Analysis I

James B. Cooper

Inhaltsverzeichnis

1 Die natürlichen Zahlen und die Axiome von Peano **1**
Aufgaben . . . 5

2 Der Körper der reellen Zahlen **8**
Aufgaben . . . 10

3 Folgen, Grenzwerte **12**
Aufgaben . . . 18

4 Limiten und Stetigkeit von Funktionen **20**
Aufgaben . . . 25

5 Differentiation **28**
Aufgaben . . . 34

6 Das Riemannsche Integral **35**
Aufgaben . . . 39

7 Konvergenzkriterien (uneigentliche Integrale) **40**
Aufgaben . . . 46

8 Konvergenz von Funktionen-Folgen und -Reihen **48**
Aufgaben . . . 53

9 Fourier-Reihen **53**
Aufgaben . . . 57

10 Anhang **59**
10.1 Die Konstruktion der reellen Zahlen . . . 59
10.2 Logik . . . 59
10.2.1 Grundbegriffe der Logik . . . 59

11 Übungsaufgaben mit Lösungsvorschlägen **64**
11.1 Übungsaufgaben . . . 64
11.1.1 Thema—Funktionen . . . 64
11.1.2 Thema—Differentiation . . . 67
11.1.3 Thema—Integration . . . 70
11.1.4 Thema—Fourierreihen . . . 72
11.1.5 Thema—die schwingende Saite . . . 74
11.1.6 Thema—Induktion . . . 76
11.1.7 Thema—reelle Zahlen, Konvergenz . . . 79
11.1.8 Thema—Stetigkeit . . . 82
11.1.9 Thema—Wiederholung . . . 85
11.1.10 Thema—Differentiation . . . 86
11.1.11 Thema—Integration . . . 88
11.1.12 Thema—Fourierreihen und Konvergenz von Funktionenfolgen . . . 93
11.2 Lösungsvorschläge . . . 97
11.2.1 Thema—Funktionen . . . 97
11.2.2 Thema—Differentiation . . . 100

11.2.3 Thema—Integration . . . 100
11.2.4 Thema—Fourierreihen . . . 101
11.2.5 Thema—die schwingende Saite . . . 104
11.2.6 Thema—Induktion . . . 108
11.2.7 Thema—reelle Zahlen, Konvergenz . . . 110
11.2.8 Thema—Stetigkeit . . . 111
11.2.9 Thema—Wiederholung . . . 112
11.2.10 Thema—Differentiation . . . 113
11.2.11 Thema—Integration . . . 115
11.2.12 Thema—Fourierrheien und Konvergenz von Funktionenfolgen . . . 117

1 Die natürlichen Zahlen und die Axiome von Peano

Wir bezeichnen mit $\mathbf{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen d.h.

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Falls wir das Nullelement 0 dazu nehmen, dann bezeichnen wir die resultierende Menge mit $\mathbf{N}_0$—also

$$\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

$\mathbf{N}$ wird durch folgende Eigenschaften charakterisiert:
Die Axiome von Peano:

1. $1 \in \mathbf{N}$;
2. Jede natürliche Zahl hat einen eindeutig bestimmten Nachfolger n'.
3. Jede natürliche Zahl n, außer 1, ist der Nachfolger einer eindeutig bestimmten natürlichen Zahl.
4. Sei A eine Teilmenge von $\mathbf{N}$ mit folgenden Eigenschaften:
   (a) $1 \in A$;
   (b) falls $n \in A$, dann $n' \in A$.

   Dann ist $A = \mathbf{N}$.

Eigenschaft 3. wird oft wie folgt ausgedrückt:
Beweisprinzip der mathematischen (oder vollständigen) Induktion
Sei $A(n)$ eine Aussage, die von der natürlichen Zahl n abhängt. Falls

> $A(1)$ richtig ist;
>
> für $n \in \mathbf{N}$ gilt: $A(n)$ ist richtig impliziert $A(n')$ ist richtig, dann ist $A(n)$ für jedes $n \in \mathbf{N}$ richtig.

Beweis. Setze $A = \{n \in \mathbf{N} : A(n) \text{ ist richtig}\}$ und verwende Eigenschaft 3).

■

Es gibt verschiedene Varianten dieser Aussage, etwa
Mathematische Induktion — Variante I Sei $A(n)$ eine Aussage, die von der natürlichen Zahl n abhängt.Falls

> $A(n_0)$ richtig ist;
>
> für $n \geq n_0$ gilt: Ist $A(n)$ richtig, so auch $A(n')$.

Dann gilt $A(n)$ für jedes $n \geq n_0$.
Beweis. Setze $B(n) = A(n_0 + (n - 1))$ und verwende die ursprüngliche Form.

■

Mathematische Induktion — Variante II Sei $A(n)$ eine Aussage, die von der natürlichen Zahl n abhängt. Falls

> $A(1)$ richtig ist;
>
> für $n \in \mathbf{N}$ gilt: Sind $A(1), \dots, A(n)$ richtig, so auch $A(n')$.

Dann gilt $A(n)$ für jedes n.

Beweis. Setze $B(n) = A(1) \wedge A(2) \wedge \cdots \wedge A(n)$.

■

Mit Hilfe der mathematischen Induktion definieren wir:

I. Addition: Wir definieren die Summe $m + n$ von zwei natürlichen Zahlen wie folgt:

Für $m \in \mathbf{N}$ definieren wir $m + 1 = m'$;

Für eine natürliche Zahl, die Nachfolger n' der natürlichen Zahl n ist, definieren wir $m + n' := (m + n)'$.

Man sieht dann, daß $m + n$ für jedes n definiert ist (setze

$$A = \{n : m + n \text{ ist definiert}\}).$$

Es gelten, wie erwartet, die bekannten Gesetze:

$m + n = n + m$ $(m, n \in \mathbf{N})$ (Kommutativität);

$m + (n + p) = (m + n) + p$ $(m, n, p \in \mathbf{N})$ (Assoziativität).

Beweis. Wir beweisen die Assoziativität. Dazu verwenden wir Induktion bzgl. p.
Für $p = 1$ ist die Aussage: $(m + n') = m + n'$.
$p \to p + 1$: Es gelte: $m + (n + p) = (m + n) + p$. Dann

$$(m + n) + p' = [(m + n) + p]' = [m + (n + p)]' = m + (n + p)' = m + (n + p').$$

■

II. Multiplikation: Auch das Produkt zweier Zahlen wird rekursiv definiert:

$m.1 = m$ $(m \in \mathbf{N})$;

$m.n' = m.n + m$ $(m, n \in \mathbf{N})$.

Man zeigt, daß mn für jedes Paar m, n definiert ist (wie für $+$).

Wiederum gelten die bekannten Gesetze:

$m \cdot n = n \cdot m$ $(m, n \in \mathbf{N})$;

$m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$ $(m, n, p \in \mathbf{N})$;

$m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$ $(m, n, p \in \mathbf{N})$ (Distributivität);

Notation: Sei a_k eine reelle Zahl für k mit $m \leq k \leq n$. Dann setzt man

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{n} a_k &= a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n \\ \prod_{k=m}^{n} a_k &= a_m . a_{m+1} \ldots a_n . \end{aligned}$$

(Genaugenommen verwendet man wieder Induktion: Z.B. definiert man

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{m} a_k &= a_m \\ \sum_{k=m}^{n'} a_k &= \sum_{k=m}^{n} a_k + a_{n'} . \end{aligned}$$

Setzt man $A = \{n \geq m : \sum_{k=m}^{n} a_k \text{ ist definiert}\}$, so sieht man, daß $A = \{n : n \geq m\}$).

Die folgenden Sätze werden mit Hilfe der mathematischen Induktion bewiesen:

Satz 1.1 *Für alle $n \geq 1$ gilt*

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis. Induktion. $n = 1$ ist klar.
$n \to n+1$: Es gelte $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n'} k &= \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + n' \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \frac{1}{2}n'(n'+1). \end{aligned}$$

■

Satz 1.2 *Für alle $n \geq 1$ gilt*

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2.$$

Beweis. Übung.

■

Schreibweise: Für $n \in \mathbf{N}$ ist

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k.$$

(Wir setzen $0! = 1$.)

Satz 1.3 *Die Anzahl der möglichen Anordnungen einer n-elementigen Menge $\{a_1, \ldots, a_n\}$ ist $n!$.*

Beweis. Wir beweisen die (formal allgemeinere) Aussage: Seien S, S_1 n-elementige Mengen. Dann gibt es $n!$ Bijektionen von S auf S_1.
Induktion. Der Fall $n = 1$ ist klar.
$n \to n+1$: Wir fixieren eine Element a aus S. Es gibt $n+1$ mögliche Bilder von a in S_1. Für jedes Bild gibt es $n!$ Bijektion—also insgesamt $(n+1)!$.

■

Schreibweise: Für natürliche Zahlen k und n (mit $k \leq n$), sei $\binom{n}{k}$ die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge. (Wir setzen $\binom{n}{k} = 1$, falls $k = 0$.)
Es gilt $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{n} = 1$.

Satz 1.4 *Für $1 \leq k \leq n$ gilt*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Für $0 \leq k \leq n$ gilt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Beweis.

1. ist klar.
2. Wir zerlegen die Familie der k-elementigen Teilmengen von
$$\{a_1, \ldots, a_n\}$$
in zwei disjunkten Klassen.
    a) die Teilmengen, die a_1 enthalten. Es gibt $\binom{n-1}{k-1}$ davon;
    b) die Teilmengen, die a_1 nicht enthalten. Es gibt $\binom{n-1}{k}$ davon.
3. Induktionsbeweis: Für $n = 0$ ist die Aussage richtig.
$n \to n+1$: Es gelte $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Dann ist
$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{k} &= \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k}\right) \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{n+1}{(n-k+1)k}\right) \\
&= \frac{(n+1)!}{(n-k+1)!k!} = \frac{(n')!}{k!(n'-k)!}.
\end{aligned}$$

■

Im nächsten Satz verwenden wir den Begriff einer reellen Zahl (vgl. Mittelschulmathematik):

Satz 1.5 *(Binomischer Lehrsatz.) Seien x, y reelle Zahlen und n eine natürliche Zahl. Dann gilt:*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Beweis. Induktion bezüglich n.
$n = 1$ ist klar.
$n \to n+1$: Es gelte $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k}y^k$. Dann ist

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n'} &= (x+y)^{n+1} \\
&= (x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k+1}y^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n'}\binom{n'-1}{k}x^{n'-k}y^k + \sum_{k=0}^{n'}\binom{n'-1}{k-1}x^{n'-k}y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n'}\left[\binom{n'-1}{k} + \binom{n'-1}{k-1}\right]x^{n'-k}y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n'}\binom{n'}{k}x^{n'-k}y^k.
\end{aligned}$$

(Wir setzen $\binom{n}{k} = 0$, falls $k < 0$).

■

Satz 1.6 *Für $x \neq 1$ gilt:*

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Beweis. Übung.

■

Aufgaben

Aufgabe 1. Zeige: $m.n = n.m$ $(m, n \in \mathbf{N})$.

Aufgabe 2. Beweise:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3. Berechne

$$1 + \cos\theta + \cdots + \cos n\theta$$

und

$$\sin\theta + \cdots + \sin n\theta.$$

(Hinweis: Benütze die Formel für $\sin A \sin B$ und $\sin A \cos B$ bzw. das Teleskopprinzip).

Aufgabe 4. Zeige: $2^n \geq n^2 \quad (n \geq 4)$.

Aufgabe 5. Berechne:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \quad \text{bzw.} \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}.$$

Aufgabe 6. Zeige:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{k+j}{j} = \binom{k+n+1}{n}.$$

Aufgabe 7. Zeige:

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots = n2^{n-1}.$$

Aufgabe 8. Zeige:

$$\binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} - \cdots = 0.$$

Aufgabe 9. Zeige:

$$2^{n-1} \leq n! \leq n^n \quad (n \geq 1).$$

Aufgabe 10. Zeige:

$$N!(N+1)^{n-N} \leq n! \leq N!n^{n-N} \quad (N \geq 1, n \geq N).$$

Aufgabe 11. Zeige:

$$\sqrt{\frac{\frac{5}{4}}{4n+1}} \leq \frac{1.3.5.\ldots.(2n-1)}{2.4.6.\ldots.2n} \leq \sqrt{\frac{\frac{3}{4}}{2n+1}}.$$

Aufgabe 12. (Bernoulli-Ungleichung) Zeige:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad (x \geq -1, n \in \mathbf{N}).$$

Aufgabe 13. Seien $x_1, \ldots, x_n$ $(n \geq 2)$ reelle Zahlen (alle positiv oder alle negativ aber > -1. Zeige:

$$(1+x_1)\ldots(1+x_n) > 1 + x_1 + \cdots + x_n.$$

Aufgabe 14. Zeige:

$$2^n \leq n! \quad (n \geq 4).$$

Aufgabe 15. Seien $m, n \in \mathbf{N}$. Zeige: Es gibt (eindeutig-bestimmte) nichtnegative ganze Zahlen q und r, so daß

$$n = qm + r, \qquad 0 \leq r < m.$$

("Division mit Rest").

Aufgabe 16. Zeige:

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!} \quad (k \in \mathbf{N}_0).$$

Aufgabe 17. Zeige:

$$(1 + \frac{1}{n})^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq 3.$$

Aufgabe 18. Zeige:

$$\binom{n}{3} \leq \frac{1}{3} n!.$$

Aufgabe 19. Zeige:

$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k}.$$

Aufgabe 20. Sei p das Polynom $t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n$, mit Nullstellen $\lambda_1, \ldots \lambda_n$. Falls $s_k = \sum_i \lambda_i^k$, zeige:

$$k a_k = -\sum_{i=0}^{k-1} a_i s_{k-i}.$$

Aufgabe 21. Sei x eine reelle Zahl und k eine natürliche Zahl und setze

$$\binom{x}{k} = \prod_{m=1}^{k} \frac{x - m + 1}{m}.$$

Zeige:

$$\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{n-k}\binom{y}{k}.$$

Aufgabe 22. Es gibt

$$\frac{n!}{n_1! \ldots n_k!}$$

Möglichkeiten, $n = n_1 + \cdots + n_k$ Objekte auf k Kästchen $K_1, \ldots, K_k$ so zu verteilen, daß n_1 Objekten in K_1, …, n_k Objekte in K_k liegen.

Aufgabe 23. (Abelsche partielle Summation) Zeige:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}),$$

wobei $A_r = \sum_{k=1}^{r} a_r$.

2 Der Körper der reellen Zahlen

Ausgehend von den natürlichen Zahlen kann man schrittweise die ganzen Zahlen, die Rationalzahlen und die reellen Zahlen konstruieren. Die ersten zwei Konstruktionen sind rein algebraisch und werden hier kurz skizziert. Die dritte Konstruktion wird in einer späteren Vorlesung behandelt. (Siehe auch den Anhang).

Die ganzen Zahlen: Wir definieren die Menge der ganzen Zahlen $\mathbf{Z}$ als $\mathbf{N} \times \mathbf{N}|_{\sim}$, wobei

$$(m,n) \sim (\bar{m},\bar{n}) \iff m + \bar{n} = \bar{m} + n.$$

($\sim$ ist eine **Äquivalenzrelation**. $\mathbf{N} \times \mathbf{N}|_{\sim}$ bezeichnet den entsprechenden Quotientenraum — vgl. die Vorlesung "Lineare Algebra").

Man erweitert die algebraischen Operationen auf $\mathbf{Z}$ ohne Schwierigkeit wie folgt:
$[(m,n)] + [(\bar{m},\bar{n})] = [(m+\bar{m}, n+\bar{n})]$
$[(m,n)] \cdot [(\bar{m},\bar{n})] = [(m \cdot \bar{m} + n \cdot \bar{n}, m \cdot \bar{n} + \bar{m} \cdot n)]$.
($[(m,n)]$ bezeichnet die Äquivalenzklasse, die von (m,n) bestimmt wird).

Wiederum gelten die bekannten Gesetze der Multiplikation und Addition.

Die Rationalzahlen: Die Menge $\mathbf{Q}$ der Rationalzahlen wird als $\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} \setminus \{0\})|_{\sim}$ definiert, wobei

$$(m,n) \sim (\bar{m},\bar{n}) \iff m.\bar{n} = \bar{m}.n.$$

Die algebraische Operationen werden wie folgt erweitert: $[(m,n)] + [(\bar{m},\bar{n})] = [(m \cdot \bar{n} + \bar{m} \cdot n, n \cdot \bar{n})]$
$[(m,n)] \cdot [(\bar{m},\bar{n})] = [(m \cdot \bar{m}, n \cdot \bar{n})]$. Man stellt fest, daß $\mathbf{Q}$ die sogenannten **Körperaxiome** erfüllt:
Axiome der Addition:

$x + (y + z) = (x + y) + z$ für x,y, $z \in \mathbf{Q}$;

$x + y = y + x$ $(x, y \in \mathbf{Q})$;

$x + 0 = 0 + x = x$ $(x \in \mathbf{Q})$;

zu jedem $x \in \mathbf{Q}$ existiert eine Zahl y, so daß $x + y = 0$.

