Thema 8—Konvergenz von Funktionen-Folgen und -Reihen

Definition 1 *Sei (f_n) eine Folge von Funktionen von $D \subset \mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$. Wir sagen, daß f_n* **punktweise gegen eine Funktion f konvergiert**, *falls gilt: $f_n(x) \to f(x)$ für jedes $x \in D$.*

Dies ist der natürliche Konvergenzbegriff für Funktionen. Allerdings, wie wir sehen werden, ist für viele Zwecke ein subtilerer und stärkerer Begriff unerläßlich:

Definition 2 *Seien (f_n) und f wie oben. Dann gilt: f_n konvergiert* **gleichmäßig** *gegen f, falls: Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein N, so daß $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ für alle $x \in D$ und alle $n \geq N$.*

Beispiele. Es ist klar, daß jede gleichmäßig konvergente Folge punktweise konvergiert. Die folgenden sind Beispiele von Folgen, die zwar punktweise konvergieren, nicht aber gleichmäßig.

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - |nx - 1| & (0 \leq x \leq \frac{1}{n}) \\ 0 \quad (\frac{1}{n} \leq x \leq 1). \end{cases}$$

$$f_n(x) = x^n \quad (0 \leq x \leq 1).$$

$$f_n(x) = \begin{cases} n & (0 < x < \frac{1}{n}) \\ 0 & x = 0 \text{ oder } x \in]\frac{1}{n}, 1]). \end{cases}$$

Die Definition von gleichmäßiger Konvergenz kann man folgendermaßen umschreiben:

Definition 3 *Sei f eine beschränkte Funktion auf D. Wir definieren*

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in D\}.$$

Falls f unbeschränkt ist, dann setzen wir $\|f\|_\infty = \infty$.

Satz 4 *f_n konvergiert genau dann gleichmäßig gegen f, wenn gilt:*

$$\|f_n - f\|_\infty \to 0$$

.

Satz 5 *Sei (f_n) eine Folge von stetigen Funktion auf D, die gleichmäßig gegen f auf D konvergiert. Dann ist f stetig.*

Beweis. Fixiere einen Punkt x_0 aus D und $\epsilon > 0$. Es gibt ein $N \in \mathbf{N}$ mit $\|f_n - f\|_\infty < \frac{\epsilon}{3}$, falls $n \geq N$. Da f_N stetig, existiert ein $\delta > 0$, so daß $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}$, falls $|x - x_0| < \delta$. Es gilt dann, für $|x - x_0| < \delta$,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \leq \epsilon.$$

■

Konvergenzkriterium von Weierstraß. Sei $f_n : D \to \mathbf{R}$ eine Folge von Funktion auf D mit der Eigenschaft, daß $\sum_n \|f_n\|_\infty < \infty$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_n f_n$ absolut und gleichmäßig gegen eine Funktion f. Daher gilt: Falls jedes f_n stetig ist, dann auch f.
Beweis. Übung.

■

Potenzreihen: Eine Potenzreihe ist eine Funktionenreihe der Gestalt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Um die Schreibweise einfach zu halten, werden wir meistens annehmen, daß $x_0 = 0$.
Typische Beispiele sind die Reihen, die wir verwendet haben, um die Exponentialfunktion bzw. sin und cos zu definieren.

Satz 6 *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe, die für $x_0 \neq 0$ konvergiert. Dann konvergiert die Reihe absolut für jedes x mit $|x| < |x_0|$. Außerdem konvergiert die Reihe gleichmäßig auf jedem Intervall der Form $[-a, a]$ mit $a < |x_0|$. Damit ist die Funktion*

$$g(x) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n x^n$$

auf $]-|x_0|, |x_0|[$ definiert und stetig.

Beweis. Da $\sum_n a_n x_0^n$ konvergiert, ist die Folge $(a_n x_0^n)$ beschränkt. Sei $K > 0$ so, daß $|a_n x_0^n| \leq K$ für jedes n.
Für die Reihe $\sum a_n x^n$ mit $|x| < |x_0|$, kann man den Term $a_n x^n$ wie folgt abschätzen:

$$|a_n x^n| = \left| a_n \left(\frac{x^n}{x_0^n} \right) x_0^n \right| \leq \left| \frac{x}{x_0} \right|^n K.$$

Damit konvergiert die Reihe absolut (Vergleich mit einer geometrischen Reihe).
Der Beweis der zweiten Behauptung ist ähnlich.

