Carathéodory) Es existiert eine Funktion ϕ, die an der Stelle x_0 stetig ist, sodaß

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\phi(x).$$

$a = \phi(x_0)$ ist dann dort die Ableitung von f.

Man verifiziert, daß die bekannten Gesetze bezüglich den algebraischen Operationen gelten:

die Summe $f + g$ von zwei differenzierbaren Funktion ist differenzierbar und es gilt $(f + g)' = f' + g'$;

das Produkt $f \cdot g$ von zwei differenzierbar Funktionen ist differenzierbar und es gilt: $(f \cdot g)' = f'.g + f \cdot g'$;

die Inverse einer differenzierbaren Funktion g ohne Nullstellen ist differenzierbar und es gilt:

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}.$$

Weniger trivial ist die folgende Tatsache:

Satz 2 *(Die Ketttenregel.) Seien f und g differenzierbare Funktionen, so daß die Zusammensetzung $g \circ f$ existiert. Dann ist letzere differenzierbar und es gilt*

$$(g \circ f)' = (g' \circ f).f' \quad \text{d.h. } (g \circ f)'(x) = g'(f(x)).f'(x).$$

Beweis. Wir betrachten einen Punkt x und setzen $y = f(x)$. Aufgrund der Differenzierbarkeit von f und g kann man schreiben

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + h.f'(x) + \rho(h) \\ g(y+k) &= g(y) + k.g'(y) + \sigma(k), \end{aligned}$$

mit $\lim_{h\to 0} \dfrac{\rho(h)}{h} = 0$ und $\lim \dfrac{\sigma(k)}{k} = 0$. Setzen wir $k(h) = h.f'(x) + \rho(h)$, so bekommen wir

$$\begin{aligned} g \circ f(x+h) - g \circ f(x) &= g\left(f(x) + k(h)\right) - g(f(x)) \\ &= k(h).g'(y) + \sigma(k(h)) \\ &= h.g'(y)f'(x) + \rho(h)g'(y) + \sigma(k(h)). \end{aligned}$$

Man kann nachprüfen, daß das Restglied $\tau(h) = \rho(h)g'(y) + \sigma(h.f'(x) + \rho(h))$ die Bedingung $\lim_{h\to 0} \dfrac{\tau(h)}{h} = 0$ erfüllt.

■

Wir bemerken hier, daß es auch eine "punktweise" Version der Kettenregel gibt, die aber etwas Vorsicht bei der Formulierung benötigt.

Beispiele.

I. Konstante Funktionen: Es ist klar, daß die Ableitung einer konstanten Funktion gleich der Nullfunktion ist.

II. $f : x \mapsto cx$ auf $\mathbf{R}$. In diesem Fall ist die Ableitung die konstante Funktion c.

III. Für die Funktion $f : x \mapsto x^n$ gilt $f'(x) = nx^{n-1}$.

IV . Die Exponentialfunktion: Es gilt:

$$\begin{aligned} \exp'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \exp(x) \frac{\exp(h) - 1}{h} \\ &= \exp(x) \lim_{h\to 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} \\ &= \exp(x). \end{aligned}$$

V. Die Sinusfunktion:

$$\begin{aligned} \sin'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2\cos(\frac{2x+h}{2}) \sin\frac{h}{2}}{h} \\ &= \left(\lim_{h\to 0} \cos(x + \frac{h}{2})\right) \cdot \left(\lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{h/2}\right) \\ &= \cos x. \end{aligned}$$

Ähnerlicherweise gilt: $\cos'(x) = -\sin x$.

VI. Die Betragsfunktion: Diese Funktion ist an der Stelle 0 nicht differenzierbar.

Einseitige Ableitungen: Die Funktion des letzten Beispiels ist das typische Beispiel einer Funktion, die zwar nicht differenzierbar ist, aber einseitige Ableitungen besitzt.

Definition 3 *Sei $x \in D$ und $f : D \to \mathbf{R}$. f heißt* **von rechts differenzierbar oder rechtsseitig differenzierbar** *im Punkte x, falls*

$$f'_+(x) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existiert. f heißt **von links differenzierbar oder linksseitig differenzierbar** *im Punkte x, falls*

$$f'_-(x) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existiert. Z.B. gilt $abs'_+(0) = 1$, $abs'_-(0) = -1$.

Stückweise-stetig-differenzierbare Funktionen: Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ heißt **n-mal stückweise-stetig differenzierbar**, falls endlich viele Punkte $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ existieren, so daß

f ist auf $[a,b] \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}$ n-stetig differenzierbar;

für jede $i \leq n$ und $r \leq k$ existieren die einseitige Ableitungen $f_+^{(i)}(a_r)$ und $f_-^{(i)}(a_r)$.