Axiome der Multiplikation:

$(xy)z = x(yz)$ $(x, y, z \in \mathbf{Q})$;

$xy = yx$ $(x, y \in \mathbf{Q})$;

$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ $(x \in \mathbf{Q})$;

zu jedem $x \neq 0$ in $\mathbf{Q}$ existiert ein Element x^{-1}, so daß $x.x^{-1} = 1$.

Distributivgesetz: $x(y+z) = xy + xz$ $(x, y, z \in \mathbf{Q})$.

Wir sagen dann, daß $\mathbf{Q}$ ein Körper ist. Der Leser wird einige weitere Körper im Laufe der späteren Vorlesungen kennenlernen. (Beispiel: der Körper der komplexen Zahlen). Außerdem Strukturen, die einige, aber nicht alle, der obigen Axiome erfüllen. Beispiel: Schiefkörper—hier verzichten wir auf die Kommutativät der Multiplikation. Das bekannteste Beispiel ist die Menge der Quaternionen.
Zweites Beispiel: Ein **Ring**: Wir verwenden hier die Axiome der Addition, das Distributivgesetz und Axiom (1) der Multiplikation.
$\mathbf{Q}$ ist ein **geordneter Körper**. Dazu definieren wir suksessiv die natürlichen Ordnungsstrukturen auf $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ und $\mathbf{Q}$:

in $\mathbf{N}$: $m < n \iff$ es existiert $p \in \mathbf{N}$ mit $n = m + p$;

in $\mathbf{Z}$: $[(m,n)] < [(\bar{m},\bar{n})] \iff m + \bar{n} < \bar{m} + n$.

Für die Ordnung in $\mathbf{Q}$ bemerken wir zunächst, daß jedes Element eine Darstellung $[(m,n)]$ mit $n > 0$ hat. Falls also $n, \bar{n} > 0$, so definieren wir

$$[(m,n)] < [(\bar{m},\bar{n})] \iff m.\bar{n} < \bar{m}.n.$$

$\mathbf{Q}$ erfüllt folgende weitere Axiome:
Die Anordnungaxiome: Für jedes $x \in \mathbf{Q}$ gilt genau eine der Beziehungen: $x > 0, x < 0, x = 0$;

$x > 0, y > 0$ impliziert $x + y > 0$;

$x > 0, y > 0$ impliziert $xy > 0$.

Wir schreiben dann $x < y$, falls $y - x > 0$.

Um zwischen $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{R}$ zu unterscheiden, brauchen wir ein weiteres Axiom:

Das Vollständigkeitsaxiom: Wir *postulieren* die Existenz eines geordneten Körpers $\mathbf{R}$, der folgendes Axiom erfüllt: Sei $A \neq \emptyset$ eine Teilmenge von $\mathbf{R}$, die nach oben beschränkt ist (d.h. es existiert ein y, so daß $x \leq y$ für jedes $x \in A$). Dann existiert eine *kleinste* obere Schranke x_0 für A (genannt **Supremum**). Symbolisch: Es existiert x_0 so, daß

1) $$x \in A \text{ impliziert } x \leq x_0$$

und

2) $$\text{für jedes } \epsilon > 0 \text{ existiert } x \in A \text{ so daß } x_0 - \epsilon < x.$$

Wir schreiben $x_0 = \sup A$. Daraus folgt leicht, daß jede nach unten beschränkte Menge A ein Infimum besitzt. In der Tat ist $\inf A = \sup(-A)$, wobei $-A = \{-x : x \in A\}$.

Es ist dies das Axiom, das zwischen $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{R}$ unterscheidet. Denn $\mathbf{Q}$ ist nicht ordnungsvollständig. (Für eine Skizze einer möglichen *Konstruktion* der reellen Zahlen siehe Anhang).

Philosophisch ist es von Interesse, daß $\mathbf{R}$ eindeutig durch diese Axiome bestimmt wird (siehe Anhang).

Aufgaben

Aufgabe 24. Zeige das Axiom von Archimedes: Zu jedem $x \in \mathbf{R}$ existiert ein $n \in \mathbf{N}$ mit $n \geq x$. Daraus folgt: Zu jedem $\epsilon > 0$ aus $\mathbf{R}$ existiert $n \in \mathbf{N}$ mit $\frac{1}{n} \leq \epsilon$.

Aufgabe 25. Zeige: $\sqrt{2}$ und $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ sind irrational.

Aufgabe 26. Sei $x > 0$. Zeige: Es existiert eine irrationale Zahl y mit $0 < y < x$.

Aufgabe 27. Seien $p_1, \ldots, p_n$ positive Zahlen mit $p_1 + \cdots + p_n = 1$. Dann gilt:

$$\min(a_, \ldots, a_n) \leq p_1 a_1 + \cdots + p_n a_n \leq \max(a_1, \ldots, a_n).$$

Aufgabe 28. Seien $a, b > 0$. Zeige:

$$\sqrt{(ab)} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Aufgabe 29. Seien $a_1, \ldots, a_n$ positiv. Zeige:

$$\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

Aufgabe 30. Seien a und b die Nullstellen des Polynomes $x^2 - x - 1$ und setze $x_n = \frac{(a^n - b^n)}{a - b}$. Zeige: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ und $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$.

Aufgabe 31. Seien $(a_k)_{k_1}^n$ und $(b_k)_{k=1}^n$ endliche Folgen von reellen Zahlen. Berechne die Diskriminante der quadratischen Funktion

$$t \mapsto \sum_{k=1}^{n} (a_k t + b)^2.$$

Beweise damit die **Cauchy-Schwarz Ungleichung**

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right).$$

Aufgabe 32. Seien $x_1, \ldots, x_n$ positive Zahlen. Zeige:

$$\left(\sum_{k+1}^{n} x_k \right) \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \right) \geq n^2.$$

Aufgabe 33. Beweise die Identität von Lagrange:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \sum_{1\le k<j\le n} (a_k b_j - a_j b_k)^2.$$

(Konsequenz: Ein zweiter Beweis der Cauchy-Schwarz Ungleichung).

Aufgabe 34. Falls $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ und $b_1 \geq \cdots \geq b_n$, zeige:

$$\left(\sum_k a_k\right)\left(\sum_k b_k\right) \leq n \sum_k a_k b_k.$$

Aufgabe 35. Zeige: die Menge aller reellen Zahlen der Gestalt $a + b\sqrt{2}$ $(a, b \in \mathbf{Q})$ bildet einen Körper.

Aufgabe 36. Die Familie aller reellen Polynome bildet einen Ring. Die Familie aller rationalen Funktionen bildet einen Körper. Die Familie aller $n \times n$ Matrizen bildet einen Ring.

Aufgabe 37. Für eine Zahl x setze

$$|x| = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x \leq 0). \end{cases}$$

Zeige:

$$|x+y| \leq |x| + |y| \quad |xy| = |x|.|y| \text{ und } \sup\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x-y|).$$

Was ist die entsprechende Formel für $\inf\{x, y\}$?

Aufgabe 38. Zeige:

$$|a| - |b| \leq ||a| - |b|| \leq |a - b|$$

bzw.

$$||a| - |b|| \leq |a + b|$$

$(a, b \in \mathbf{R})$.

Aufgabe 39. Zeige:

$$\left|\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right| \geq 2$$

$(a, b \in \mathbf{R},\ a \neq 0,\ b \neq 0)$.

Aufgabe 40. Sei n eine natürliche Zahl, die nicht das Quadrat eines $p \in \mathbf{N}$ ist. Dann ist $\sqrt{n}$ irrationial.

Aufgabe 41. Seien a, b, c, d reelle Zahlen mit $b > 0$, $d > 0$, sodaß $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Zeige: $\frac{a+c}{b+d}$ liegt zwischen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$.

Aufgabe 42. Berechne $\sup A$, $\inf B$, wobei

$$A = \{\frac{1}{n} + (-1)^n : n \in \mathbf{N}\}$$

bzw.

$$A = \{(-1)^n(1 + \frac{1}{n}) : n \in \mathbf{N}\}.$$

Aufgabe 43. Seien A, B Teilmengen von $\mathbf{R}$. Zeige:

$$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B).$$

Was ist der entsprechende Ausdruck für $\inf(A \cup B)$? Gilt eine ähnliche Formel für $\sup(A \cap B)$?

Aufgabe 44. Seien A und B Teilmengen von $\mathbf{R}$. Zeige: Es gilt $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$ aber nicht immer $\sup(AB) = \sup A . \sup B$. Für welche Mengen gilt diese Formel? Finde eine Formel, die im allgemeinen Fall gültig ist.

Aufgabe 45. Seien a und b positive Zahlen. Zeige: $\sqrt{2}$ liegt zwischen $\frac{a}{b}$ und $\frac{a+2b}{a+b}$. (Welche der zwei liegt näher bei $\sqrt{2}$?)

3 Folgen, Grenzwerte

Definition 3.1 *Eine* **Folge** *von reellen Zahlen ist eine Abbildung von* $\mathbf{N}$ *in* $\mathbf{R}$ *d.h. jedem* $n \in \mathbf{N}$ *ist eine Zahl* a_n *zugeordnet. Wir schreiben*

$$(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \text{ oder } (a_1, a_2, a_3, \dots)$$

für eine solche Folge.

Beispiele.

die konstante Folge $(a, a, \dots)$ d.h. $a_n = a$ für jedes n;

$a_n = \frac{1}{n}$ für jedes n $((1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots))$;

rekursiv definierte Folgen: Das berühmteste Beispiel ist die Fibonacci-Reihe

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots).$$

Das ist jene Folge (a_n), die durch

1) $$a_1 = a_2 = 1$$

2) $$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n > 2)$$

definiert wird.

Folgen entstehen oft als suksessive Versuche, eine gegebene Zahl exakt auszurechnen. Der Erfolg eines solchen Versuches ist in der folgenden Definition charakterisiert:

Definition 3.2 *Eine Folge* (a_n) *reeller Zahlen konvergiert gegen* a *(in Zeichen:* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *oder* $a_n \to a$*), falls gilt: zu jedem* $\epsilon > 0$ *existiert* $N = N(\epsilon)$*, so daß* $|a_n - a| < \epsilon$*, falls* $n \geq N$*.*

Beispiele. Die konstante Folge $(a, a, \dots)$ konvergiert gegen a.
Die Folge $(\frac{1}{n})$ konvergiert gegen 0.
Die Folge $(-1)^n$ konvergiert nicht.
Wir sammeln einige triviale Eigenschaften von Limiten in einem

Satz 3.3 *Der Limes ist eindeutig d.h.* $a_n \to a$ *und* $a_n \to b$ *impliziert* $a = b$*;*

Der Limes ist additiv d.h. $a_n \to a$ *und* $b_n \to b$ *impliziert* $a_n + b_n \to a + b$*;*

Der Limes ist multiplikativ d.h. $a_n \to a$ *und* $b_n \to b$ *impliziert* $a_n.b_n \to a.b$*.*

Falls eine Folge (a_n) *von nicht-verschwindenden reellen Zahlen gegen* $a \neq 0$ *konvergiert, dann gilt* $\lim \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$.

Es ist eine Konsequenz der Ordnungsvollständigkeit der reellen Zahlen, daß Folgen, die konvergieren sollen, dies auch *tun.*

Definition 3.4 *Ein Folge* (a_n) *heißt* **Cauchy-Folge***, falls gilt: Zu jedem* $\epsilon > 0$ *existiert ein* $N \in \mathbf{N}$*, so daß*

$$|a_n - a_m| < \epsilon \text{ für alle } n, m \geq N.$$

Es ist leicht zu sehen, daß jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist.
Beweis. Sei $\lim a_n = a$. Wähle $N \in \mathbf{N}$, so daß $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$, falls $n \geq N$. Dann gilt, für $m, n \geq N$,

$$|a_m - a_n| = |(a_m - a) - (a_n - a)| \leq |a_m - a| + |a_n - a| \leq \epsilon.$$

■

Beispiel. Betrachte einen unendlichen Dezimalbruch

$$N, a_1 a_2 \dots\dots = N + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots \qquad (0 \leq a_i \leq 9).$$

Dann bilden die Approximanten

$$A_n := N + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k},$$

eine Cauchy-Folge.
Der entscheidende Grund, warum man Analysis in $\mathbf{R}$ und nicht in $\mathbf{Q}$ betreibt, liegt in der sogenannten **Vollständigkeit** von $\mathbf{R}$:

Satz 3.5 *In* $\mathbf{R}$ *konvergiert jede Cauchy-Folge.*

Dieser Satz wird später bewiesen.

An dieser Stelle erweitern wir den Konvergenzbegriff, um Konvergenz gegen ∞ behandeln zu können.

Definition 3.6 *Eine Folge* (a_n) **konvergiert gegen** ∞ *(in Zeichen:* $a_n \to \infty$ *oder* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$*), wenn*

$$\text{zu jedem } K > 0 \text{ existiert } N \in \mathbf{N}, \text{ so daß } a_n \geq K \text{ falls } n \geq N.$$

$a_n \to -\infty$ *wird ähnlich definiert.*

Beispiele. Für die Folge (x^n) gilt: Falls $|x| < 1$, dann konvergiert die Folge gegen 0. Falls $x = 1$, dann konvergiert die Folge gegen 1. Falls $x = -1$ konvergiert die Folge nicht. Falls $x > 1$, dann konvergiert die Folge gegen ∞. Falls $x < -1$, dann konvergiert die Folge nicht.

Was Konvergenz betrifft, ist das Verhalten von **monotonen** Folgen besonders einfach:

Definition 3.7 *Eine Folge* (a_n) *ist*

monoton wachsend, *falls* $a_n \leq a_{n+1}$ *für jedes* $n \in \mathbf{N}$*;*

streng monoton wachsend, *falls* $a_n < a_{n+1}$ *für jedes* $n \in \mathbf{N}$*;*

monoton fallend, *falls* $a_n \geq a_{n+1}$ *für jedes* $n \in \mathbf{N}$*;*

streng monoton fallend, *falls* $a_n > a_{n+1}$ *für jedes* $n \in \mathbf{N}$.

Definition 3.8 *Eine Folge* (a_n) *heißt*

beschränkt, *falls* $K > 0$ *existiert, so daß für* $n \in \mathbf{N}$ *gilt:* $|a_n| < K$*;* **nach oben beschränkt**, *falls* $K > 0$ *existiert, so daß für* $n \in \mathbf{N}$ *gilt:* $a_n < K$*;*

Satz 3.9 *Sei* (a_n) *eine monoton wachsende Folge. Falls* (a_n) *nach oben beschränkt ist, dann konvergiert die Folge gegen* $\sup\{a_n\}$*. Wenn* (a_n) *nicht beschränkt ist, dann konvergiert die Folge gegen* ∞*.*

Beweis. Wir zeigen: Ist (a_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt, dann gilt: $a_n \to a = \sup\{a_n\}$. Denn sei $\epsilon > 0$. Es existiert $N \in \mathbf{N}$ mit $a_N > a - \epsilon$. Dann gilt aber, für $n \geq N$,

$$a - \epsilon \leq A_N \leq a_n \leq a < a + \epsilon$$

d.h. $|a_n - a| < \epsilon$.

∎

Beispiele.

I. **b-adische Entwicklungen:** Sei b eine natürliche Zahl ≥ 2. Eine b-adischer Bruch ist ein Limes der Gestalt $\lim A_n$, wobei

$$A_n = N + \sum_{k=1}^{n} a_k b^{-k}$$

Dabei ist (a_k) eine Folge natürlichen Zahlen, so daß $0 \leq a_k \leq b - 1$ und $N \in \mathbf{N}$. Es ist klar, daß (A_n) eine Cauchy-Folge ist. Nach der Vollständigkeit, konvergiert sie gegen eine reelle Zahl x. Umgekehrt gilt:

Satz 3.10 *Jede reelle Zahl x läßt sich als b-adischer Bruch entwickeln.*

Die wichtigsten Fälle sind

$b = 10$ —Dezimalentwicklung;

$b = 2$—Dyadische Entwicklung;

$b = 60$—Sexagesimalentwicklung;

$b = 12$—Duodezimalentwicklung.