■

Definieren wir

$$R = \sup\{x > 0 : \sum_n a_n x^n \text{ konvergiert}\},$$

so gilt: $\sum_n a_n x^n$ konvergiert für jedes x mit $|x| < R$. Außerdem ist die Konvergenz absolut und gleichmäßig auf jedem Intervall $[-a, a]$ mit $a < R$. Für $|x| > R$ divergiert die Reihe. (Für den Fall $|x| = R$ bekommt man i.A. keine Auskunft).
R heißt der **Konvergenzradius** der Reihe. Aus dem Wurzelkriterium bekommt man die folgende explizite Formel für R:

$$R = \frac{1}{\limsup_n |a_n|^{1/n}}.$$

Beispiele von Potenzreihen: Wir haben schon die Potenzreihendarstellungen von exp, sin und cos kennengelernt. Weitere Beispiele sind:
die binomische Reihe

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (-1 < x < 1, \alpha \in \mathbf{R})$$

bzw. die hyperbolischen Funktionen:

$$\sinh x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

$$\cosh x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!}.$$

Satz 7 *Sei (f_n) eine Folge von stetigen Funktion auf $[a,b]$, die gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann gilt:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Beweis. Die Aussage folgt sofort aus der Abschätzung:

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx \right| \leq (b-a)\|f - f_n\|_\infty.$$

■

Die oben angeführten Beispiele zeigen, daß eine ähnlich Aussage für punktweise Konvergenz nicht gültig ist.

Satz 8 *Sei (f_n) eine Folge von stetig differenzierbaren Funktionen auf $[a,b]$, die punktweise gegen f konvergiert. Weiters sei die Folge (f_n') der Ableitungen gleichmäßig konvergent. Dann gilt: f is (stetig)-differenzierbar und*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Beweis. Wir setzen $g = \lim f_n'$ und fixieren $x \in [a,b]$. Wir haben die Beziehung:

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,dt.$$

Wir lassen n gegen ∞ gehen und bekommen

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt.$$

Da g stetig, gilt:

$$f'(x) = g(x) = \lim_n f_n'(x).$$

■

Beispiel. Das Beispiel

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sin nx$$

zeigt, daß eine Funktionenfolge gleichmäßig konvergieren kann, ohne daß die abgeleiteten Funktionen konvergieren.

Aus diesem Satz folgt:

Korollar 9 *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius R. Dann ist die Funktion $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ auf $]-R,R[$ (unendlich oft) differenzierbar und es gilt:*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Beweis. Der Konvergenzradius der Reihe $\sum n a_n x^{n-1}$ stimmt mit dem von $\sum a_n x^n$ überein (warum?)

■

Taylor Entwicklungen: Wir kehren zurück zum Thema der Taylorentwicklungen. Wir erinnern daran, daß eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion auf dem Intervall I die Darstellung

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x)$$

hat, wobei a ein Punkt im Inneren von I ist. Hier hat das Restglied die Gestalt $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-a)^{(n+1)}$. In der Praxis interessiert man sich für Abschätzungen des Restgliedes. Daher ist die folgende Formel für R_{n+1} oft nützlich:

Satz 10 *Es gilt:*

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Beweis. Induktionsbeweis:
$n = 1$: Es gilt

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt.$$

$n-1 \to n$: Es gelte

$$R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt.$$

Mit partieller Integration, sieht man, daß

$$\begin{aligned} R_n(x) &= -f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\Big|_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \\ &= \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \\ &= \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x). \end{aligned}$$

■

Bemerkung. Man sieht sofort, daß das Restglied die Wachstumsbedingung

$$\lim_{x\to a} \frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^n} = 0$$

erfüllt.

Definition 11 *Sei $f : I \to \mathbf{R}$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion, $a \in I$. Dann heißt*

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

die **Taylor-Reihe** *von f.*

Zunächst machen wir keine Aussagen, die Konvergenz dieser Reihe betreffend. In der Tat kann passieren

daß die Reihe nicht konvergiert (außer im Punkt a, wo sie ja immer konvergiert);

daß die Reihe konvergiert, aber nicht gegen f.