Thema 9—Fourierreihen

Für manche Zwecke ist es nütlich, eine Funktion f auf $[0, 2\pi]$ durch eine **trigonometrische** Reihe der Gestalt

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

darzustellen.
Um die Koeffizienten zu bestimmen, benutzt man die sogenannte Orthogonalität der trigonometrischen Funktionen, d.h. die Beziehungen

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad m \neq n \\ \pi & \text{falls} \quad m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi & m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx = 0.$$

Daraus folgt: Falls

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx,$$

dann gilt:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx \end{aligned}$$

$(a_n), (b_n)$ heißen die **Fourierkoeffizienten** von f, die Reihe $(*)$ die **Fourierreihe** von f. Zunächst ist die Fourierreihe nur formal definiert. Wie im Fall der Taylorreihe stellen sich natürlicherweise zwei Fragen:

a) Konvergiert die Fourierreihe?

b) Falls ja, ist die Summe gleich f?

Im allgemeinen ist die Frage der Konvergenz sehr delikat. Für unsere Zwecke ist der folgende Satz hinreichend.

Satz 1 *Sei f stückweise stetig differenzierbar. Dann konvergiert die Fourierreihe von f und zwar gilt:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx &= \frac{1}{2}[f(x-) + f(x+)] \quad (x \in]0, 2\pi[) \\ &= \frac{1}{2}[f(0+) + f(2\pi-)] \quad (x = 0 \textit{ oder } 2\pi). \end{aligned}$$

Insbesondere:

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = f(x)$$

falls f im Punkt x stetig ist.

Bemerkung. Falls die Fourierreihe auf $[0, 2\pi]$ konvergiert, dann konvergiert sie auf ganz $\mathbf{R}$ und die Summe g ist 2π-**periodisch** d.h. $g(x + 2\pi) = g(x)$ $(x \in \mathbf{R})$.

Varianten der Fourierreihe

I. Die komplexe Fourierreihe: Die Fourierreihe $\frac{1}{2}a_0 + \sum a_n \cos nx + \sum b_n \sin nx$ läßt sich in der komplexen Gestalt $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ schreiben, wobei

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \quad (n > 0), \quad c_{-n} = \bar{c}_n.$$

II. Falls f auf dem Intervall $[0, 2l]$ definiert ist, dann ist

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} dx + \sum b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

wobei

$$a_n = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, b_n = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx$$

die Fourierreihe von f.

III. Falls $f : [-\pi, \pi] \to \mathbf{R}$ gerade ist, dann hat die Fourierreihe von f die Gestalt

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

(d.h. die b_n verschwinden. Denn

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0).$$

Falls g eine Funktion auf $[0, \pi]$ ist, definieren wir eine gerade Funktion f, wobei $f(x) = g(-x)$ $(x \in [-\pi, 0])$.

Die Fourierreihe von f hat die Gestalt

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

wobei

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x) \, dx.$$

Diese Reihe heißt die **Fourier Cosinusreihe** von g.

IV. Falls f dagegen ungerade ist d.h. $f(-x) = -f(x)$ dann hat die Fourierreihe von f die Gestalt

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Falls $g\,[0,\pi]\to\mathbf{R}$ dann ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

wobei

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\sin nx dx$$

die **Fourier Sinusreihe** von g.

Beispiele. I. Sei $|a|<1$. Dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin nx dx$$

die Fourierreihe von

$$\frac{a\sin x}{1-2a\cos x+a^2}.$$

Denn

$$\begin{aligned}\sum_{n-1}^{\infty} a^n \sin nx = \Im\left(\sum_{n=0}^{\infty}(ae^{ix})^n\right) &= \Im\left(\frac{1}{1-ae^{ix}}\right)\\ &= \frac{a\sin x}{1-2a\cos x+a^2}.\end{aligned}$$

II. Für

$$f(x)=\begin{cases}(x-\pi)^2 & (x\in[0,\pi])\\ \pi^2 & (x\in[\pi,2\pi])\end{cases}$$

gilt:

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{4\pi^2}{3}\\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f9x)\cos nx dx = \frac{1}{n^2}\\ b_n &= \frac{(-1)^n}{n} - \frac{2}{\pi n^3}[1-(-1)^n].\end{aligned}$$

Daher ist die Fourierreihe von f

$$\frac{2}{3}\pi^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^n}{n}\pi - \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n^3}\right\}\sin nx.$$

Die Reihe konvergiert gegen $f(x)$ für jedes x außer $x=\pi$. Für $x=\pi$ ist

$$\frac{1}{2}(f+(\pi-)+f(\pi+)) = \frac{\pi^2}{2}.$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} &= \frac{\pi^2}{6} \quad (x=0)\\ \frac{1}{2}\pi^2 &= \frac{2}{3}\pi^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \quad (x=\pi)\end{aligned}$$

d.h.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$
III. Für $f(x) = 4 - x^2$ $(x \in [0,2])$ ist die Fourierreihe
$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x)$$
wobei
$$a_n = \int_0^2 (4 - x^2)\cos(n\pi x)dx = -\frac{4}{n^2\pi^2}$$
$$b_n = \int_0^2 (4 - x^2)\sin(n\pi x)dx = \frac{4}{nx}$$
d.h.
$$4 - x^2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi x}{n^2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x}{n}.$$
IV. (Fouriercosinus Reihe): Die Cosinusreihe von
$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,2] \\ 2 & x \in [2,4] \end{cases}$$
ist
$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{4}$$
wobei
$$a_n = \int_0^4 f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right)dx = \frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\left\{1 - \frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right\}.$$
V. $f(x) = x \quad (x \in [-\pi,\pi])$
$$f(x) = 2\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{3} + \frac{\sin 3x}{3}\dots\right)$$
$$\left(x = \frac{\pi}{2} \text{ liefert } \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + 15\dots\right).$$
VI. $f(x) = x^2 \quad (x \in [-\pi,\pi])$
$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots\right).$$
VII. $f(x) = x\cos x$
$$f(x) = -\frac{1}{2}\sin x + 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 1}.$$
VIII. $f(x) = \cos\alpha x \quad (x \in [-\pi,\pi]) \quad (\alpha \notin \mathbf{Z})$
$$f(x) = \frac{2\alpha\sin\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{\cos x}{\alpha^2 - 1} + \frac{\cos 2\alpha}{\alpha^2 - 4} - \dots\right).$$

Ableitungen und Integrale von Fourierreihen

1. **Differentiation**: Falls

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

dann gilt

$$f'(x) \sim \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx,$$

wobei

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\pi}[f(2\pi) - f(0)] \\ A_n &= \frac{1}{\pi}[f(2\pi) - f(0)] + nb_n \\ B_n &= -na_n. \end{aligned}$$

2. **Integration**: dann gilt für

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)dt - \frac{1}{2}a_0 x$$

$$F(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx$$

wobei

$$A_n = -\frac{b_n}{n}, \quad B_n = \frac{a_n}{n} \quad (n > 0).$$