Thema 7—Konvergenzkriterien (uneigentliche Integrale)

In diesem Kapitel betrachten wir unendliche Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, wobei (a_n) eine Folge von reellen Zahlen ist. Die Reihe **konvergiert gegen** s (oder s ist die **Summe der unendlichen Reihe**), falls $s_n \to s$, wobei s_n die n-te partielle Summe $\sum_{k=1}^{n} a_k$ ist. Für Reihen hat das Cauchykriterium folgende Gestalt:

Satz 1 *$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn gilt: Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert $N \in \mathbf{N}$, so daß*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \epsilon \text{ für alle } m \geq n \geq N.$$

Falls die Reihe nicht konvergiert, dann sagt man, daß sie **divergiert.**

Falls die a_n nicht-negativ sind, dann ist die Folge der partiellen Summen monoton-steigend. Damit gibt es in diesem Fall nur zwei Möglichkeiten:

entweder sind die partiellen Summen beschränkt und die Reihe konvergiert;

oder die Summen sind nicht beschränkt und die Reihe divergiert. (Man schreibt dann manchmal $\sum_n a_n = \infty$).

Man sieht sofort, daß eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nur dann konvergieren kann, wenn $a_n \to 0$. Denn

$$a_n = s_{n+1} - s_n \to s - s = 0.$$

Es gibt aber divergente Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, mit $a_n \to 0$.

Beispiel. $\sum \frac{1}{n}$ divergiert. Denn wir können die partiellen Summen $s_{2^{k+1}}$ von unten wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} s_{2^{k+1}} &= 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + \cdots + (\sum_{m=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{m}) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} > 1 + \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

Damit sind die partiellen Summen nicht beschränkt.

Beispiel. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ konvergiert für alle natürlichen Zahlen $k > 1$.
Wir zeigen dies für den Fall $k = 2$. Für den allgemenen Fall, siehe unten. Wir haben die Abschätzung:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{n^2} &= 1 + (\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}) + \cdots + \left(\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{n^2} \right) \\ &\leq \sum_{r=0}^{k} \frac{2^r}{(2^r)^2} \leq 2. \end{aligned}$$

Bemerkung. Es gilt sogar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

(siehe unten oder die Vorlesung: “Funktionentheorie”).

Wir bringen jetzt einige Kriterien für die Konvergenz bzw Divergenz von Reihen:
Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen
Sei (a_n) eine monoton fallende Folge von positiven Zahlen mit $\lim a_n = 0$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.
BEWEIS. Für die partiellen Summen s_k gilt:

> s_{2k} ist monoton fallend;
>
> s_{2k-1} ist monoton steigend;
>
> $s_{2k-1} \leq s_{2k}$.

Daraus folgt: $L = \lim_k s_{2k}$ und $L' = \lim_k s_{2k-1}$ existieren. Außerdem gilt:

$$L - L' = \lim s_{2k} - \lim s_{2k-1} = \lim(s_{2k} - s_{2k-1}) = \lim a_{2k} = 0.$$

Daraus folgt leicht, daß die Reihe konvergiert.

■

BEISPIEL. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ konvergiert. (In der Tat ist der Grenzwert $\ln 2$).

Definition 2 *Die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *heißt* **absolut konvergent**, *falls* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *konvergiert.*

Es folgt aus dem Cauchyschen Konvergenzkriterium, daß die Reihe dann konvergiert. Denn

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_n\right| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_n| .$$

Das Beispiel $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{1}{n}$ zeigt, daß eine Reihe konvergent sein kann, ohne absolut konvergent zu sein. Wir reden dann von einer **bedingt konvergenten** Reihe.

Majorantenkriterium. Sei $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ eine konvergente Reihe mit nicht negativen Gliedern. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, falls die Folge (a_n) von (c_n) majorisiert wird (d.h. $|a_n| \leq c_n$ für jedes n).
BEWEIS. Es gilt dann

$$|\sum_{k=m}^{n} a_n| \leq \sum_{k=m}^{n} c_n.$$

Damit ist das Konvergenzkriterium von Cauchy erfüllt.