Beispiel. (Algorithmus zur Berechnung von Quadratwurzeln).
Sei a eine gegebene positive Zahl. Wir wählen einen Startwert $x_0 > 0$ und definieren rekursiv eine Folge (x_n) wie folgt:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}).$$

Satz 3.11 *(x_n) ist monoton fallend, die Folge (y_n) (wobei $y_n = \frac{a}{x_n}$) ist monoton wachsend und $0 < y_n \leq x_n$ $(n \in \mathbf{N})$.*

Beweis. Folgende Aussagen werden mit mathematischer Induktion bewiesen:

1. $x_n > 0$ für jedes n (trivial).

2. $x_n^2 - a \geq 0$ für jedes $n \geq 1$.
   Denn
$$\begin{aligned} x_n^2 - a &= \frac{1}{4}(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}})^2 - a \\ &= \frac{1}{4}x_{n-1}^2 + \frac{a}{2} + \frac{1}{4}\frac{a^2}{x_{n-1}^2} - a \\ &= \frac{1}{4}(x_{n-1} - \frac{a}{x_{n-1}})^2 \geq 0. \end{aligned}$$

3. $y_n^2 - a \leq 0$ $(n \geq 1)$.
   Denn aus $x_n^2 \geq a$, folgt: $\frac{1}{x_n^2} \leq \frac{1}{a}$ und daher
$$y_n^2 = \left(\frac{a}{x_n}\right)^2 \leq a.$$

4. $x_{n+1} \leq x_n$. Denn
$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{1}{2x_n}\left(x_n^2 - a\right) \geq 0.$$

5. $y_{n+1} \geq y_n$. Dies folgt aus der Definition und 4).

6. $x_n \geq y_n$. Denn wäre $x_n < y_n$, dann $x_n^2 < y_n^2$, was 2) und 3) widerspricht.

Wir wissen jetzt, daß die Folge (x_n) monoton und beschränkt, also konvergent ist. Sei L der Grenzwert. Aus der Rekursionsformel

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

folgt, daß: $L = \frac{1}{2}(L + \frac{a}{L})$ und damit $L^2 = a$.

∎

Damit haben wir bewiesen:

Satz 3.12 *Der Limes L der Folge (x_n) erfüllt die Bedingung $L^2 = a$.*

Wir sagen dann, daß L eine (die) **Quadratwurzel** von a ist.

BEISPIEL. Als weiteres Beispiel einer Anwendung dieser Methode erwähnen wir die Tatsache, daß der Limes

$$\lim(1 + \frac{1}{n})^n$$

existiert. Dies folgt aus der Tatsache, daß die Folge monoton steigend ist (Induktionsbeweis!), denn sie ist offensichtlich beschränkt (z.B. gilt $(1 + \frac{1}{n})^n \leq 3$). Der Limes ist die Eulersche Zahle e (siehe unten).

Definition 3.13 *Sei (a_n) eine beschränkte Folge von reellen Zahlen. Dann definieren wir:*

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty}(a_n) &:= \lim_{k\to\infty} \sup(\{a_k, a_{k+1}, \dots\}) \\ \liminf_{n\to\infty}(a_n) &:= \lim_{k\to\infty} \inf(\{a_k, a_{k+1}, \dots\}). \end{aligned}$$

Die Existenz von $\limsup a_n$ und $\liminf a_n$ folgt aus der Ordnungsvollständigkeit von $\mathbf{R}$. Es ist leicht zu sehen, daß folgende Eigenschaften gelten:

Satz 3.14 $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$*;*

$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$ *genau dann, wenn* $\lim a_n$ *existiert.*
Der Limes ist dann der gemeinsame Wert von $\liminf$ *und* $\limsup$.

Nun sieht man leicht, daß für eine Cauchy-Folge (a_n) gilt

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Damit ist der Satz über die Konvergenz von Cauchy-Folgen bewiesen.
Wir bringen jetzt eine Anwendung der Vollständigkeit—die Methode der Intervallschachtelung:

Satz 3.15 *Sei I_n eine fallende Folge von abgeschlossenen, beschränkten Intervallen. Dann ist der Durchschnitt $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ nicht-leer. Falls weiterhin $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} I_n = 0$, dann existiert genau ein Punkt im Durchschnitt. (diam I, wobei I ein Intervall ist, bezeichnet die Länge von I).*

BEWEIS. Sei $I_n = [a_n, b_n]$. Nach den Voraussetzungen gilt: (a_n) ist monoton-steigend und (b_n) ist monoton-fallend. Daher gilt $[a, b] \subset \bigcap I_n$, wobei $a = \lim a_n$, $b = \lim b_n$. Der zweite Teil folgt leicht.

■

Als Anwendung dieser Methode bringen wir einen zweiten Beweis der Tatsache, daß $[0,1]$ überabzählbar ist (vgl. den Beweis im Anhang). Dazu folgende Definition:

Definition 3.16 *Eine Menge A heißt* **abzählbar**, *wenn es eine surjektive Abbildung von* $\mathbf{N}$ *auf A gibt d.h. wenn A die Bildmenge $\{a_n\}$ einer Folge (a_n) (d.h. eine Funktion $n \mapsto a_n$ von* $\mathbf{N}$ *in* $\mathbf{R}$*) ist.*

Beispiele. Jede endliche Menge A ist abzählbar. $\mathbf{N}$ ist abzählbar. $\mathbf{Z}$ und $\mathbf{Q}$ sind abzählbar. Falls (A_n) eine Folge von abzählbaren Mengen ist, dann ist die Vereinigung $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n$ wieder abzählbar.

G. Cantor zeigte, mit Hilfe seines berühmten Diagonalverfahren, daß $\mathbf{R}$ nicht abzählbar ist. (Siehe Anhang).

Wir bringen einen Widerspruchsbeweis dieser Tatsache. Wir nehmen also an, daß $[0,1]$ abzählbar ist und betrachten daher eine Numerierung $x_1, x_2, \dots$. Wir konstruieren eine Intervallschachtelung (I_n) wie folgt: Wähle irgendein nicht entartetes abgeschlossenes Intervall I_1, das x_1 nicht enthält. Dann ein solches $I_2 \subset I_1$, das x_2 nicht enthält. Auf dieser Weise bekommen wir eine Intervallschachtelung (I_n), wobei $x_n \notin I_n$. Wir wissen aber, daß der Durchschnitt nicht-leer ist. Ein Element aus diesem Durchschnitt ist aber kein Element der Folge (x_n).

Definition 3.17 *Sei (a_n) eine Folge. Eine* **Teilfolge** *von (a_n) ist eine Folge der Gestalt*

$$(a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \dots),$$

wobei

$$n_0 < n_1 < n_2 < \dots$$

Falls die Folge (a_n) konvergiert, dann auch jede Teilfolge.

Satz 3.18 *(Satz von Bolzano-Weierstraß) Jede beschränkte Folge (a_n) besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Ohne Verlust der Allgemeinheit kann man annehmen, daß die Folge aus Elementen des Intervalles $[0,1]$ besteht. Wir betrachten jetzt die zwei Teilintervalle $[0, \frac{1}{2}]$ und $[\frac{1}{2}, 1]$ und setzen

$$A_1 = \{n : a_n \in [0, \frac{1}{2}]\} \text{ bzw. } A_2 = \{n : a_n \in [\frac{1}{2}, 1]\}.$$

Da $\mathbf{N} = A_1 \cup A_2$, ist entweder A_1 oder A_2 unendlich. Wir bekommen daher eine Teilfolge, die wir mit $(a_1^1, a_2^1, \dots)$ bezeichnen, so daß die Elemente aus einem Teilintervall der Länge $\frac{1}{2}$ kommen.

Wir wiederholen diese Methode und bekommen damit eine Folge $(a_k^n)_{k=1}^\infty$ von Folgen, so daß

für jedes n ist $(a_k^{n+1})_k$ eine Teilfolge von $(a_k^n)_k$;

es gilt $|a_r^n - a_s^n| \leq 2^{-n}$ für $r, s \in \mathbf{N}$.

Betrachte jetzt die **Diagonalfolge** (a_n^n):

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{a_1^1} & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 & \dots \\ a_1^2 & \mathbf{a_2^2} & a_3^1 & a_4^1 & \dots \\ a_1^3 & a_2^3 & \mathbf{a_3^3} & a_4^3 & \dots \end{array}$$

Dies ist

eine Teilfolge von (a_n);

eine Cauchy-Folge—also konvergent.

■

Bemerkung. Diese Beweismethode heißt das **Diagonalverfahren**. Varianten davon kommen sehr häufig in der Mathematik vor (vgl. den Beweis von Cantor im Anhang, daß $\mathbf{R}$ nicht abzählbar ist).

Definition 3.19 *Eine Zahl a ist* **Häufungspunkt** *einer Folge (a_n), wenn eine Teilfolge (a_{n_k}) existiert, die gegen a konvergiert.*

Der Satz von Bolzano-Weierstraß sagt also, daß jede beschränkte Folge einen Häufungspunkt besitzt.

Beispiel. Die Folge $(-1)^n$ ist nicht konvergent. Sie besitzt die zwei Häufungspunkte 1 und -1.

Aufgaben

Aufgabe 46. Gilt die Aussage:

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \to \frac{1}{n}?$$

Aufgabe 47. Berechne

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \frac{n-m}{n+m}$$

und

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{n-m}{n+m}.$$

Aufgabe 48. Berechne $\lim_{n\to\infty}$ für die folgenden Ausdrücke:

$$\frac{n^2-2n+1}{n^2-6}, \quad \frac{6(-1)^n n+11}{n^2-5}, \quad \frac{3n^2-20n}{n+1}.$$

Aufgabe 49. Zeige: Falls $a_n \to a$, $b_n \to b$, dann $|a_n| \to |a|$ und $\max\{a_n, b_n\} \to \max\{a, b\}$.

Aufgabe 50. Sei p eine nicht-triviale Polynomfunktion. Zeige:

$$\lim \frac{p(n+1)}{p(n)} = 1.$$

Aufgabe 51. Sei (a_n) eine Folge, die gegen a konvergiert. Zeige:

$$\frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n) \to a.$$

Aufgabe 52. Berechne folgende Limiten:

$$\lim \frac{x^n}{n!} \quad \lim a^{1/n} \quad \lim n^{k/n}.$$

(x ist eine reelle Zahl, a positiv, $k \in \mathbf{N}$).

Aufgabe 53. Berechne $\lim(1 + \frac{a}{n})^n$ $(a \geq 0)$.

Aufgabe 54. Sei (a_n) eine Folge, die gegen a konvergiert. Zeige:

$$\frac{na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + a_n}{\frac{1}{2}n(n+1)} \to a.$$

Aufgabe 55. Sei (a_n) eine Folge, so daß

$$a_n < \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1}) \quad (n > 1).$$

Zeige: (a_n) konvergiert (eventuell gegen $-\infty$ oder ∞).

Aufgabe 56. Sei (a_n) so, daß $a_{n+1} = \dfrac{3a_n + 1}{a_n + 3}$ und $a_1 > -1$. Zeige: $a_n \to 1$.

Aufgabe 57. Sei (a_n) so, daß

$$a_{n+1}^2 = a_n + 6 \quad (a_{n+1} \geq 0).$$

Zeige: Falls $a_1 \geq -6$, dann $a_n \to 3$.

Aufgabe 58. Seien a und b reelle Zahlen. Untersuche, ob die Folge

$$a_n = \frac{an^4 + 13n^2}{bn^4 + 4n^2 + 1}$$

konvergiert oder divergiert.

Aufgabe 59. Seien a und b reelle Zahlen. Die Folge (a_n) ist wie folgt rekursiv definiert:

$$a_1 = a, a_2 = b, a_k = \frac{1}{2}(a_{k-1} + a_{k-2}).$$

Bestimme den Grenzwert.

Aufgabe 60. Berechne den Limes der partiellen Summen der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}.$$

Aufgabe 61. Man berechne das unendliche Produkt

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1}$$

d.h. den Limes der Folge

$$p_k = \prod_{n=2}^{k} \frac{n^3-1}{n^3+1}.$$

Aufgabe 62. Seien a und x_0 positiv und (x_n) rekursiv wie folgt definiert:

$$x_{n+1} = \frac{1}{k}((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}).$$

Dann ist (x_n) eine Cauchy-Folge. Der Limes ist eine positive Zahl b, sodaß $b^k = a$.

Aufgabe 63. Zeige: Eine Folge reeller Zahlen konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist und genau einen Häufungspunkt besitzt.

4 Limiten und Stetigkeit von Funktionen

Wir betrachten jetzt Funktionen zwischen geeigneten Punktmengen. Dazu wiederholen wir einige grundlegende Begriffe und Schreibweisen aus der Mengentheorie. Wir benötigen öfters folgende spezielle Teilmengen von $\mathbf{R}$:
$[a,b] = \{x \in \mathbf{R} : a \leq x \leq b\}$
$[a,b[= \{x \in \mathbf{R} : a \leq x < b\}$
$]a,b] = \{x \in \mathbf{R} : a < x \leq b\}$
$]a,b[= \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}$
$[a,\infty[= \{x \in \mathbf{R} : a \leq x\}$
$]a,\infty[= \{x \in \mathbf{R} : a < x\}$
$]-\infty,a] = \{x \in \mathbf{R} : x \leq a\}$
$]-\infty,a[= \{x \in \mathbf{R} : x < a\}$.
Außerdem schreiben wir

$$\mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 0\}.$$

Wir betrachten jetzt reelle Funktionen, genauer Funktionen von einer Teilmenge D von $\mathbf{R}$ mit Werten in $\mathbf{R}$. D heißt **Definitionsbereich** von f und der **Graph** von f ist die Menge

$$\Gamma_f = \{(x,y) \in D \times \mathbf{R} : y = f(x)\}.$$

Beispiele von wichtigen Funktionen sind:

I. Die konstanten Funktionen. Das sind Funktionen der Gestalt: $x \mapsto a$ für ein festes $a \in \mathbf{R}$.

II. Die identische Abbildung. Wir schreiben id_D für die Abbildung $x \mapsto x$ auf D.

III. Absolutbetrag. Das ist die Abbildung $x \mapsto |x|$.

IV. entier: Diese Funktion bildet x auf die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.

V. Polynomfunktionen. Funktionen der Gestalt:

$$x \mapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

VI. Rationale Funktionen: Das sind Funktionen, die Quotienten $\frac{p}{q}$ von Polynomfunktionen sind. (Der Definitionsbereich ist $\{x \in \mathbf{R} : q(x) \neq 0\}$).

VII. Treppenfunktionen: Funktionen der Gestalt: $\sum_{i=1}^n a_i \chi_{I_i}$, wobei $I_1, \ldots I_n$ Intervalle und $a_1, \ldots, a_n$ Zahlen. Das berühmteste Beispiel ist die **Heaviside-Funktion** $\chi_{[0,\infty[}$.

VIII. Die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen. Diese sind über Potenzreihen (siehe dazu unten) definiert:

$$\begin{aligned} \exp(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

Rationale Operationen auf Funktionen: Falls f, g Funktionen auf D sind, danns definieren wir $f + g$, cf ($c \in \mathbf{R}$), fg und f/g auf natürlicher Art. Z.B. ist $f + g$ die Funktion

$$x \mapsto f(x) + g(x).$$

($\frac{f}{g}$ ist auf der Menge $\{x \in D : g(x) \neq 0\}$ definiert).

Hintereinanderschaltung von Funktionen: Seien $f : D \to \mathbf{R}$ und $g : E \to \mathbf{R}$ Funktionen mit $f(D) \subset E$. Dann ist die Funktion

$$g \circ f : D \to \mathbf{R}$$

definiert durch $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ für $x \in D$.

Beispiele. Wir bekommen die rationalen Funktionen aus den Konstanten und der Identitätsabbildung, durch wiederholte Anwendungen der arithmetischen Operationen. Andere Funktionen, die wir aus Einfacheren auf diese Weise konstruieren sind:

$$\begin{aligned} \cosh x &= \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x)) \\ \sinh(x) &= \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x)) \\ \tan(x) &= \frac{\sin x}{\cos x} \\ \operatorname{cotan}(x) &= \frac{\cos x}{\sin x} \\ \sec(x) &= \frac{1}{\cos x} \\ \operatorname{cosec}(x) &= \frac{1}{\sin x}. \end{aligned}$$

Grenzwerte: Sei $f : D \to \mathbf{R}$ eine Funktion und $a \in \mathbf{R}$ so, daß a ein Häufungspunkt von $D \setminus \{a\}$ d.h. es gibt eine Folge (a_n) aus D, die gegen a konvergiert. (Dies ist der Fall, zum Beispiel, wenn $a \in D$). Man definiert:

$$\lim_{x \to a} f(x) = c,$$

falls für jede Folge (a_n) aus $D \setminus \{a\}$ mit $a_n \to a$ gilt:

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = c.$$

Beispiele.