Z. B. haben Treppenfunktionen diese Eigenschaften.

Satz 4 *(Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion.) Sei D ein abgeschlossenes Intervall, $f : D \to \mathbf{R}$ eine stetige, streng monotone Funktion, und $\phi = f^{-1} : E \to \mathbf{R}$ die Umkehrfunktion, wobei $E = f(D)$. Ist f differenzierbar und $f'(x) \neq 0$ $(x \in D)$, dann ist ϕ differenzierbar und es gilt:*

$$\phi'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(\phi(y))} \qquad (y = f(x)).$$

Beweis. Wir fixieren x_0 und $y_0 = f(x_0)$ und betrachten die Differenzquotienten:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} \text{ and } \frac{x - x_0}{y - y_0},$$

wobei $y = f(x)$. Da f und die Umkehrfunktion stetig sind, gilt:

$$x \to x_0 \iff y \to y_0.$$

Wir bekommen daher das gesuchte Ergebnis, wenn wir zum Grenzwert (als $x \to x_0$) in der Beziehung

$$\frac{x - x_0}{y - y_0} = \left(\frac{y - y_0}{x - x_0} \right)^{-1}$$

übergehen.

■

BEISPIELE.

I. Da ln die Umkehrfunktion von exp ist, gilt:

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln x)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}.$$

II. arcsin arccos, arctan: Das sind die Inversfunktionen zu sin, cos und tan. Genauer, wir betrachten die Inversfunktion zu der Funktionen

sin mit Definitionsbereich $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
cos mit Definitionsbereich $]0, \pi[$
und
tan mit Definitionsbereich $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Es gilt damit:

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Definition 5 *Sei $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ eine Funktion. f hat in $x \in]a, b[$ ein* **lokales Minimum**, *wenn ein $\epsilon > 0$ existiert, so daß für alle y mit $|x - y| < \epsilon$ $f(x) \geq f(y)$. Ein* **lokales Minimum** *wird ähnlicherweise definiert.*
x ist ein **lokales Extremum**, *falls es entweder ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum ist.*

Satz 6 *Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ sei auf $[a, b]$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar. Dann gilt für jedes lokale Extremum $x \in]a, b[$ $f'(x) = 0$.*

BEWEIS. Übung.

■

Satz 7 *(Der Satz von Rolle.) Sei $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ differenzierbar und es gelte: $f(a) = f(b)$. Dann existert ein Punkt $x_0 \in]a, b[$, so daß $f'(x_0) = 0$.*

BEWEIS. Ist die Funktion konstant, so ist die Aussage trivial. Wenn nicht, existiert eine Stelle x_1, so daß entweder $f(x_1) > f(a)$ oder $f(x_1) < f(a)$. Im ersten Fall, wählt man x_0 so, daß $f(x_0) = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$.

■

Satz 8 *(Mittelwertsatz der Differentialrechnung.) Sei $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar. Dann existiert ein ξ in $]a, b[$, so daß*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

BEWEIS. Für den Fall, wo $a = 0$, $b = 1$. Man wendet den Satz von Rolle auf die Funktion

$$f_1(x) = f(x) - ((1 - x)f(0) + x(f(1))$$

an.

■

Korollar 9 *Seien f und g stetige Funktion auf $[a, b]$, die im offenen Intervall $]a, b[$ differenzierbar sind. Dann existiert ξ in $]a, b[$, so daß*

$$f'(\xi)(g(b) - g(a)) = g'(\xi)(f(b) - f(a)).$$

Beweis. Übung.

∎

Satz 10 *Sei $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar. Falls $f' = 0$ auf $]a, b[$, dann ist f eine Konstante.*

Beweis. Übung.

∎

Satz 11 *Sei $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar. Falls $f' > 0$ auf $]a, b[$, dann ist f streng monoton wachsend. Falls $f' < 0$, dann ist f streng monoton fallend.*

Beweis. Übung.

∎

Regel von L'Hospital. Sei f und g differenzierbar in der Nähe eines Punktes c und es gelte:

$f(c) = g(c) = 0$;

g und g' haben keine Nullstellen in einer Umgebung von c;

$\lim_{x \to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert.