■

Da die Konvergenz oder Divergenz einer Reihe nicht beeinflußt wird, wenn man endlich viele Glieder verändert, genügt die Bedingung: Es existieren $N \in \mathbf{N}$;und $K > 0$, so daß $|a_n| \leq K c_n$, falls $n \geq N$.
Aus dem letzten Satz folgt das folgende Kriterium:

Vergleichskriterium. Seien (a_n) und (b_n) zwei Folgen mit positiven Glieder. Falls $\lambda > 0$ existiert, so daß $\dfrac{a_n}{b_n} \to \lambda$, dann gilt: $\sum_n a_n$ konvergiert $\iff$ $\sum_n b_n$ konvergiert.
BEWEIS. Übung.

■

Quotientenkriterium. Sei $\sum a_n$ eine Reihe mit nicht-verschwindenden Gliedern. Es gebe ein λ mit $0 < \lambda < 1$, so daß

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \lambda \text{ für alle } n.$$

Dann konvergiert die Reihe (absolut).
Beweis. Es folgt leicht aus der Voraussetzung, daß man die Reihe durch eine (konvergierende) geometrische Reihe majorisieren kann.

∎

Wurzelkriterium. Sei $\sum a_n$ eine unendliche Reihe und es gelte: $\lim |a_n|^{1/n} = \lambda$, wobei $\lambda < 1$. Dann ist die Reihe (absolut) konvergent.
Beweis. Wiederum kann man die Reihe mit einer geometrischen Reihe majorisiern.

∎

Bemerkung. In der Tat reicht die Bedingung $\limsup_n |a_n|^{1/n} = \lambda < 1$ für die Konvergenz. Ähnlich genügt die Bedingung:

$$\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

beim Quotientenkriterium.

Beispiele.

I. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2^n}$ konvergiert (Quotientenkriterium).

II. $\sum \dfrac{1}{n}$. Wir wissen, daß diese Reihe divergiert. Es gilt aber $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ für jedes n bzw. $|a_n|^{1/n} < 1$ für jedes n.

III. Die Reihen $\sum \dfrac{1}{n}$ und $\sum \dfrac{1}{n^2}$ zeigen, daß die Quotienten- und Wurzelkriterien keine Information liefern, wenn die entsprechenden Limiten gleich 1 sind.

Divergenzkriterien: Analog zu den obigen Kriterien, gibt es welche, die Divergenz bestimmen. Wir erwähnen drei davon:

Satz 3 *Falls die Reihe* $\sum_n a_n$ *von nicht negativen Gliedern divergiert, dann auch* $\sum_n b_n$*, falls* $b_n \geq a_n$ *für jedes* n*.*
Falls die Reihe $\sum_n a_n$ *die Bedingung* $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \lambda$ *erfüllt, wobei* $\lambda > 1$*, dann divergiert die Reihe.*
Falls die Reihe $\sum_n a_n$ *die Bedingung* $\lim |a_n|^{1/n} \to \lambda$ *erfüllt, wobei* $\lambda > 1$*, dann divergiert die Reihe.*

Satz 4 *Sei* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent. Dann konvergiert jede Reihe, die aus der Reihe durch Umordnen entsteht, und zwar gegen die gleiche Summe. Genauer: Für jede bijektive Abbildung* $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ *konvergiert die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ *gegen* $a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$*.*

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wir wählen N_1 so, daß $\sum_{k=n}^{\infty} |a_n| < \epsilon$, wenn $n \geq N_1$. Sei dann N so, daß $\{\sigma(1), \ldots, \sigma(N)\} \supset \{1, \ldots, N_1\}$. Es gilt dann für $m \geq N$:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{m} a_{\sigma(k)} - a \right| &\leq \left| \sum_{k=1}^{m} a_{\sigma(k)} - \sum_{n=1}^{N_1} a_n \right| + \left| \sum_{n=1}^{N_1} a_n - a \right| \\ &\leq \sum_{n=N_1+1}^{\infty} |a_n| + \epsilon < 2\epsilon. \end{aligned}$$