1.
$$\lim_{x \to 0} \exp x = 1.$$

Denn falls $1 > x > 0$, dann haben wir die Abschätzung:

$$\begin{aligned} \exp(x) - 1 &= x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\ &\leq x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{x}{1-x}. \end{aligned}$$

Für $x < 0$ benützt man die Beziehung $\exp(-x) = (\exp(x))^{-1}$.

2. Für die Heaviside-Funktion existiert der Limes $\lim_{x \to 0} H(x)$ nicht.

Einseitige Limiten: Gerade das letzte Beispiel ist die Motivation für die folgende Verfeinerung der Definition:

Definition 4.1 *Sei $f : D \to \mathbf{R}$ und sei a wie oben. Wir schreiben $\lim_{x \to a^+} f(x) = c$, falls c der Limes der Einschränkung der Funktion f auf $D \cap [a, \infty[$. $\lim_{x \to a^-} f(x)$ wird ähnlich definiert. Es gilt also:*

$$\lim_{x \to 0^-} H(x) = 0 \text{ und } \lim_{x \to 0^+} H(x) = 1.$$

Stetigkeit

Definition 4.2 *Sei $f : D \to \mathbf{R}$ eine Funktion, a ein Punkt aus D. f heißt* **stetig im Punkt** *a, falls $f(x_n) \to f(a)$ für jede Folge (x_n) aus D mit $x_n \to a$.*
f heißt **stetig in** *D, falls f in jedem Punkt von D stetig ist.*
Ähnlicherweise definieren wir Linksseitig- oder Rechtsseitigstetigkeit an einem Punkt.

Beispiel.

1. Die konstante Funktion ist klarerweise stetig im jeden Punkt.
2. Die Heaviside Funktion ist rechtsstetig, aber nicht linksstetig im Punkt 0.
3. Die Exponentialfunktion ist überall stetig. Denn

$$\lim_{h \to 0} \exp(x+h) - \exp(x) = \exp(x) \lim_{h \to 0} (\exp h - 1) = \exp(x).$$

(Wir benützen hier die Funktionalgleichung $\exp(x+y) = \exp x . \exp y$ der Exponentialfunktion—siehe unten).

Satz 4.3 *Seien $f, g : D \to \mathbf{R}$ Funktionen, die in $a \in D$ stetig sind, und sei $c \in \mathbf{R}$. Dann sind auch die Funktionen $f + g, cf, fg$ in a stetig. Falls g keine Nullstellen hat, dann ist f/g stetig.*

Da die Identitätsfunktion und konstante Funktionen stetig sind, folgt aus dem Satz, daß rationale Funktionen (und damit auch Polynomfunktionen) stetig sind. Weitere Beispiele von Funktionen, deren Stetigkeit sofort ableitbar ist, sind die hyperbolischen Funktionen sinh, cosh.

Satz 4.4 *Seien $f : D \to \mathbf{R}$ und $g : E \to \mathbf{R}$ stetig und $f(D) \subset E$. Dann ist $g \circ f$ stetig*

Beweis. Übung.

■

Satz 4.5 *Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ ist beschränkt, d.h. die Menge $\{f(x) : x \in [a, b]\}$ ist beschränkt (es gibt eine Konstante M, so daß für alle $x \in [a, b]$ $|f(x)| \leq M$.).*

Beweis. (Widerspruchsbeweis) Man nehme an, die stetige Funktion f sei nicht beschränkt. Es existiert damit für jedes n eine Stelle x_n, wo $|f(x_n)| > n$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß, hat (x_n) eine konvergent Teilfolge (x_{n_k}). Sei $x = \lim x_{n_k}$. Wegen der Stetigkeit von f und der Tatsache, daß die Folge (x_{n_k}) konvergent folgt, daß die Bildfolge $(f(x_{n_k}))$ auch konvergent ist. Dies steht offensichtlich im Widerspruch zur Tatsache, daß letzere Folge nicht beschränkt ist.

■

Beispiel. Die Funktion $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ auf $]0, 1]$ ist stetig, aber nicht beschränkt.

Satz 4.6 *Jede in einem abgeschlossenen beschränkten Intervall stetige Funktion*

$$f : [a, b] \to \mathbf{R}$$

nimmt ihr Maximum und Minimum an, d.h. es existieren x_0 und x_1, so daß

$$f(x_0) = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$$

und

$$f(x_1) = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

Beweis. Man wähle eine Folge (x_n) so, daß

$$f(x_n) \geq \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} - \frac{1}{n}.$$

Der Limes x_0 einer konvergierenden Teilfolge erfüllt die Bedingung.

■

Wiederum gilt dieser Satz nicht für Funktionen auf offenen oder halb-offenen Intervallen.

Satz 4.7 *(Zwischenwertsatz.) Sei $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < y$, $f(b) > y$. Dann existiert $x_0 \in]a, b[$ mit $f(x_0) = y$.*

Beweis. Setze $x_0 = \sup\{x \in [a, b] : f(x) < y\}$.

■

Für manche Zwecke ist eine Umformung der Definition der Stetigkeit sinnvoll. Dies ist die $\epsilon - \delta$ Definition:

Definition 4.8 *Sei $f : D \to \mathbf{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$. f ist genau dann in x_0 stetig, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß*

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \text{ für alle } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

Diese ist äquivalent zu der ursprünglichen Definition.

Beweis. Übung.

■

Es gibt zwei Verschärfungen des Begriffes der Stetigkeit.

Definition 4.9 *$f : D \to \mathbf{R}$ ist* **gleichmäßig stetig***, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für alle $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$, $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.*
$f : D \to \mathbf{R}$ ist **Lipschitz-stetig***, wenn eine $K > 0$ existiert, so daß*

$$|f(x) - f(y)| \le K|x - y|$$

für jedes Paar x, y von Punkten aus D.

Es ist klar, daß jede Lipschitz-stetige Funktion gleichmäßig stetig ist und jede gleichmäßig stetige Funktion stetig.
Die Umkehrung gilt nicht.

Beispiele. Die Funktion $x \mapsto x^2$ auf $\mathbf{R}$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig. Die Funktion $x \mapsto \sqrt{x}$ auf $[0, 1]$ ist gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig. (Die Funktion $\sqrt{x}$ wird unten definiert).
Allerdings gilt folgender Satz:

Satz 4.10 *Jede stetige Funktion auf einem abgeschlossenen, beschränkten Intervall ist gleichmäßig stetig.*

Beweis. (Widerspruchsbeweis). Wenn die stetige Funktion f nicht gleichmäßig stetig wäre, dann gäbe es, für jedes n, Punkte x_n und y_n mit $|x_n - y_n| \le \frac{1}{n}$, aber $|f(x_n) - f(y_n)| > \epsilon$ für ein festes positives ϵ. Es existieren konvergierende Teilfolgen (x_{n_k}) und (y_{n_k}). (Frage an den Leser: Warum kann man annehmen, daß diese zwei Teilfolgen die gleichen Indexmengen haben?). Aus der ersten Bedingung folgt: $\lim_k x_{n_k} = \lim_k y_{n_k}$. Sei a dieser Limes. Es gilt dann: $\lim_k f(x_{n_k}) = \lim_k f(y_{n_k}) = f(a)$, was offensichtlich im Widerspruch zu der zweiten Abschätzung steht.

■

Inversfunktionen: Eine Funktion $f : D \to \mathbf{R}$ ist

- **monoton wachsend**, falls $x \le y$ impliziert $f(x) \le f(y)$;
- **streng monoton wachsend**, falls $x < y$ impliziert $f(x) < f(y)$;
- **monoton fallend**, falls $x \le y$ impliziert $f(x) \ge f(y)$;
- **streng monoton fallend**, falls $x < y$ impliziert $f(x) > f(y)$.

Falls $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ stetig und streng monoton wachsend, dann ist das Bild von f das Intervall $[A, B]$, wobei $A = f(a)$, $B = f(b)$ (dies folgt aus dem Zwischenwertsatz). f ist dann eine Bijektion von $[a, b]$ auf $[A, B]$. Wir können daher die **Inversfunktion** oder **Umkehrfunktion** f^{-1} von $[A, B] \to [a, b]$ wie folgt definieren:

$$x = f^{-1}(y) \iff y = f(x).$$

Satz 4.11 *In der obigen Situation ist die Umkehrfunktion f^{-1} stetig.*

Beweis. (Widerspruchsbeweis): Wäre die Inversfunktion f^{-1} nicht stetig, dann gäbe es eine Folge (y_n) mit folgenden Eigenschaften: $y_n \to d$ in $[A, B]$ aber $|x_n - c| > \epsilon$ für ein festes $\epsilon > 0$, wobei $d = f(c)$ (Warum?). Hier ist (x_n) die Folge $x_n = f^{-1}(y_n)$. Wir können übergehen zu einer konvergenten Teilfolge (x_{n_k}). Sei c_1 der Limes dieser Folge. Dann gilt: $c \neq c_1$ aber $f(c) = f(c_1)$. Dies widerspricht der Injektivität von f.

■

Unter Verwendung dieser Tatsachen können wir unsere Liste von speziellen Funktionen erheblich erweitern:

Die Wurzelfunktionen: Wir definieren eine stetige Funktion $x \mapsto x^r$ für jede Rationalzahl r. x^n ist definiert für $r = n \in \mathbf{N}$. Für $r = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbf{N})$ definieren wir die Funktion $y \mapsto y^{1/n}$ als die Inversfunktion zu $x \mapsto x^n$ d.h.

$$x = y^{1/n} \iff y = x^n.$$

Diese Funktion ist auf $\mathbf{R}_+$ definiert und stetig (da $x \mapsto x^n$ eine Bijektion von $\mathbf{R}_+$ auf $\mathbf{R}_+$ ist).

Falls $r = \frac{p}{q}$ eine Rationalzahl mit p und q natürlichen Zahlen, dann definieren wir die Funktion $x \mapsto x^r$ als $x^r = \left(x^{1/q}\right)^p$. Für $r < 0$, definieren wir

$$x^r = \frac{1}{x^{-r}}.$$

Die Logarithmusfunktion: Die Logarithmusfunktion ln ist definiert als die Inversfunktion von exp. D.h. $x = \ln y \iff y = \exp x$. Da exp eine Bijektion von $\mathbf{R}$ auf $\mathbf{R}_+$, ist ln eine stetige Funktion von $\mathbf{R}_+$ auf $\mathbf{R}$. Es folgt aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion, daß $\ln xy = \ln x + \ln y$.

Die verallgemeinerten Potenzfunktionen: Wir können jetzt die Funktion $x \mapsto x^\alpha$ für ein allgemeines $\alpha \in \mathbf{R}$ wie folgt definieren: $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$.

Bemerkung. Da $\ln e = 1$, können wir ab jetzt $\exp(x)$ als e^x schreiben.

Weiter interessante Funktionen, die als Inversfunktionen von einfachen Funktion definiert werden, sind die Invers-trigonometrischen Funktionen (arcsin, arccos usw.).
Wir beschließen dieses Kapitel mit einigen Erweiterungen des Limesbegriffes:

Definition 4.12 *Sei f eine Funktion, deren Definitionsbereich D ein Intervall $[K, \infty[$ enthält. Wir schreiben:* $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$, *falls gilt:*

$$\textit{zu jedem } \epsilon > 0 \textit{ existiert } K_1 > K, \textit{ so daß } |f(x) - a| < \epsilon \textit{ falls } x > K_1.$$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$ *wird analog definiert.*
Wir schreiben: $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, *falls gilt:*

$$\textit{zu jedem } K > 0 \textit{ existiert } \epsilon > 0, \textit{ so daß } f(x) > K, \textit{ falls } 0 < |x - a| < \epsilon.$$

Aufgaben

Aufgabe 64. Berechne, falls existent, $\lim_{x\to 0} \cos \frac{1}{x}$.

Aufgabe 65. Berechne, falls existent,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+3x^2} - \sqrt{1-3x^2}}{x}.$$

Aufgabe 66. Berechne, falls existent,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^4 - 7x^2 - 1}{x^4 + 7}.$$

Aufgabe 67. An welcher Stelle ist die Funktion

$$x \mapsto \begin{cases} x & (x \in \mathbf{Q}) \\ -x & (\text{sonst}) \end{cases}$$

stetig?

Aufgabe 68. Auf welchen Intervallen sind die folgenden Funktionen stetig bzw. Lipschitz-stetig?

$$f : x \to \sqrt{x} \quad (x \in \mathbf{R}_+) \qquad g : x \to \frac{1}{x} \quad (x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}).$$

a) $[1, 2]$; b) $]0, 1]$.

Aufgabe 69. Gelten folgende Aussagen?

a) $f : D \to \mathbf{R}$ ist Lipschitz-stetig und D beschränkt impliziert f beschränkt.

b) $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ Lipschitz-stetig impliziert fg Lipschitz-stetig;

c) $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ Lipschitz-stetig und beschränkt impliziert fg Lipschitz-stetig.

Aufgabe 70. Seien f und g stetige Funktionen auf $[0, 1]$, so daß $f(x) = g(x)$, falls x rational. Zeige: $f = g$.

Aufgabe 71. Sei p ein Polynom ungeraden Grades. Zeige: p besitzt mindestens eine Nullstelle.

Aufgabe 72. Sei $A \subset \mathbf{R}$ beschränkt, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Gilt die Aussage $f(A)$ ist beschränkt,

falls f stetig; falls f gleichmäß stetig;

falls f Lipschitz-stetig?

Aufgabe 73. Berechne die Grenzwerte

$$\lim_{x \to 0} \exp\left(\frac{\sin x}{x}\right) \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\tanh x}{x}.$$

Aufgabe 74. Die Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ erfülle die Bedingung:

$$|f(x) - f(y)| \leq 2(e^{|x-y|} - 1).$$

Zeige: f ist gleichmäßig stetig.

Aufgabe 75. f sei eine stetige Funktion auf $[a, b]$. Zeige: Die Funktion

$$x \mapsto \sup\{f(t) : t \in [a, x]\}$$

ist auch stetig.

Aufgabe 76. Sei f stetig und injektiv auf $]0, 1[$. Zeige: f ist monoton.

Aufgabe 77. Sei $f : [0, 1] \to [0, 1]$ stetig. Zeige: f besitzt einen Fixpunkt.

Aufgabe 78. Seien f und g auf $\mathbf{R}_+$ definiert und es gelte: $g(x) = f(x^2)$. Zeige: $\lim_{x\to\infty} f(x) = A \iff \lim_{x\to\infty} g(x) = A$.

Aufgabe 79. Sei

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \text{ rational }) \\ x^2 & (\text{sonst}). \end{cases}$$

Zeige:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 1-} f(x) = 1.$$

Für welche $c \in]0, 1[$ existiert $\lim_{x\to c} f(x)$?

Aufgabe 80. Beweise direkt, daß die Funktion $x \mapsto x^2 - 7x + 6$ auf $\mathbf{R}$ stetig ist.

Aufgabe 81. Sei f auf $[0, 1]$ beschränkt und es gelte:

$$f(ax) = bf(x) \quad (0 \leq x \leq \frac{1}{a}),$$

wobei $a, b > 1$. Zeige: f ist an der Stelle 0 stetig.

Aufgabe 82. Sei $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, $x \in [a, b]$. Setze

$$\operatorname{osc}(f; x_0) = \inf_n \sup\{|f(x) - f(y)| : |x - x_0| < \frac{1}{n}, |y - x_0| < \frac{1}{n}\}.$$

Zeige: f ist im Punkt x_0 stetig $\iff$ $\operatorname{osc}(f; x_0) = 0$. Definiere:

$$\operatorname{osc}_u(f) = \inf_n\{\sup |f(x) - f(y)| : |x - y| < \frac{1}{n}\}.$$

Was bedeutet die Bedingung: $\operatorname{osc}_u(f) = 0$?

Aufgabe 83. Sei (a_n) eine Folge, a eine reelle Zahl. Definiere eine Funktion $f : D \to \mathbf{R}$ wie folgt. $D = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\} \cup \{0\}$, $f(\frac{1}{n}) = a_n$, $f(0) = a$. Zeige:

$$a_n \to a \iff f \text{ stetig}.$$

Aufgabe 84. Sei $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ monoton wachsend. Zeige: Für jedes $x_0 \in]a, b[$ existiert

$f(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ und $f(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-}$. $f(x_0^+) - f(x_0^-)$ heißt der **Sprung** von f im Punkt x_0. Beweise: Es gibt höchstens abzählbar viele Punkte x_0, für die der Sprung nicht-null ist.

Aufgabe 85. Sei $f : [0,1[\to \mathbf{R}$ rechts-stetig im Punkt 0 und so, daß $f(x^2) = f(x) \quad (x \in [0,1[)$. Zeige: f ist konstant.

Aufgabe 86. Sei $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ so, daß $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Zeige: Falls f *einen* Stetigskeitspunkt besitzt, dann hat sie die Form $x \mapsto cx$.