Dann existert $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Beweis. Wir beweisen diese Aussage für den einseitigen Limes $\lim_{x \to c+}$. Sei $L = \lim_{x \to c+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Wähle $\delta > 0$, so daß

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \epsilon,$$

falls $x \in]c, c + \delta[$. Sei $0 < h < \delta$. Es existiert $\xi \in]c, c + h[$, so daß

$$\frac{f(c+h)}{g(c+h)} \left(= \frac{f(c+h) - f(c)}{g(c+h) - g(c)} \right) = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Damit gilt:

$$\left| \frac{f(c+h)}{g(c+h)} - L \right| < \epsilon.$$

∎

Satz 12 *(Der Satz von Taylor.) Sei $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ n-mal differenzierbar und sei x_0 ein Punkt in $]a, b[$. Dann existiert zu jedem x in $[a, b]$ ein ξ zwischen x_0 und x, so daß*

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Beweis. o.B.d. A. nehmen wir an, daß $x_0 = 0$, $x = 1$. (Sonst betrachten wir die Funktion

$$g(t) = f(x_0 + t(x - x_0)).)$$

Wir definieren Funktionen F und G auf $[0, 1]$ wie folgt:

$$F(t) = f(1) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k-1)}(t)}{(k-1)!}(1-t)^{k-1}$$

bzw.

$$G(t) = (1-t)^n.$$

Es existiert ein ξ mit $\frac{F(1)-F(0)}{G(1)-G(0)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$. Dies ist das gesuchte Ergebnis.

■

Falls f in der Nähe von x_0 unendlich oft differenzierbar ist, dann heißt die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

die **Taylorreihe** von f an der Stelle x_0.

Siehe unten für weitere Überlegungen zum Thema Taylorreihen.

Aufgaben

Aufgabe 1. Berechne die Ableitung der Funktionen

$$\sqrt{\exp x^{\cos \sqrt{x}}}, \quad x^{\sqrt{x}}.$$

Aufgabe 2. Zeige:

$$x^\alpha y^\beta \le \alpha x + \beta y,$$

wobei x, y, α, β positiv sind, mit $\alpha + \beta = 1$. (Berechne den Extremalwert der Funktion $x \mapsto x^\alpha y^\beta - \alpha x$).

Aufgabe 3. Beweise die Höldersche Ungleichung

$$\sum_{j=1}^{n} x_j y_j \le \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} y_j^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

wobei $x_j > 0, y_j > 0$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.)

Aufgabe 4. Sei f eine stetig-differenzierbare Funktion auf $[a, b]$. Zeige: f ist Lipschitz-stetig.

Aufgabe 5. Beweise die Regel von Leibniz:

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Berechne $(x^2 \sin x)^{(9999)}$..

Aufgabe 6. Bestimme die Taylorreihe von $\ln x$ an der Stelle $x_0 = 1$. Für welche $x > 0$ konvergiert die Reihe?

Aufgabe 7. Betrachte die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

Zeige: $\lim_{x \to 0} p(\frac{1}{x}) \exp(\frac{-1}{x^2}) = 0$ für jedes Polynom p. Bestimme die Taylorreihe von f an der Stelle 0. Ist f durch diese Reihe darstellbar?

Aufgabe 8. Sei f zweimal stetig differenzierbar. Zeige:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)}{h^2} = f''(a).$$

Aufgabe 9. Zeige:

$$\lim_{x \to 0} x^{-2}[b(1+ax)^{\frac{1}{3}} - a(1+bx)^{\frac{1}{3}} + (a-b)(1+abx^2)^{\frac{1}{2}}] = \frac{7}{18} ab(a-b).$$

Aufgabe 10. Sei f zweimal differenzierbar, mit $|f(x)| \leq A$, $|f''(x)| \leq B$ $(x \geq K)$. Zeige: $|f'(x)| \leq \sqrt{2(AB)}$ $(x \geq K)$.

Aufgabe 11. Sei f eine Funktion auf $[a,b]$, sodaß

$$|f(x) - f(y)| \leq A|x-y|^2 \quad (x, y \in [a,b]).$$

Zeige: f ist konstant.

Aufgabe 12. Bestimme die Extremalwerte der Funktion

$$x \mapsto x^m (1-x)^n$$

auf $[0,1]$.

Aufgabe 13. Seien f, g, h stetig-differenzierbare Funktionen auf $[a,b]$. Zeige: Es existiert eine Punkt ξ, so daß

$$\det \begin{bmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{bmatrix} = 0.$$

Aufgabe 14. Zeige, mit Hilfe der Potenzreihendarstellungen von sin und cos, daß

$$\sin'(x) = \cos x \qquad \cos'(x) = -\sin x.$$

Aufgabe 15. Zeige, daß die Carathéodorysche Definition der Differenzierbarkeit zu Bedingung (1) äquivalent ist. Benütze die Carathéodorysche Definition, um die Kettenregel bzw. den Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion zu beweisen.