Thema 6—Das Riemannsche Integral

Wir erinnern kurz, daß eine Funktion $h : [a, b] \to \mathbf{R}$ eine Treppenfunktion ist, falls es eine Unterteilung

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

des Intervalls gibt, so daß h auf $]x_{k-1}, x_k[$ konstant ist für jedes k. Es ist klar, daß die Treppenfunktionen einen Vektorraum bilden, d.h. daß die Summe $h_1 + h_2$ und ein Produkt λh wieder Treppenfunktionen sind, falls h_1, h_2, h Treppenfunktionen sind, und λ ein Skalar. Falls c_k der Wert von h auf dem Intervall $]x_{k-1}, x_k[$ ist, dann ist das **Integral** $\int_a^b h(x)\,dx$ von h die Summe

$$\sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1}).$$

Dieses Integral ist positiv und additiv d.h. es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_a^b (h_1 + h_2)(x)\,dx &= \int_a^b h_1(x)\,dx + \int_a^b h_2(x)\,dx \\
\int_a^b \lambda h(x)\,dx &= \lambda \int_a^b h(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Außerdem

$$h \le h_1 \text{ impliziert } \int_a^b h(x)\,dx \le \int_a^b h_1(x)\,dx.$$

Wie aus der Mittelschulmathematik bekannt ist, versucht man, das Integral einer allgemeinen Funktion durch Approximation von oben und unten mit Treppenfunktionen zu bestimmen:

Definition 1 *Sei $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ eine beliebige beschränkte Funktion. Man setzt $\int_a^{b*} f(x)\,dx$ gleich*

$$\inf\{\int_a^b h(x)\,dx : h \textit{ eine Treppenfunktion mit } f \le h\}$$

und $\int_{a\,*}^{b} f(x)\,dx$ gleich

$$\sup\{\int_a^b h(x)\,dx : h \textit{ eine Treppenfunktion mit } f \ge h\}.$$

Beispiele. Falls f eine Treppenfunktion ist, dann stimmen die Ober- und Unterintegrale von f überein. Falls f die Funktion

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ rational} \\ 0 & \text{falls } x \text{ irrational,} \end{cases}$$

dann ist das Unterintegral 0, das Oberintegral dagegen 1.

Eine beschränkte Funktion ist dann **Riemann-integrierbar**, falls

$$\int_a^{b*} f(x)\,dx = \int_{a\,*}^{b} f(x)\,dx.$$

Der gemeinsame Wert ist dann **das Integral** von f—geschrieben

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Die Definition kann man wie folgt umschreiben:

Satz 2 *Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ Treppenfunktionen h_1 und h_2 existieren mit*

$$h_1 \leq f \leq h_2 \quad \textit{und} \quad \int_a^b h_2(x)\,dx - \int_a^b h_1(x)\,dx \leq \epsilon.$$

Satz 3 *Jede stetige Funktion ist integrierbar.*

Beweis. Sei

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

eine Partition von $[a,b]$. Für $k = 1, \ldots, n$ setzen wir

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\} \qquad M_i = \sup\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}.$$

Wir definieren die **Riemann-Summen**:

$$\begin{aligned} s(f) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \\ S(f) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

Es ist klar, daß f Riemann-integrierbar ist, falls man für jedes ϵ eine Partition finden kann, so daß $|S(f) - s(f)| < \epsilon$ für diese Partition.
Falls aber f stetig und damit gleichmässig stetig ist, dann existiert für jedes ϵ ein δ, so daß aus $|x - y| < \delta$ folgt $|f(x) - f(y)| < \dfrac{\epsilon}{b-a}$. Wählen wir dann eine Partition, so daß $|t_i - t_{i-1}| < \delta$ für jedes i, dann gilt $|S(f) - s(f)| < \epsilon$.

■

Weiters gilt:

Satz 4 *Jede monotone Funktion $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ ist integrierbar.*

Beweis. Übung.