Aufgabe 87. Zeige: Falls $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ stetig und injektiv, dann ist f streng monoton.

Aufgabe 88. Sei f eine stetige Funktion auf $\mathbf{R}$ und (x_n) eine Folge, so daß $x_{n+1} = f(x_n)$ für jedes n. Zeige: Falls die Folge (x_n) konvergiert, dann ist der Limes ein Fixpunkt für f.

5 Differentiation

Definition 5.1 *Sei $f : D \to \mathbf{R}$. Dann ist f im Punkt x_0 differenzierbar, falls*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

auf der Menge $D \setminus \{x_0\}$ existiert. Der Limes ist dann die **Ableitung** *von f im Punkt x_0, geschrieben $f'(x_0)$. Falls die Ableitung in jedem Punkt aus D existiert, dann ist f* **differenzierbar** *und die Funktion*

$$x \mapsto f'(x)$$

ist die **Ableitung** *von f. Falls diese Abbildung stetig ist, dann heißt f* **stetig differenzierbar**.

Wir können dann die n-te Ableitung rekursiv definieren. f ist n-mal differenzierbar, falls f' existiert und $(n-1)$-mal differenzierbar ist. Die n-te Ableitung $f^{(n)}$ von f ist dann die Ableitung von $f^{(n-1)}$. Falls $f^{(n)}$ stetig ist, dann ist f n-mal stetig-differenzierbar.
Es ist klar, daß eine differenzierbare Funktion stetig ist.
Die Definition der Differenzierbarkeit kann wie folgt umgeschrieben werden.

es existiert eine Zahl a, so daß die Funktion

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & (x \neq x_0) \\ a \quad (x = x_0) \end{cases}$$

auf D stetig. (a ist dann die Ableitung von f im Punkt x_0). es existieren Zahlen a und eine Funktion ρ auf $D \setminus \{x_0\}$, so daß

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)a + \rho(x)$$

und

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\rho(x)}{x - x_0} = 0.$$

Wiederum ist a die Ableitung $f'(x_0)$.

(Carathéodory) Es existiert eine Funktion ϕ, die an der Stelle x_0 stetig ist, sodaß

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\phi(x).$$

$a = \phi(x_0)$ ist dann dort die Ableitung von f.

Man verifiziert, daß die bekannten Gesetze bezüglich den algebraischen Operationen gelten:

die Summe $f + g$ von zwei differenzierbaren Funktion ist differenzierbar und es gilt $(f + g)' = f' + g'$;

das Produkt $f \cdot g$ von zwei differenzierbar Funktionen ist differenzierbar und es gilt: $(f \cdot g)' = f'.g + f \cdot g'$;

die Inverse einer differenzierbaren Funktion g ohne Nullstellen ist differenzierbar und es gilt:

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}.$$

Weniger trivial ist die folgende Tatsache:

Satz 5.2 *(Die Ketttenregel.) Seien f und g differenzierbare Funktionen, so daß die Zusammensetzung $g \circ f$ existiert. Dann ist letzere differenzierbar und es gilt*

$$(g \circ f)' = (g' \circ f).f' \quad \textit{d.h.}\ (g \circ f)'(x) = g'(f(x)).f'(x).$$

Beweis. Wir betrachten einen Punkt x und setzen $y = f(x)$. Aufgrund der Differenzierbarkeit von f und g kann man schreiben

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + h.f'(x) + \rho(h) \\ g(y+k) &= g(y) + k.g'(y) + \sigma(k), \end{aligned}$$

mit $\lim_{h\to 0} \dfrac{\rho(h)}{h} = 0$ und $\lim \dfrac{\sigma(k)}{k} = 0$. Setzen wir $k(h) = h.f'(x) + \rho(h)$, so bekommen wir

$$\begin{aligned} g \circ f(x+h) - g \circ f(x) &= g\left(f(x) + k(h)\right) - g(f(x)) \\ &= k(h).g'(y) + \sigma(k(h)) \\ &= h.g'(y)f'(x) + \rho(h)g'(y) + \sigma(k(h)). \end{aligned}$$

Man kann nachprüfen, daß das Restglied $\tau(h) = \rho(h)g'(y) + \sigma(h.f'(x) + \rho(h))$ die Bedingung $\lim_{h\to 0} \dfrac{\tau(h)}{h} = 0$ erfüllt.

∎

Wir bemerken hier, daß es auch eine “punktweise” Version der Kettenregel gibt, die aber etwas Vorsicht bei der Formulierung benötigt.

Beispiele.

I. Konstante Funktionen: Es ist klar, daß die Ableitung einer konstanten Funktion gleich der Nullfunktion ist.

II. $f : x \mapsto cx$ auf $\mathbf{R}$. In diesem Fall ist die Ableitung die konstante Funktion c.

III. Für die Funktion $f : x \mapsto x^n$ gilt $f'(x) = nx^{n-1}$.

IV . Die Exponentialfunktion: Es gilt:

$$\begin{aligned}\exp'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} \exp(x)\frac{\exp(h)-1}{h}\\ &= \exp(x)\lim_{h\to 0}\frac{\exp(h)-1}{h}\\ &= \exp(x).\end{aligned}$$

V. Die Sinusfunktion:

$$\begin{aligned}\sin'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos(\frac{2x+h}{2})\sin\frac{h}{2}}{h}\\ &= \left(\lim_{h\to 0}\cos(x+\frac{h}{2})\right)\cdot\left(\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{h/2}\right)\\ &= \cos x.\end{aligned}$$

Ähnerlicherweise gilt: $\cos'(x) = -\sin x$.

VI. Die Betragsfunktion: Diese Funktion ist an der Stelle 0 nicht differenzierbar.

Einseitige Ableitungen: Die Funktion des letzten Beispiels ist das typische Beispiel einer Funktion, die zwar nicht differenzierbar ist, aber einseitige Ableitungen besitzt.

Definition 5.3 *Sei $x \in D$ und $f : D \to \mathbf{R}$. f heißt* **von rechts differenzierbar oder rechtsseitig differenzierbar** *im Punkte x, falls*

$$f'_+(x) = \lim_{h\to 0+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

existiert. f heißt **von links differenzierbar oder linksseitig differenzierbar** *im Punkte x, falls*

$$f'_-(x) = \lim_{h\to 0-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

existiert. Z.B. gilt $abs'_+(0) = 1$, $abs'_-(0) = -1$.

Stückweise-stetig-differenzierbare Funktionen: Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ heißt **n-mal stückweise-stetig differenzierbar**, falls endlich viele Punkte $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ existieren, so daß

f ist auf $[a, b] \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}$ n-stetig differenzierbar;

für jede $i \leq n$ und $r \leq k$ existieren die einseitige Ableitungen $f_+^{(i)}(a_r)$ und $f_-^{(i)}(a_r)$.

Z. B. haben Treppenfunktionen diese Eigenschaften.

Satz 5.4 *(Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion.) Sei D ein abgeschlossenes Intervall, $f : D \to \mathbf{R}$ eine stetige, streng monotone Funktion, und $\phi = f^{-1} : E \to \mathbf{R}$ die Umkehrfunktion, wobei $E = f(D)$. Ist f differenzierbar und $f'(x) \neq 0$ $(x \in D)$, dann ist ϕ differenzierbar und es gilt:*

$$\phi'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(\phi(y))} \qquad (y = f(x)).$$

Beweis. Wir fixieren x_0 und $y_0 = f(x_0)$ und betrachten die Differenzquotienten:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} \text{ and } \frac{x - x_0}{y - y_0},$$

wobei $y = f(x)$. Da f und die Umkehrfunktion stetig sind, gilt:

$$x \to x_0 \iff y \to y_0.$$

Wir bekommen daher das gesuchte Ergebnis, wenn wir zum Grenzwert (als $x \to x_0$) in der Beziehung

$$\frac{x - x_0}{y - y_0} = \left(\frac{y - y_0}{x - x_0}\right)^{-1}$$

übergehen.

∎

Beispiele.

I. Da ln die Umkehrfunktion von exp ist, gilt:

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln x)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}.$$

II. arcsin arccos, arctan: Das sind die Inversfunktionen zu sin, cos und tan. Genauer, wir betrachten die Inversfunktion zu der Funktionen

sin mit Definitionsbereich $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

cos mit Definitionsbereich $]0, \pi[$

und

tan mit Definitionsbereich $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Es gilt damit:

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Definition 5.5 *Sei* $f :]a,b[\to \mathbf{R}$ *eine Funktion.* f *hat in* $x \in]a,b[$ *ein* **lokales Minimum**, *wenn ein* $\epsilon > 0$ *existiert, so daß für alle* y *mit* $|x-y| < \epsilon$ $f(x) \geq f(y)$. *Ein* **lokales Minimum** *wird ähnlicherweise definiert.*
x *ist ein* **lokales Extremum**, *falls es entweder ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum ist.*

Satz 5.6 *Eine Funktion* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *sei auf* $[a,b]$ *stetig und auf* $]a,b[$ *differenzierbar. Dann gilt für jedes lokale Extremum* $x \in]a,b[$ $f'(x) = 0$.

Beweis. Übung.

■

Satz 5.7 *(Der Satz von Rolle.) Sei* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *differenzierbar und es gelte:* $f(a) = f(b)$. *Dann existert ein Punkt* $x_0 \in]a,b[$, *so daß* $f'(x_0) = 0$.

Beweis. Ist die Funktion konstant, so ist die Aussage trivial. Wenn nicht, existiert eine Stelle x_1, so daß entweder $f(x_1) > f(a)$ oder $f(x_1) < f(a)$. Im ersten Fall, wählt man x_0 so, daß $f(x_0) = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$.

■

Satz 5.8 *(Mittelwertsatz der Differentialrechnung.) Sei* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *stetig und in* $]a,b[$ *differenzierbar. Dann existiert ein* ξ *in* $]a,b[$, *so daß*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

Beweis. Für den Fall, wo $a = 0$, $b = 1$. Man wendet den Satz von Rolle auf die Funktion

$$f_1(x) = f(x) - ((1-x)f(0) + x(f(1))$$

an.

■

Korollar 5.9 *Seien* f *und* g *stetige Funktion auf* $[a,b]$, *die im offenen Intervall* $]a,b[$ *differenzierbar sind. Dann existiert* ξ *in* $]a,b[$, *so daß*

$$f'(\xi)(g(b) - g(a)) = g'(\xi)(f(b) - f(a)).$$

Beweis. Übung.

■

Satz 5.10 *Sei* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *stetig und in* $]a,b[$ *differenzierbar. Falls* $f' = 0$ *auf* $]a,b[$, *dann ist* f *eine Konstante.*

Beweis. Übung.

■

Satz 5.11 *Sei* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *stetig und auf* $]a,b[$ *differenzierbar. Falls* $f' > 0$ *auf* $]a,b[$, *dann ist* f *streng monoton wachsend. Falls* $f' < 0$, *dann ist* f *streng monoton fallend.*

Beweis. Übung.

■

Regel von L'Hospital. Sei f und g differenzierbar in der Nähe eines Punktes c und es gelte:

$f(c) = g(c) = 0$;

g und g' haben keine Nullstellen in einer Umgebung von c;

$\lim_{x\to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert.

Dann existert $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt:

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Beweis. Wir beweisen diese Aussage für den einseitigen Limes $\lim_{x\to c+}$. Sei $L = \lim_{x\to c+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Wähle $\delta > 0$, so daß

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \epsilon,$$

falls $x \in]c, c+\delta[$. Sei $0 < h < \delta$. Es existiert $\xi \in]c, c+h[$, so daß

$$\frac{f(c+h)}{g(c+h)} \left(= \frac{f(c+h) - f(c)}{g(c+h) - g(c)} \right) = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Damit gilt:

$$\left| \frac{f(c+h)}{g(c+h)} - L \right| < \epsilon.$$

■

Satz 5.12 *(Der Satz von Taylor.) Sei $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ n-mal differenzierbar und sei x_0 ein Punkt in $]a,b[$. Dann existiert zu jedem x in $[a,b]$ ein ξ zwischen x_0 und x, so daß*

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Beweis. o.B.d. A. nehmen wir an, daß $x_0 = 0$, $x = 1$. (Sonst betrachten wir die Funktion

$$g(t) = f(x_0 + t(x - x_0)).)$$

Wir definieren Funktionen F und G auf $[0,1]$ wie folgt:

$$F(t) = f(1) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k-1)}(t)}{(k-1)!}(1-t)^{k-1}$$

bzw.

$$G(t) = (1-t)^n.$$

Es existiert ein ξ mit $\frac{F(1)-F(0)}{G(1)-G(0)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$. Dies ist das gesuchte Ergebnis.

■

Falls f in der Nähe von x_0 unendlich oft differenzierbar ist, dann heißt die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

die **Taylorreihe** von f an der Stelle x_0.

Siehe unten für weitere Überlegungen zum Thema Taylorreihen.

Aufgaben

Aufgabe 89. Berechne die Ableitung der Funktionen

$$\sqrt{\exp x^{\cos\sqrt{x}}}, \quad x^{\sqrt{x}}.$$

Aufgabe 90. Zeige:

$$x^\alpha y^\beta \leq \alpha x + \beta y,$$

wobei x, y, α, β positiv sind, mit $\alpha + \beta = 1$. (Berechne den Extremalwert der Funktion $x \mapsto x^\alpha y^\beta - \alpha x$).

Aufgabe 91. Beweise die Höldersche Ungleichung

$$\sum_{j=1}^{n} x_j y_j \leq \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} y_j^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

wobei $x_j > 0, y_j > 0$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.)

Aufgabe 92. Sei f eine stetig-differenzierbare Funktion auf $[a, b]$. Zeige: f ist Lipschitz-stetig.

Aufgabe 93. Beweise die Regel von Leibniz:

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Berechne $(x^2 \sin x)^{(9999)}$..

Aufgabe 94. Bestimme die Taylorreihe von $\ln x$ an der Stelle $x_0 = 1$. Für welche $x > 0$ konvergiert die Reihe?

Aufgabe 95. Betrachte die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

Zeige: $\lim_{x\to 0} p(\frac{1}{x}) \exp(\frac{-1}{x^2}) = 0$ für jedes Polynom p. Bestimme die Taylorreihe von f an der Stelle 0. Ist f durch diese Reihe darstellbar?

Aufgabe 96. Sei f zweimal stetig differenzierbar. Zeige:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-2f(a+h)+f(a)}{h^2}=f''(a).$$

Aufgabe 97. Zeige:

$$\lim_{x\to 0}x^{-2}[b(1+ax)^{\frac{1}{3}}-a(1+bx)^{\frac{1}{3}}+(a-b)(1+abx^2)^{\frac{1}{2}}]=\frac{7}{18}ab(a-b).$$

Aufgabe 98. Sei f zweimal differenzierbar, mit $|f(x)|\leq A$, $|f''(x)|\leq B$ $(x\geq K)$. Zeige:

$|f'(x)|\leq\sqrt{2(AB)}$ $(x\geq K)$.

Aufgabe 99. Sei f eine Funktion auf $[a,b]$, sodaß

$$|f(x)-f(y)|\leq A|x-y|^2 \quad (x,y\in[a,b]).$$

Zeige: f ist konstant.

Aufgabe 100. Bestimme die Extremalwerte der Funktion

$$x\mapsto x^m(1-x)^n$$

auf $[0,1]$.

Aufgabe 101. Seien f,g,h stetig-differenzierbare Funktionen auf $[a,b]$. Zeige: Es existiert eine Punkt ξ, so daß

$$\det\begin{bmatrix} f(a) & g(a) & h(a)\\ f(b) & g(b) & h(b)\\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi)\end{bmatrix}=0.$$

Aufgabe 102. Zeige, mit Hilfe der Potenzreihendarstellungen von sin und cos, daß

$$\sin'(x)=\cos x \qquad \cos'(x)=-\sin x.$$

Aufgabe 103. Zeige, daß die Carathéodorysche Definition der Differenzierbarkeit zu Bedingung (1) äquivalent ist. Benütze die Carathéodorysche Definition, um die Kettenregel bzw. den Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion zu beweisen.

6 Das Riemannsche Integral

Wir erinnern kurz, daß eine Funktion $h:[a,b]\to\mathbf{R}$ eine Treppenfunktion ist, falls es eine Unterteilung

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

des Intervalls gibt, so daß h auf $]x_{k-1},x_k[$ konstant ist für jedes k. Es ist klar, daß die Treppenfunktionen einen Vektorraum bilden, d.h. daß die Summe h_1+h_2 und ein Produkt λh wieder Treppenfunktionen sind, falls h_1,h_2,h Treppenfunktionen sind, und l ein Skalar.