■

Für bedingt konvergente Reihen gilt dieser Satz nicht. In der Tat kann man jede solche Reihe so umordnen, das sie *divergiert* oder gegen jeden *willkürlichen* Wert konvergiert!! Denn sei $\sum a_n$ eine Reihe. Wir zerlegen diese in die Differenz von zwei Reihen mit nichtnegativen Elementen $\sum a_n^+$ und $\sum a_n^-$, wobei

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & (a_n \geq 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

bzw.

$$a_n^- = \begin{cases} -a_n & (a_n \leq 0) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man sieht leicht, daß $\sum a_n$ genau dann absolut konvergent ist, wenn diese zwei Reihen konvergieren. Andererseits divergieren *beide* , falls $\sum a_n$ bedingt konvergent ist. Sei jetzt L eine willkürliche Zahl. Man konstruiert eine Umordnung, die gegen L konvergiert wie folgt. Zunächst wählt man genügend viele positive Glieder, daß die Summe größer als L wird. Dann nimmt man negative Elemente, damit die Summe wieder kleiner als L wird usw.

Bezüglich des Verhaltens von Reihen gegenüber den algebraischen Operationen gilt:

Satz 5 *Falls die Reihen $\sum_n a_n$ und $\sum_n b_n$ konvergieren, dann konvergiert auch die Summe $\sum_n (a_n + b_n)$ (natürlich gegen $\sum_n a_n + \sum_n b_n$).*
Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolut konvergent sind, dann ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ (mit $c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$) absolut-konvergent. Außerdem gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k \right).$$

Beweis. Seien a und b die Summen der entsprechenden Reihen bzw. A und B die Summen der Reihen der Absolutbeträge. Wir zeigen $\lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_n = ab$. Wähle N so, daß

$|(\sum_{k=0}^{n} a_k)(\sum_{k=0}^{n} b_k) - ab| < \epsilon$ für $n \geq N$;
$\sum_{k=n}^{\infty} |a_k| < \epsilon$ für $n \geq N$;
$\sum_{k=n}^{\infty} |b_k| < \epsilon$ für $n \geq N$.

Dann gilt, für $n \geq 2N$,

$$\left| \sum_{k=0}^{n} c_k - ab \right| < \epsilon(1 + A + B).$$

■

Beispiel. (Die Exponentialreihe.) Betrachte die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Aus dem Quotientenkriterium sieht man leicht, daß die Reihe für jedes $x \in \mathbf{R}$ konvergiert, und zwar absolut. Wir schreiben $\exp x$ für die Summe. Insbesonders, $e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ ist die **Eulersche Zahl**.

Aus der Formel für das Produkt von zwei absolut-konvergierenden Reihe berechnet man den

Satz 6 *(Funktionalgleichung der Exponentialfunktion.) Für $x, y \in \mathbf{R}$ gilt:*

$$\exp(x+y) = \exp(x).\exp(y).$$

Beweis. Sei $a_i = \frac{x^i}{i!}$, $b_j = \frac{y^j}{j!}$. Dann ist

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \frac{y^k}{k!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \frac{1}{n!}(x+y)^n.$$

■

Daraus folgen einige Eigenschaften der Exponentalfunktion:

für $x \in \mathbf{R}$, gilt $\exp x > 0$;

$\exp(-x) = (\exp(x))^{-1}$;

$\exp n = e^n$ für $n \in \mathbf{Z}$.

Weitere Beispiele von Funktionen, die man mit Hilfe von geeigneten Reihen definieren kann sind:

Die trigonometrischen Funktionen: Wir definieren:

$$\begin{aligned}\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.\end{aligned}$$

Die Reihen konvergieren absolut für jedes $x \in \mathbf{R}$ (Quotientenkriterium). Aus der Definition sieht man unmittelbar, daß

$\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$;

$\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$;

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$;

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$;

$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$;

$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$;

$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$.