■

Es ist wiederum klar, daß $f + g$ und λf integrierbar sind, falls f und g es sind. Weiters ist das integral monoton d.h. $f \leq g$ für integrierbare Funktionen f und g impliziert $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

Satz 5 *(Mittelwertsatz der Integralrechnung.) Seien $f, h : [a,b] \to \mathbf{R}$ stetige Funktionen, wobei $h \geq 0$. Dann existiert ein $\xi \in [a,b]$, so daß*

$$\int_a^b f(x)h(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b h(x)\,dx.$$

Beweis. Wir setzen m für das Infimum und M für das Supremum von f auf dem Intervall. Es gilt dann:

$$mh(x) \leq f(x)h(x) \leq Mh(x)$$

und damit

$$m \int_a^b h(x)\, dx \leq \int_a^b f(x)h(x)\, dx \leq M \int_a^b h(x)\, dx.$$

Damit gibt es ein $\eta \in [m, M]$, so daß

$$\int_a^b f(x)h(x)\, dx = \eta \int_a^b h(x)\, dx.$$

Aus dem Zwischenwertsatz folgt, daß $\eta = f(\xi)$ für ein $\xi \in [a, b]$.

■

Sei jetzt I ein Intervall (offen, halb-offen oder geschlossen), das den Punkt a enthält. Falls $f : I \to \mathbf{R}$ stetig ist, dann heißt die Funktion

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\, dt$$

eine **Stammfunktion** von f. (N.B. Falls $b < a$, dann definiert man $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$. Der Name hat seinen Ursprung in der Eigenschaft, die im folgenden Satz erwähnt wird:

Satz 6 *F ist (stetig)-differenzierbar und es gilt $F' = f$.*

Beweis. Sei x_0 ein Punkt aus $[a, b]$. Wir berechnen

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(F(x_0 + h) - F(x_0)) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\, dx.$$

Nach dem Mittelwertsatz bekommen wir

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} f(\xi_h).h,$$

wobei ξ_h zwischen x_0 und $x_0 + h$ liegt. Es ist klar, daß der Grenzwert $f(x_0)$ ist.

■

Allgemein heißt jede Funktion F mit der Eigenschaft $F' = f$ eine Stammfunktion von f. Allerdings gilt: Seien F_1 und F_2 Stammfunktion von f. Dann ist $F_1 - F_2$ eine konstante Funktion (entscheidend hier ist die Tatsache, daß der Definitionsbereich ein Intervall ist). In anderen Worten $\int_a^x f(t)\, dt$ ist, bis auf eine Konstante, die einzige Stammfunktion von f. Manchmal schreibt man $\int f$ für eine Stammfunktion von f.

Satz 7 *(Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung.) Sei $f : I \to \mathbf{R}$ eine stetige Funktion mit Stammfunktion F. Dann gilt für alle $a, b \in I$,*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Beweis. Übung.

■

Wir haben daher folgende Methode, um $\int_a^b f(x)\,dx$ zu bestimmen. Finde eine Funktion F mit f als Ableitung. Dann ist der Wert des Integrals $F(x)\big|_a^b \quad (= F(b) - F(a))$.

Satz 8 *(Satz über partielle Integration.) Seien f und g stetige Funktion mit Stammfunktionen F und G. Dann ist $FG - \int fG$ eine Stammfunktion für Fg d.h.*

$$\int_a^x F(t)g(t)\,dt = F(x)G(x) - \int_a^x f(t)G(t)\,dt.$$

Die Substitutionsregel. Sei $\phi : [a,b] \to \mathbf{R}$ stetig differenzierbar und $f : I \to \mathbf{R}$ stetig mit $\phi([a,b]) \subset I$. Dann gilt:

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,dx.$$

Beweis. Dies folgt aus der Kettenregel. Denn falls F eine Stammfunktion von f, dann ist $(F \circ \phi)$ eine Stammfunktion für $(f \circ \phi)\phi'$.

$\blacksquare$