Falls c_k der Wert von h auf dem Intervall $]x_{k-1}, x_k[$ ist, dann ist das **Integral** $\int_a^b h(x)\,dx$ von h die Summe

$$\sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1}).$$

Dieses Integral ist positiv und additiv d.h. es gilt:

$$\begin{aligned}\int_a^b (h_1+h_2)(x)\,dx &= \int_a^b h_1(x)\,dx + \int_a^b h_2(x)\,dx\\ \int_a^b lh(x)\,dx &= l\int_a^b h(x)\,dx.\end{aligned}$$

Außerdem

$$h \le h_1 \text{ impliziert } \int_a^b h(x)\,dx \le \int_a^b h_1(x)\,dx.$$

Wie aus der Mittelschulmathematik bekannt ist, versucht man, das Integral einer allgemeinen Funktion durch Approximation von oben und unten mit Treppenfunktionen zu bestimmen:

Definition 6.1 *Sei $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ eine beliebige beschränkte Funktion. Man setzt $\int_a^{b^*} f(x)\,dx$ gleich*

$$\inf\{\int_a^b h(x)\,dx : h \textit{ eine Treppenfunktion mit } f \le h\}$$

und $\int_{a\,*}^{b} f(x)\,dx$ gleich

$$\sup\{\int_a^b h(x)\,dx : h \textit{ eine Treppenfunktion mit } f \ge h\}.$$

Beispiele. Falls f eine Treppenfunktion ist, dann stimmen die Ober- und Unterintegrale von f überein. Falls f die Funktion

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ rational} \\ 0 & \text{falls } x \text{ irrational,}\end{cases}$$

dann ist das Unterintegral 0, das Oberintegral dagegen 1.

Eine beschränkte Funktion ist dann **Riemann-integrierbar**, falls

$$\int_a^{b^*} f(x)\,dx = \int_{a\,*}^{b} f(x)\,dx.$$

Der gemeinsame Wert ist dann **das Integral** von f—geschrieben

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Die Definition kann man wie folgt umschreiben:

Satz 6.2 *Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ Treppenfunktionen h_1 und h_2 existieren mit*

$$h_1 \le f \le h_2 \quad \textit{und} \quad \int_a^b h_2(x)\,dx - \int_a^b h_1(x)\,dx \le \epsilon.$$

Satz 6.3 *Jede stetige Funktion ist integrierbar.*

Beweis. Sei
$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$
eine Partition von $[a, b]$. Für $k = 1, \ldots, n$ setzen wir
$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\} \qquad M_i = \sup\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}.$$
Wir definieren die **Riemann-Summen**:
$$\begin{aligned} s(f) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \\ S(f) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$
Es ist klar, daß f Riemann-integrierbar ist, falls man für jedes ϵ eine Partition finden kann, so daß $|S(f) - s(f)| < \epsilon$ für diese Partition.
Falls aber f stetig ist, dann existiert für jedes ϵ ein δ, so daß aus $|x - y| < \delta$ folgt $|f(x) - f(y)| < \dfrac{\epsilon}{b-a}$. Wählen wir dann eine Partition, so daß $|t_i - t_{i-1}| < \delta$ für jedes i, dann gilt $|S(f) - s(f)| < \epsilon$.

■

Weiters gilt:

Satz 6.4 *Jede monotone Funktion $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ ist integrierbar.*

Beweis. Übung.

■

Es ist wiederum klar, daß $f + g$ und lf integrierbar sind, falls f und g es sind. Weiters ist das integral monoton d.h. $f \leq g$ für integrierbare Funktionen f und g impliziert $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

Satz 6.5 *(Mittelwertsatz der Integralrechnung.) Seien $f, h : [a, b] \to \mathbf{R}$ stetige Funktionen, wobei $h \geq 0$. Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$, so daß*
$$\int_a^b f(x)h(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b h(x)\,dx.$$

Beweis. Wir setzen m für das Infimum und M für das Supremum von f auf dem Intervall. Es gilt dann:
$$mh(x) \leq f(x)h(x) \leq Mh(x)$$
und damit
$$m \int_a^b h(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)h(x)\,dx \leq M \int_a^b h(x)\,dx.$$
Damit gibt es ein $\eta \in [m, M]$, so daß
$$\int_a^b f(x)h(x)\,dx = \eta \int_a^b h(x)\,dx.$$
Aus dem Zwischenwertsatz folgt, daß $\eta = f(\xi)$ für ein $\xi \in [a, b]$.

■

Sei jetzt I ein Intervall (offen, halb-offen oder geschlossen), das den Punkt a enthält. Falls $f : I \to \mathbf{R}$, dann heißt die Funktion

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$$

eine **Stammfunktion** von f. (N.B. Falls $b < a$, dann definiert man $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$. Der Name hat seinen Ursprung in der Eigenschaft, die im folgenden Satz erwähnt wird:

Satz 6.6 *F ist (stetig)-differenzierbar und es gilt $F' = f$.*

Beweis. Sei x_0 ein Punkt aus $[a, b]$. Wir berechnen

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(F(x_0 + h) - F(x_0)) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx.$$

Nach dem Mittelwertsatz bekommen wir

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} f(\xi_h).h,$$

wobei ξ_h zwischen x_0 und $x_0 + h$ liegt. Es ist klar, daß der Grenzwert $f(x_0)$ ist.

■

Allgemein heißt jede Funktion F mit der Eigenschaft $F' = f$ eine Stammfunktion von f. Allerdings gilt: Seien F_1 und F_2 Stammfunktion von f. Dann ist $F_1 - F_2$ eine konstante Funktion (entscheidend hier ist die Tatsache, daß der Definitionsbereich ein Intervall ist). In anderen Worten $\int_a^x f(t)\,dt$ ist, bis auf eine Konstante, die einzige Stammfunktion von f. Manchmal schreibt man $\int f$ für eine Stammfunktion von f.

Satz 6.7 *(Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung.) Sei $f : I \to \mathbf{R}$ eine stetige Funktion mit Stammfunktion F. Dann gilt für alle $a, b \in I$,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Beweis. Übung.

■

Wir haben daher folgende Methode, um $\int_a^b f(x)\,dx$ zu bestimmen. Finde eine Funktion F mit f als Ableitung. Dann ist der Wert des Integrals $F(x)\big|_a^b \quad (= F(b) - F(a))$.

Satz 6.8 *(Satz über partielle Integration.) Seien f und g stetige Funktion mit Stammfunktionen F und G. Dann ist $FG - \int fG$ eine Stammfunktion für Fg d.h.*

$$\int_a^x F(t)g(t)\,dt = F(x)G(x) - \int_a^x f(t)G(t)\,dt.$$

Die Substitutionsregel. Sei $\phi : [a, b] \to \mathbf{R}$ stetig differenzierbar und $f : I \to \mathbf{R}$ stetig mit $\phi([a, b]) \subset I$. Dann gilt:

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,dx.$$

BEWEIS. Dies folgt aus der Kettenregel. Denn falls F eine Stammfunktion von f, dann ist $(F \circ \phi).\phi'$ eine Stammfunktion für $f \circ \phi$.

∎

Aufgaben

Aufgabe 104. Berechne folgende Integrale:

$$\int_a^b x^\alpha \, dx, \quad \int_a^b \frac{1}{x} \, dx, \quad \int_a^b \sin x \, dx.$$

Aufgabe 105. Berechne Stammfunktionen für

$$\cos x, \quad \exp x, \quad \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}, \quad \frac{1}{1+x^2}.$$

Aufgabe 106. Berechne Stammfunktionen für

$$x^\alpha, \quad e^{lx}, \quad \sin(lx), \quad \sinh(lx), \quad \int \frac{dx}{x}.$$

Aufgabe 107. Berechne die unbestimmten Integrale

$$\int \frac{f'(x)\,dx}{f(x)}, \quad \int \frac{dx}{ax+b}, \quad \int \tan x \, dx, \quad \int \sec(x) \, dx, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}, \quad \int \frac{dx}{1+x^2}.$$

Aufgabe 108. Zeige, wie man eine Stammfunktion für jede Funktion der Gestalt $\frac{1}{x+a}$ bzw. $\frac{1}{x^2+ax+b}$ berechnen kann. Zeige damit, wie man mit Hilfe von Bruchdarstellungen jede rationale Funktion explizit integrieren kann.

Aufgabe 109. Berechne Stammfunktionen für

$$\cos \alpha x \sin \beta x, \quad \sqrt{a^2 - x^2}, \quad \frac{1}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta - x)}}.$$

Aufgabe 110. Berechne mit Hilfe der partiellen Integration:

$$\int x^2 e^{ax} \, dx, \quad \int e^{ax} \, dx, \quad \int e^{ax} \sin bx \, dx, \quad \int \sin^m x \cos^n x \, dx.$$

Aufgabe 111. Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ heißt von beschränkter Variation, falls $K > 0$ existiert, sodaß

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq K$$

für jede Partition $a = x_0 < x_1 \cdots < x_n = b$. Das kleinste solche K heißt die **Variation** von f (geschrieben $\mathrm{Var}\,(f)$). Zeige:

jede monotone Funktion ist von beschränkter Variation; falls f von beschränkter Variation ist, dann ist die Funktion

$$x \mapsto \mathrm{Var}\,(f|_{[a,x]})$$

monoton steigend;

jede Funktion von beschränkter Variation ist die Differenz von zwei monotonsteigenden Funktionen;

es existieren nicht stetige Funktionen von beschränkter Variation;

falls f stetig und von beschränkter Variation, dann ist die Funktion

$$x \mapsto \mathrm{Var}\,(f|_{[a,x]})$$

stetig.

7 Konvergenzkriterien (uneigentliche Integrale)

In diesem Kapitel betrachten wir unendliche Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, wobei (a_n) eine Folge von reellen Zahlen ist. Die Reihe **konvergiert gegen** s (oder s ist die **Summe der unendlichen Reihe**), falls $s_n \to s$, wobei s_n die n-te partielle Summe $\sum_{k=1}^{n} a_k$ ist. Für Reihen hat das Cauchykriterium folgende Gestalt:

Satz 7.1 *$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn gilt: Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert $N \in \mathbf{N}$, so daß*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \epsilon \text{ für alle } m \geq n \geq N.$$

Falls die Reihe nicht konvergiert, dann sagt man, daß sie **divergiert.**

Falls die a_n nicht-negativ sind, dann ist die Folge der partiellen Summen monotonsteigend. Damit gibt es in diesem Fall nur zwei Möglichkeiten:

entweder sind die partiellen Summen beschränkt und die Reihe konvergiert;

oder die Summen sind nicht beschränkt und die Reihe divergiert. (Man schreibt dann manchmal $\sum_n a_n = \infty$).

Man sieht sofort, daß eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nur dann konvergieren kann, wenn $a_n \to 0$. Denn

$$a_n = s_{n+1} - s_n \to s - s = 0.$$

Es gibt aber divergente Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, mit $a_n \to 0$.

Beispiel. $\sum \frac{1}{n}$ divergiert. Denn wir können die partiellen Summen $s_{2^{k+1}}$ von unten wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} s_{2^{k+1}} &= 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + \cdots + (\sum_{m=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{m}) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} > 1 + \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

Damit sind die partiellen Summen nicht beschränkt.

Beispiel. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ konvergiert für alle natürlichen Zahlen $k > 1$.
Wir zeigen dies für den Fall $k = 2$. Für den allgemenen Fall, siehe unten. Wir haben die Abschätzung:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{n^2} &= 1 + (\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}) + \cdots + \left(\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{n^2} \right) \\ &\leq \sum_{r=0}^{k} \frac{2^r}{(2^r)^2} \leq 2. \end{aligned}$$

Bemerkung. Es gilt sogar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

(siehe unten (Kap. IX) oder die Vorlesung: “Funktionentheorie”).

Wir bringen jetzt einige Kriterien für die Konvergenz bzw Divergenz von Reihen:

Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen

Sei (a_n) eine monoton fallende Folge von positiven Zahlen mit $\lim a_n = 0$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.

Beweis. Für die partiellen Summen s_k gilt:

s_{2k} ist monoton fallend;

s_{2k-1} ist monoton steigend;

$s_{2k-1} \leq s_{2k}$.

Daraus folgt: $L = \lim_k s_{2k}$ und $L' = \lim_k s_{2k-1}$ existieren. Außerdem gilt:

$$L - L' = \lim s_{2k} - \lim s_{2k-1} = \lim(s_{2k} - s_{2k-1}) = \lim a_{2k} = 0.$$

Daraus folgt leicht, daß die Reihe konvergiert.

∎

Beispiel. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert. (In der Tat ist der Grenzwert $\ln 2$).

Definition 7.2 *Die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *heißt* **absolut konvergent**, *falls* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *konvergiert.*

Es folgt aus dem Cauchyschen Konvergenzkriterium, daß die Reihe dann konvergiert. Denn

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_n \right| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_n| \, .$$

Das Beispiel $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ zeigt, daß eine Reihe konvergent sein kann, ohne absolut konvergent zu sein. Wir reden dann von einer **bedingt konvergenten** Reihe.

Majorantenkriterium. Sei $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ eine konvergente Reihe mit nicht negativen Gliedern. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, falls die Folge (a_n) von (c_n) majorisiert wird (d.h. $|a_n| \leq c_n$ für jedes n).

Beweis. Es gilt dann

$$|\sum_{k=m}^{n} a_n| \leq \sum_{k=m}^{n} c_n.$$

Damit ist das Konvergenzkriterium von Cauchy erfüllt.

■

Da die Konvergenz oder Divergenz einer Reihe nicht beeinflußt wird, wenn man endlich viele Glieder verändert, genügt die Bedingung: Es existieren $N \in \mathbf{N}$;und $K > 0$, so daß $|a_n| \leq Kc_n$, falls $n \geq N$.
Aus dem letzten Satz folgt das folgende Kriterium:

Vergleichskriterium. Seien (a_n) und (b_n) zwei Folgen mit positiven Glieder. Falls $l > 0$ existiert, so daß $\dfrac{a_n}{b_n} \to l$, dann gilt: $\sum_n a_n$ konvergiert $\iff$ $\sum_n b_n$ konvergiert.
Beweis. Übung.

■

Quotientenkriterium. Sei $\sum a_n$ eine Reihe mit nicht-verschwindenden Gliedern. Es gebe ein λ mit $0 < \lambda < 1$, so daß

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \lambda \text{ für alle } n.$$

Dann konvergiert die Reihe (absolut).
Beweis. Es folgt leicht aus der Voraussetzung, daß man die Reihe durch eine (konvergierende) geometrische Reihe majorisieren kann.

■

Wurzelkriterium. Sei $\sum a_n$ eine unendliche Reihe und es gelte: $\lim |a_n|^{1/n} = \lambda$, wobei $\lambda < 1$. Dann ist die Reihe (absolut) konvergent.
Beweis. Wiederum kann man die Reihe mit einer geometrischen Reihe majorisiern.

■

Bemerkung. In der Tat reicht die Bedingung $\limsup_n |a_n|^{1/n} = \lambda < 1$ für die Konvergenz. Ähnlich genügt die Bedingung:

$$\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

beim Quotientenkriterium.

Beispiele.

I. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2^n}$ konvergiert (Quotientenkriterium).

II. $\sum \dfrac{1}{n}$. Wir wissen, daß diese Reihe divergiert. Es gilt aber $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ für jedes n bzw. $|a_n|^{1/n} < 1$ für jedes n.

III. Die Reihen $\sum \dfrac{1}{n}$ und $\sum \dfrac{1}{n^2}$ zeigen, daß die Quotienten- und Wurzelkriterien keine Information liefern, wenn die entsprechenden Limiten gleich 1 sind.

Divergenzkriterien: Analog zu den obigen Kriterien, gibt es welche, die Divergenz bestimmen. Wir erwähnen drei davon:

Satz 7.3 *Falls die Reihe $\sum_n a_n$ von nicht negativen Gliedern divergiert, dann auch $\sum_n b_n$, falls $b_n \geq a_n$ für jedes n.*
Falls die Reihe $\sum_n a_n$ die Bedingung $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to l$ erfüllt, wobei $l > 1$, dann divergiert die Reihe.
Falls die Reihe $\sum_n a_n$ die Bedingung $\lim |a_n|^{1/n} \to l$ erfüllt, wobei $l > 1$, dann divergiert die Reihe.