Beweis. (1) und (2) sind trivial. (3) und (4) beweist man mit Hilfe der Cauchyproduktes, wie bei der Funktionengleichung der Exponentialfunktion. Da wir später einen einfacheren Beweis geben werden, verzichten wir hier auf die Komputation. (5), (6), (7) folgen aus (3) und (4).

■

Weitere trigonometrische Funktionen: Mit Hilfe der Funktionen sin und cos können wir folgende weitere trigonometrischen Funktionen definieren:

$$\begin{aligned}\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x};\\ \operatorname{cosec}(x) &= \frac{1}{\sin x};\\ \operatorname{cotan}(x) &= \frac{\cos x}{\sin x};\\ \sec(x) &= \frac{1}{\cos x}.\end{aligned}$$

Selbstverständlich sind diese Funktionen nur für die x definiert, für die die entsprechenden Nenner ungleich Null sind.
Die Eigenschaften dieser Funktionen kann man aus den entsprechenden Eigenschaften von sin und cos ableiten. Z.B. gilt folgende Summenformel für tan:

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}.$$

Uneigentliche Integrale:

I. Integrale mit unendlichen Integrationsgrenzen: Sei $f : [a, \infty[\to \mathbf{R}$ eine beschränkte Funktion. Falls
$$\lim_{c\to\infty} \int_a^c f(x)\,dx$$
existiert, ist das Integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ **konvergent** und wir definieren
$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{c\to\infty} \int_a^c f(x)\,dx.$$
Ähnlicherweise definieren wir die Existenz und den Wert von $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ bzw. $\int_{\mathbf{R}} f(x)\,dx$ für eine Funktion f, die auf $]-\infty, a]$ bzw. auf $\mathbf{R}$ definiert ist.

II. Integrale, wobei der Integrand Singularitäten hat bzw. nicht beschränkt ist. Sei etwa $f :]a, b] \to \mathbf{R}$ so, daß für jedes $\epsilon > 0$, die Einschränkung der Funktion auf $[a+\epsilon, b]$ beschränkt und integrierbar ist. Falls
$$\lim_{\epsilon\to 0+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)\,dx$$
existiert, setzt man den Wert von
$$\int_a^b f(x)$$
gleich dem Limes.

Wir bemerken hier, daß es Kriteria für die Konvergenz und Divergenz von uneigentlichen Integralen gibt, die analog der obigen Kriteria für Reihen sind. Weiterhin unterscheidet man zwischen absolut-konvergenten und bedingten konvergenten Integralen. Z. B. konvergiert das uneigentlich Integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ (sein Wert ist $\dfrac{\pi}{2}$—siehe Übungen). $\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|\,dx$ dagegen divergiert.

Beispiele. Betrachte die Integrale

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

und

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx.$$

Das erste Integral konvergiert genau dann, wenn $\alpha > 1$, das zweite wenn $\alpha < 1$.

Integralkriterium für die Konvergenz von Reihen. Sei

$$f : [1, \infty[\to \mathbf{R}$$

eine nicht negative, monoton fallende Funktion. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ genau dann, wenn das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty f(x)\,dx$$

konvergiert.

Beweis. Daß die Konvergenz des Integrals diejenige der Reihe impliziert, folgt aus der Tatsache, daß $\sum_{n=2}^N f(n)$ das Integral einer Treppenfunktion ist, die von f majorisiert wird. Andererseits ist $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ das Integral einer Treppenfunktion, die f majorisiert. ■

Beispiele. Die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \dfrac{1}{n^\alpha}$. Mithilfe des Satzes können wir sofort ableiten, daß $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ konvergiert für $\alpha > 1$ und divergiert für $\alpha \leq 1$.