Satz 7.4 *Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. Dann konvergiert jede Reihe, die aus der Reihe durch Umordnen entsteht, und zwar gegen die gleiche Summe. Genauer: Für jede bijektive Abbildung $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ gegen $a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wir wählen N_1 so, daß $\sum_{k=n}^{\infty} |a_n| < \epsilon$, wenn $n \geq N_1$. Sei dann N so, daß $\{\sigma(1), \dots, \sigma(N)\} \supset \{1, \dots, N_1\}$. Es gilt dann für $m \geq N$:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{m} a_{\sigma(k)} - a\right| &\leq \left|\sum_{k=1}^{m} a_{\sigma(k)} - \sum_{n=1}^{N_1} a_n\right| + \left|\sum_{n=1}^{N_1} a_n - a\right| \\ &\leq \sum_{n=N_1+1}^{\infty} |a_n| + \epsilon < 2\epsilon.\end{aligned}$$

■

Für bedingt konvergente Reihen gilt dieser Satz nicht. In der Tat kann man jede solche Reihe so umordnen, das sie *divergiert* oder gegen jeden *willkürlichen* Wert konvergiert!! Denn sei $\sum a_n$ eine Reihe. Wir zerlegen diese in die Differenz von zwei Reihen mit nichtnegativen Elementen $\sum a_n^+$ und $\sum a_n^-$, wobei

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & (a_n \geq 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

bzw.

$$a_n^- = \begin{cases} -a_n & (a_n \leq 0) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man sieht leicht, daß $\sum a_n$ genau dann absolut konvergent ist, wenn diese zwei Reihen konvergieren. Andererseits divergieren *beide* , falls $\sum a_n$ bedingt konvergent ist. Sei jetzt L eine willkürliche Zahl. Man konstruiert eine Umordnung, die gegen L konvergiert wie folgt. Zunächst wählt man genügend viele positive Glieder, daß die Summe größer als L wird. Dann nimmt man negative Elemente, damit die Summe wieder kleiner als L wird usw.

Bezüglich des Verhaltens von Reihen gegenüber den algebraischen Operationen gilt:

Satz 7.5 *Falls die Reihen $\sum_n a_n$ und $\sum_n b_n$ konvergieren, dann konvergiert auch die Summe $\sum_n (a_n + b_n)$ (natürlich gegen $\sum_n a_n + \sum_n b_n$).*
Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolut konvergent sind, dann ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ (mit $c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$) absolut-konvergent. Außerdem gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right).$$

Beweis. Seien a und b die Summen der entsprechenden Reihen bzw. A und B die Summen der Reihen der Absolutbeträge. Wir zeigen $\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_n = ab$. Wähle N so, daß

$|(\sum_{k=0}^{n} a_k)(\sum_{k=0}^{n} b_k) - ab| < \epsilon$ für $n \geq N$;
$\sum_{k=n}^{\infty} |a_k| < \epsilon$ für $n \geq N$;
$\sum_{k=n}^{\infty} |b_k| < \epsilon$ für $n \geq N$.

Dann gilt, für $n \geq 2N$,

$$\left|\sum_{k=0}^{n} c_k - ab\right| < \epsilon(1 + A + B).$$

■

Beispiel. (Die Exponentialreihe.) Betrachte die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Aus dem Quotientenkriterium sieht man leicht, daß die Reihe für jedes $x \in \mathbf{R}$ konvergiert, und zwar absolut. Wir schreiben $\exp x$ für die Summe. Insbesonders, $e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ ist die **Eulersche Zahl**.
Aus der Formel für das Produkt von zwei absolut-konvergierenden Reihe berechnet man den

Satz 7.6 *(Funktionalgleichung der Exponentialfunktion.) Für $x, y \in \mathbf{R}$ gilt:*

$$\exp(x + y) = \exp(x). \exp(y).$$

Beweis. Sei $a_i = \frac{x^i}{i!}$, $b_j = \frac{y^j}{j!}$. Dann ist

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!}\frac{y^k}{k!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^{n-k}y^k = \frac{1}{n!}(x + y)^n.$$

■

Daraus folgen einige Eigenschaften der Exponentalfunktion:

für $x \in \mathbf{R}$, gilt $\exp x > 0$;
$\exp(-x) = (\exp(x))^{-1}$;
$\exp n = e^n$ für $n \in \mathbf{Z}$.

Weitere Beispiele von Funktionen, die man mit Hilfe von geeigneten Reihen definieren kann sind:

Die trigonometrischen Funktionen: Wir definieren:

$$\begin{aligned}\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\\ \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.\end{aligned}$$

Die Reihen konvergieren absolut für jedes $x \in \mathbf{R}$ (Quotientenkriterium). Aus der Definition sieht man unmittelbar, daß

$\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$;

$\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$;

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$;

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$;

$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$;

$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$;

$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$.

Beweis. (1) und (2) sind trivial. (3) und (4) beweist man mit Hilfe der Cauchyproduktes, wie bei der Funktionengleichung der Exponentialfunktion. Da wir später einen einfacheren Beweis geben werden, verzichten wir hier auf die Komputation. (5), (6), (7) folgen aus (3) und (4).

■

Weitere trigonometrische Funktionen: Mit Hilfe der Funktionen sin und cos können wir folgende weitere trigonometrischen Funktionen definieren:

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x}; \\ \operatorname{cosec}(x) &= \frac{1}{\sin x}; \\ \operatorname{cotan}(x) &= \frac{\cos x}{\sin x}; \\ \sec(x) &= \frac{1}{\cos x}. \end{aligned}$$

Selbstverständlich sind diese Funktionen nur für die x definiert, für die die entsprechenden Nenner ungleich Null sind.
Die Eigenschaften dieser Funktionen kann man aus den entsprechenden Eigenschaften von sin und cos ableiten. Z.B. gilt folgende Summenformel für tan:

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}.$$

Uneigentliche Integrale:

I. Integrale mit unendlichen Integrationsgrenzen: Sei $f : [a, \infty[\to \mathbf{R}$ eine beschränkte Funktion. Falls

$$\lim_{c\to\infty} \int_a^c f(x)\,dx$$

existiert, ist das Integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ **konvergent** und wir definieren

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{c\to\infty} \int_a^c f(x)\,dx.$$

Ähnlicherweise definieren wir die Existenz und den Wert von $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ bzw. $\int_{\mathbf{R}} f(x)\,dx$ für eine Funktion f, die auf $]-\infty, a]$ bzw. auf $\mathbf{R}$ definiert ist.

II. Integrale, wobei der Integrand Singularitäten hat bzw. nicht beschränkt ist. Sei etwa $f :]a,b] \to \mathbf{R}$ so, daß für jedes $\epsilon > 0$, die Einschränkung der Funktion auf $[a+\epsilon, b]$ beschränkt und integrierbar ist. Falls

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\, dx$$

existiert, setzt man den Wert von

$$\int_a^b f(x)$$

gleich dem Limes.

Wir bemerken hier, daß es Kriteria für die Konvergenz und Divergenz von uneigentlichen Integralen gibt, die analog der obigen Kriteria für Reihen sind. Weiterhin unterscheidet man zwischen absolut-konvergenten und bedingten konvergenten Integralen. Z. B. konvergiert das uneigentlich Integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ (sein Wert ist $\dfrac{\pi}{2}$—siehe Übungen). $\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|\, dx$ dagegen divergiert.

Beispiele. Betrachte die Integrale

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\, dx$$

und

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx.$$

Das erste Integral konvergiert genau dann, wenn $\alpha > 1$, das zweite wenn $\alpha < 1$.

Integralkriterium für die Konvergenz von Reihen. Sei

$$f : [1, \infty[\to \mathbf{R}$$

eine nicht negative, monoton fallende Funktion. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ genau dann, wenn das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty f(x)\, dx$$

konvergiert.

Beweis. Daß die Konvergenz des Integrals diejenige der Reihe impliziert, folgt aus der Tatsache, daß $\sum_{n=2}^N f(n)$ das Integral einer Treppenfunktion ist, die von f majorisiert wird. Andererseits ist $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ das Integral einer Treppenfunktion, die f majorisiert. ∎

Beispiele. Die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \dfrac{1}{n^\alpha}$. Mithilfe des Satzes können wir sofort ableiten, daß $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ konvergiert für $\alpha > 1$ und divergiert für $\alpha \leq 1$.

Aufgaben

Aufgabe 112. Für welche $x \in \mathbf{R}$ konvergieren die Reihen

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{(k+2)^4}{k^5+6)} x^{2k} \qquad \sum_{k=0}^\infty k^2 x^k?$$

Aufgabe 113. Zeige:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+3}{k(k+1)(k+2)} = \frac{5}{4}, \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k^2-1)} = \frac{1}{4}.$$

Aufgabe 114. Welche der folgenden Reihen konvergieren?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{1+n^4}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{1+n^4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^{1/n}}.$$

Aufgabe 115. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

falls $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, dann konvergiert $\sum a_n$; falls $a_n - b_n \to 0$ und $\sum b_n$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum a_n$;
falls $\sum a_n$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum a_n^2$;
falls $\sum a_n^2$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum a_n$;
falls $a_{n+1} + \dots + a_{2n} \to 0$, dann konvergiert $\sum a_n$.

Aufgabe 116. Zeige:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+k)} = \frac{1}{k!k}.$$

Aufgabe 117. Zeige

$$\sum_{r=1}^{n} r x^{r-1} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2} \quad (x \neq 1).$$

Für welche x konvergiert die unendliche Reihe $\sum_{r=1}^{\infty} r x^{r-1}$?

Aufgabe 118. Sei k die Summe der unendlichen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Zeige:

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{3}{4}k.$$

Aufgabe 119. Für welche a, b, konvergiert die Reihe

$$(a-b) + (a^2-b^2) + (a^3-b^3) + \dots?$$

Aufgabe 120. Sei f eine nicht-negative, monoton fallende Funktion von $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$. Zeige: $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergiert $\iff$ $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n f(2^n)$ konvergiert. (Cauchy Verdichtungssatz).

Aufgabe 121. Benütze die letzte Aufgabe, um die Konvergenz der Reihe $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln n}$ zu untersuchen.

Aufgabe 122. Für welche x konvergiert die Reihe

$$\sum \binom{\alpha+n-1}{n} x^n?$$

Aufgabe 123. Für welche x konvergiert die Reihe

$$\sum \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} x^n?$$

Aufgabe 124. Formuliere eine Version des Vergleichkriteriums für die Konvergenz von Reihen, die für uneigentliche Integrale gültig ist.

Aufgabe 125. Zeige: Das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ ist bedingt konvergent.

Aufgabe 126. Zeige:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

(Differenziere den Ausdruck $F(y) = \int_0^\infty e^{-xy} \frac{\sin x}{x}\, dx$ bezgl. y).

Aufgabe 127. (Kriterium von Raabe) Zeige: Falls

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq 1 - \frac{\beta}{n},$$

wobei $\beta > 1$, dann konvergiert die Reihe $\sum a_n$ (asolut).

8 Konvergenz von Funktionen-Folgen und -Reihen

Definition 8.1 *Sei (f_n) eine Folge von Funktionen von $D \subset \mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$. Wir sagen, daß f_n* **punktweise gegen eine Funktion f konvergiert**, *falls gilt: $f_n(x) \to f(x)$ für jedes $x \in D$.*

Dies ist der natürliche Konvergenzbegriff für Funktionen. Allerdings, wie wir sehen werden, ist für viele Zwecke ein subtilerer und stärkerer Begriff unerläßlich:

Definition 8.2 *Seien (f_n) und f wie oben. Dann gilt: f_n konvergiert* **gleichmäßig** *gegen f, falls: Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein N, so daß $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ für alle $x \in D$ und alle $n \geq N$.*

Beispiele. Es ist klar, daß jede gleichmäßig konvergente Folge punktweise konvergiert. Die folgenden sind Beispiele von Folgen, die zwar punktweise konvergieren, nicht aber gleichmäßig.

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - |nx - 1| & (0 \leq x \leq \frac{1}{n}) \\ 0 & (\frac{1}{n} \leq x \leq 1). \end{cases}$$

$$f_n(x) = x^n \quad (0 \leq x \leq 1).$$

$$f_n(x) = \begin{cases} n & (0 < x < \frac{1}{n}) \\ 0 & x = 0 \text{ oder } x \in]\frac{1}{n}, 1]). \end{cases}$$

Die Definition von gleichmäßiger Konvergenz kann man folgendermaßen umschreiben:

Definition 8.3 *Sei f eine beschränkte Funktion auf D. Wir definieren*

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in D\}.$$

Falls f unbeschränkt ist, dann setzen wir $\|f\|_\infty = \infty$.

Satz 8.4 *f_n konvergiert genau dann gleichmäßig gegen f, wenn gilt:*

$$\|f_n - f\|_\infty \to 0$$

.

Satz 8.5 *Sei (f_n) eine Folge von stetigen Funktion auf D, die gleichmäßig gegen f auf D konvergiert. Dann ist f stetig.*

Beweis. Fixiere einen Punkt x_0 aus D und $\epsilon > 0$. Es gibt ein $N \in \mathbf{N}$ mit $\|f_n - f\|_\infty < \frac{\epsilon}{3}$, falls $n \geq N$. Da f_N stetig, existiert ein $\delta > 0$, so daß $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}$, falls $|x - x_0| < \delta$. Es gilt dann, für $|x - x_0| < \delta$,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \leq \epsilon.$$

■

Konvergenzkriterium von Weierstraß. Sei $f_n : D \to \mathbf{R}$ eine Folge von Funktion auf D mit der Eigenschaft, daß $\sum_n \|f_n\|_\infty < \infty$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_n f_n$ absolut und gleichmäßig gegen eine Funktion f. Daher gilt: Falls jedes f_n stetig ist, dann auch f.
Beweis. Übung.

■

Potenzreihen: Eine Potenzreihe ist eine Funktionenreihe der Gestalt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Um die Schreibweise einfach zu halten, werden wir meistens annehmen, daß $x_0 = 0$. Typische Beispiele sind die Reihen, die wir verwendet haben, um die Exponentialfunktion bzw. sin und cos zu definieren.

Satz 8.6 *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe, die für $x_0 \neq 0$ konvergiert. Dann konvergiert die Reihe absolut für jedes x mit $|x| < |x_0|$. Außerdem konvergiert die Reihe gleichmäßig auf jedem Intervall der Form $[-a, a]$ mit $a < |x_0|$. Damit ist die Funktion*

$$g(x) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n x^n$$

auf $]-|x_0|, |x_0|[$ definiert und stetig.

Beweis. Da $\sum_n a_n x_0^n$ konvergiert, ist die Folge $(a_n x_0^n)$ beschränkt. Sei $K > 0$ so, daß $|a_n x_0^n| \leq K$ für jedes n.
Für die Reihe $\sum a_n x^n$ mit $|x| < |x_0|$, kann man den Term $a_n x^n$ wie folgt abschätzen:

$$|a_n x^n| = \left| a_n \left(\frac{x^n}{x_0^n} \right) x_0^n \right| \leq \left| \frac{x}{x_0} \right|^n K.$$

Damit konvergiert die Reihe absolut (Vergleich mit einer geometrischen Reihe).
Der Beweis der zweiten Behauptung ist ähnlich.

■

Definieren wir

$$R = \sup\{x > 0 : \sum_n a_n x^n \text{ konvergiert}\},$$

so gilt: $\sum_n a_n x^n$ konvergiert für jedes x mit $|x| < R$. Außerdem ist die Konvergenz absolut und gleichmäßig auf jedem Intervall $[-a, a]$ mit $a < R$. Für $|x| > R$ divergiert die Reihe. (Für den Fall $|x| = R$ bekommt man i.A. keine Auskunft).
R heißt der **Konvergenzradius** der Reihe. Aus dem Wurzelkriterium bekommt man die folgende explizite Formel für R:

$$R = \frac{1}{\limsup_n |a_n|^{1/n}}.$$

Beispiele von Potenzreihen: Wir haben schon die Potenzreihendarstellungen von exp, sin und cos kennengelernt. Weitere Beispiele sind:
die binomische Reihe

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (-1 < x < 1, \alpha \in \mathbf{R})$$

bzw. die hyperbolischen Funktionen:

$$\sinh x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

$$\cosh x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!}.$$

Satz 8.7 *Sei (f_n) eine Folge von stetigen Funktion auf $[a, b]$, die gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann gilt:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Beweis. Die Aussage folgt sofort aus der Abschätzung:

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx \right| \le (b-a)\|f - f_n\|_\infty.$$

■

Die oben angeführten Beispiele zeigen, daß eine ähnlich Aussage für punktweise Konvergenz nicht gültig ist.

Satz 8.8 *Sei (f_n) eine Folge von stetig differenzierbaren Funktionen auf $[a, b]$, die punktweise gegen f konvergiert. Weiters sei die Folge (f_n') der Ableitungen gleichmäßig konvergent. Dann gilt: f is (stetig)-differenzierbar und*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Beweis. Wir setzen $g = \lim f'_n$ und fixieren $x \in [a,b]$. Wir haben die Beziehung:

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t)\,dt.$$

Wir lassen n gegen ∞ gehen und bekommen

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt.$$

Da g stetig, gilt:

$$f'(x) = g(x) = \lim_n f'_n(x).$$

■

Beispiel. Das Beispiel

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sin nx$$

zeigt, daß eine Funktionenfolge gleichmäßig konvergieren kann, ohne daß die abgeleiteten Funktionen konvergieren.

Aus diesem Satz folgt:

Korollar 8.9 *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius R. Dann ist die Funktion $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ auf $]-R, R[$ (unendlich oft) differenzierbar und es gilt:*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Beweis. Der Konvergenzradius der Reihe $\sum n a_n x^{n-1}$ stimmt mit dem von $\sum a_n x^n$ überein (warum?)

■

Taylor Entwicklungen: Wir kehren zurück zum Thema der Taylorentwicklungen. Wir erinnern daran, daß eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion auf dem Intervall I die Darstellung

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x)$$

hat, wobei a ein Punkt im Inneren von I ist. Hier hat das Restglied die Gestalt $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-a)^{(n+1)}$. In der Praxis interessiert man sich für Abschätzungen des Restgliedes. Daher ist die folgende Formel für R_{n+1} oft nützlich:

Satz 8.10 *Es gilt:*

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Beweis. Induktionsbeweis:
$n = 1$: Es gilt

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt.$$

$n - 1 \to n$: Es gelte

$$R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt.$$

Mit partieller Integration, sieht man, daß

$$\begin{aligned} R_n(x) &= -f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\Big|_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \\ &= \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \\ &= \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x). \end{aligned}$$

■

Bemerkung. Man sieht sofort, daß das Restglied die Wachstumsbedingung

$$\lim_{x\to a}\frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^n} = 0$$

erfüllt.

Definition 8.11 *Sei $f : I \to \mathbf{R}$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion, $a \in I$. Dann heißt*

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

die **Taylor-Reihe** *von f.*

Zunächst machen wir keine Aussagen, die Konvergenz dieser Reihe betreffend. In der Tat kann passieren

daß die Reihe nicht konvergiert (außer im Punkt a, wo sie ja immer konvergiert);

daß die Reihe konvergiert, aber nicht gegen f.

Beispiele.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

Die Taylor-Reihe dieser Funktion ist die Null-Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} 0.x^n$.

Natürlich ist dieses Beispiel eher pathologisch. “Normalerweise” konvergiert die Taylor-Reihe, und zwar gegen f. Zum Beispiel: Ist eine Funktion als Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ in der Nähe von a defiiniert, dann konvergiert die Taylor-Reihe von f um a gegen f.

Aufgaben

Aufgabe 128. Seien (f_n) und (h_n) gleichmäßig konvergierende Funktionenfolgen. Zeige:

a) Es gilt nicht i.a. daß $f_n g_n$ gleichmäßig konvergent ist;

b) Falls (f_n) und (g_n) zusätzlich gleichmäßig beschränkt sind, dann gilt: $f_n g_n$ konvergiert gleichmäßig.

Aufgabe 129. Sei (f_n) eine Folge von stetigen Funktion auf $[0,1]$, die punktweise gegen f konvergiert. Zeige: Die Konvergenz ist genau dann gleichmäßig, wenn gilt: f ist stetig und (f_n) ist gleichgradig stetig.

Aufgabe 130. Beweise den Satz von Dini: Sei (f_n) eine Folge von stetigen Funktionen auf $[0,1]$, die punktweise gegen eine stetige Funktion f konvergiert. Falls die Folge monoton fallend ist (d.h. $f_{n+1} \leq f_n$ für jedes n), dann ist die Konvergenz gleichmäßig.

Aufgabe 131. Sei (g_n) eine monoton-fallende Folge von Funktionen auf $[a,b]$, die gleichmäßig gegen 0 konvergiert. Zeige: Die Reihe $\sum (-1)^n g_n$ konvergiert gleichmäßig.

Aufgabe 132. Sei (g_n) eine gleichmäßig beschränkte, monoton-fallende Folge von Funktionen auf $[a,b]$, bzw. $\sum f_n$ eine gleichmäßig konvergierende Funktionenreihe. Zeige: Die Reihe $\sum f_n g_n$ konvergiert auch gleichmäßig.

Aufgabe 133. Sei (a_n) eine positive, monoton-fallende Folge. Zeige: Die Reihe $\sum a_n \sin nx$ konvergiert genau dann gleichmäßig auf $\mathbf{R}$, wenn $na_n \to 0$.

Aufgabe 134. Es konvergiere die Reihe $\sum a_n$. Zeige: Die Dirichlet-Reihe $\sum a_n n^{-s}$ konvergiert gleichmäßig auf $[0,\infty[$.

9 Fourier-Reihen

Definition 9.1 *Seien f und g etwa stückweise-stetige Funktionen auf dem Intervall $[a,b]$. Wir definieren das Skalarprodukt $(f|g)$ von f und g wie folgt:*

$$(f|g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

Es gilt (vgl. die Vorlesung "lineare Algebra"):

$$(f|g) = (g|f) \quad (cf|g) = c(f|g) \quad (f_1 + f_2|g) = (f_1|g) + (f_2|g)$$

für Funktionen f, g, f_1, f_2 und reelle Zahlen c.
Außerdem ist $(f|f) > 0$, falls $f \neq 0$. Damit definieren wir

$$\|f\| = \sqrt{(f|f)}.$$

Es gelten dann folgende Ungleichungen:

$$|(f|g)| \leq \|f\|\|g\| \text{ (Cauchy-Schwarz Ungleichung)}$$

und

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \text{ (Minkowski-Ungleichung).}$$

Definition 9.2 *Eine Folge* (ϕ_n) *von stetigen Funktionen auf* $[a, b]$ *heißt* **orthogonal**, *falls gilt:* $(\phi_m|\phi_n) = 0$, *wenn* $m \neq n$. *Die Folge ist* **orthonormal**, *falls zusätzlich:* $\|\phi_n\| = 1$ *für jedes* n.

BEISPIELE. Beispiel Die Folge (ϕ_n) ist orthonormal auf $[0, 2\pi]$, wobei

$$\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \phi_{2n-1}(x) = \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad \phi_{2n}(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Falls (ϕ_n) ein orthonormales System ist und f Riemann-integrierbar ist, dann ist die Reihe

$$\sum_n c_n\phi_n \quad \text{wobei } c_n = (f|\phi_n)$$

die **Fourier-Reihe** von f bezgl. (ϕ_n). Falls (ϕ_n) die Folge der trigonometrischen Funktionen (wie oben) ist, dann sagt man einfach Fourier-Reihe.
Die klassische Fourier-Reihe ist damit

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

wobei $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\, dt$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\, dt$.
Die folgende Aussage motiviert diese Definition:

Satz 9.3 *Falls die Reihe* $\sum_n c_n\phi_n(x)$ *gleichmäßig auf* $[a, b]$ *konvergiert, dann ist die Summe eine stetige Funktion mit Fourier Koeffizienten* (c_n).

BEWEIS. Übung.

■

Satz 9.4 *Sei* (ϕ_n) *orthonormal auf* $[a, b]$ *und sei* f *stetig mit Fourier-Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\phi_n$ *und mit partiellen Summen* s_n. *Setze*

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} b_k\phi_k,$$

wobei $(b_0, \dots, b_n)$ *eine willkürliche Folge von Zahlen ist. Es gilt:*

$$\int_a^b |f(x) - t_n(x)|^2\, dx = \int_a^b |f(x)|^2\, dx - \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=0}^{n} |c_k - b_k|^2.$$

Daher gilt:

$$\int_a^b |f(x) - s_n(x)|^2\, dx \leq \int_a^b |f(x) - t_n(x)|^2\, dx.$$

BEWEIS. Es genügt, den Ausdruck für $\int_a^b |f(x) - t_n(x)|^2\, dx$ zu beweisen. Dazu siehe die Vorlesung “Lineare Algebra”.

■

Satz 9.5 *Seien f, (ϕ_n) und (c_n) wie oben. Dann gilt:*

1)
$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 \, dx \quad \textit{(Besselsche Ungleichung)}$$

und damit konvergiert die Reihe $\sum |c_n|^2$;
2) Es gilt:
$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 \, dx \quad \textit{(Formel von Parseval)}$$

genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f(x) - s_n(x)|^2 \, dx = 0$.

Beweis. Übung

■

Wir sagen, daß das System (ϕ_n) **vollständig** ist, wenn die zweite Bedingung oben gilt. Z.B. ist das trigonometrische System auf $[0, 2\pi]$ vollständig (Beweis unten—siehe auch Vorlesung Analysis III).
Wir untersuchen jetzt die (punktweise) Konvergenz der Fourier-Reihen von stückweise-stetigen Funktionen.
Eine solche Funktion f heißt **stückweise Lipschitz-stetig**, falls die Einschränkung von f auf den Intervallen $]a, a_1[$, $]a_1, a_2[$, $\ldots$ Lipschitz-stetig sind ($a_1, \ldots, a_k$ sind die **Singularitäten** von f).

Satz 9.6 *(Das Lemma von Riemann-Lebesgue.) Sei f Riemann-integrierbar auf $[a, b]$. Dann gilt:*
$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_a^b f(x) \sin(\alpha x + \beta) \, dx = 0$$
für jedes $\beta \in \mathbf{R}$.

Beweis. Schritt 1: Die Aussage gilt, falls f die charakteristische Funktion $\chi_{[a,b]}$ eines Intervalles ist (direkte Komputation).
Schritt 2. Die Aussage gilt, falls f eine Treppenfunktion ist. Dies folgt aus Schritt 1 und der Linearität des Integrals.
Das Ergebnis folgt jetzt aus 1 und 2 mit einem Approximationsargument.

■

Dirichlet-Integrale. Wir untersuchen Integrale der Gestalt
$$\int_0^{\delta} g(x) \frac{\sin \alpha x}{x} \, dx.$$

Satz 9.7 *(Jordan.) Sei g stückweise Lipschitz-stetig auf $[0, \delta]$. Dann gilt:*
$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_0^{\delta} g(x) \frac{\sin \alpha x}{x} \, dx = g(0+).$$

Beweis. Wir schreiben

$$\int_0^\delta g(t)\frac{\sin\alpha t}{t}\,dt = \int_0^h [g(t)-g(0+)]\frac{\sin\alpha t}{t}\,dt + g(0+)\int_0^h \frac{\sin\alpha t}{t}\,dt + \int_h^\delta g(t)\frac{\sin\alpha t}{t}\,dt.$$

Nach dem Lemma von Riemann-Lebesgue konvergiert der dritte Term gegen 0, wenn $\alpha\to\infty$.
Der zweite Term konvergiert gegen

$$\lim_{\alpha\to\infty} g(0+)\int_0^\delta \frac{\sin\alpha t}{t}\,dt = \lim_{\alpha\to\infty} g(0+)\int_0^{h\alpha}\frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}g(0+).$$

Der erste Term konvergiert gegen 0, womit der Satz bewiesen ist.

■

Um diesen Satz anzuwenden, verwenden wir folgende explizite Formel für die partielle Summe

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

der Fourier-reihe von f.
Es gilt nämlich:

$$s_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{2}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus der Formel

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m}\cos kt = \frac{\sin(2n+1)t}{2\sin t}.$$

Wir bezeichnen diese Summe mit $D_n(t)$ (Dirichlet-Kern).

■

Satz 9.8 *Sei f stückweise stetig auf $[0,2\pi]$. Dann gilt: Die Fourier-Reihe von f konvergiert genau dann an der Stelle x, wenn der Limes*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^\delta \frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{2}\frac{\sin(2n+1)t}{t}\,dt$$

für ein $\delta>0$ existiert. In diesem Fall konvergiert $s_n(x)$ gegen diesen Limes.

Daraus folgt leicht:

Satz 9.9 *Sei f stückweise Lipschitz-stetig auf $[0,2\pi]$. Dann konvergiert $s_n(x)$ (punktweise) gegen den Wert $\frac{1}{2}[f(x+)+f(x-)]$.*

Beweis. Wir setzen

$$g(t) = \frac{f(x+2t)-f(x-2t)}{2}$$

auf $[0,\frac{\delta}{2}]$ und verwenden den obigen Satz.

■

Bemerkung. An der Stellen 0 und 2π konvergiert die Fourier-Reihe gegen $\frac{1}{2}[f(0+)+f(2\pi-)]$.

Césaro Summierbarkeit der Fourier-Reihe Das Konvergenzverhalten der Fourier-Reihe wird durch das sogenannte Césaro Verfahren verbessert. Wir definieren

$$\sigma_n(x) = \frac{s_0(x) + \cdots + s_n(x)}{n+1}.$$

Es gilt dann

$$\sigma_n(x) = \frac{2}{(n+1)\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{f(x+2t) + f(x-2t)}{2} \left(\frac{\sin(n+1)t}{\sin t} \right)^2 dt.$$

(Beweis—Übung. Man berechnet die Césaro-Mittel $K_n(t)$ der Dirichlet-Kerne).

Satz 9.10 *(Satz von Fejér.) Sei f stückweise stetig, dann konvergiert $\sigma_n(x)$ für jedes x (und die Summe ist wie oben). Die Folge konvergiert gleichmäßig auf jedem abgeschlossenen Teilintervall von $[0, 2\pi] \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$. Insbesonders konvergiert die Folge gleichmäßig auf $[0, 2\pi]$, falls f eine stetige Erweiterung zu einer päriodischen Funktion auf $\mathbf{R}$ besitzt.*

Es folgt aus diesem Satz, daß das trigonometrischen System auf $[0, 2\pi]$ vollständig ist.

Aufgaben

Aufgabe 135. Sei $\phi(x) = \frac{1}{2^n n!} f_n^{(n)}(x)$, wobei $f_n(x) = (x^2 - 1)^n$. Zeige: (ϕ_n) ist auf $[-1, 1]$ orthogonal. Berechne $\phi_1, \dots, \phi_4$.

Aufgabe 136. Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbf{R}$ gerade. Zeige:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

wobei $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt \, dt$. Was ist das entsprechende Ergebnis, falls f ungerade?

Aufgabe 137. Zeige:

$$x = \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \quad (0 < x < 2\pi)$$

$$\frac{x^2}{2} = \pi x - \frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \quad (0 \le x \le 2\pi).$$

Aufgabe 138. Zeige:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} \quad (0 < x < \pi);$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} \quad (0 \le x \le \pi).$$

Aufgabe 139. Zeige:

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n} \quad (-\pi < x < \pi);$$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2} \quad -\pi \le x \le \pi).$$

Aufgabe 140. Zeige:

$$x^2 = \frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi \sin nx}{n}\right) \quad 0 < x < 2\pi).$$

Aufgabe 141. Zeige:

$$\cos x = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2nx}{4n^2-1} \quad (0 < x < \pi).$$

Was ist der entsprechende Ausdruck für $\sin x$?

Aufgabe 142. Berechne die Fourier-reihen (auf $[-\pi,\pi]$) von $x\cos x$, $x \sin x$.

Aufgabe 143. Berechen die Four-reihen der 2π-periodischen Funktionen $\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|$, $\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|$, $\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$.

Aufgabe 144. Benütze die Formel von Parseval, um folgende Identitäten zu bekommen:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Aufgabe 145. (Gibbsches Phänomen): Sei f die Funktion $2H-1$ (genauer: Die 2π-periodische Erweiterung der Einschränkung dieser Funktion auf $[-\pi,\pi]$). Zeige:

a) $f(x) = \dfrac{4}{\pi}\sum_{n+1\infty}\dfrac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$;

b) $s_n(x) = \dfrac{2}{\pi}\int_0^x \dfrac{\sin 2nt}{\sin t}\,dt$;

c) Die Funktion s_n auf $]0,\pi[$ hat lokale Maxima und Minima an der Stellen $x_m = \frac{1}{2}\frac{m\pi}{n}$ $(m = 1, 2, \ldots, 2n-1)$;

d) $s_n\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ ist ein absolutes Maximum der Funktion;

e) $\lim_{n\to\infty} s_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \dfrac{\sin t}{t}\,dt \sim 1.179.$

10 Anhang

10.1 Die Konstruktion der reellen Zahlen

Wir haben gesehen, daß die Menge $\mathbf{Q}$ der rationalen Zahlen einen geordneten Körper bildet. Wir skizzieren jetzt zwei Methoden, die es erlauben, aus $\mathbf{Q}$ einen vollständig geordneten Körper zu konstruieren.
I. Dedekindsche Schnitte (Motivation: Jede reelle Zahl x erzeugt eine Zerlegung

$$\{y \in \mathbf{Q} : y < x\} \text{ bzw. } \{y \in \mathbf{Q} : y \geq x\}$$

von $\mathbf{Q}$ in zwei disjunkte Mengen).
Wir definieren: ein Dedekindscher Schnitt ist eine Zerlegung $\mathbf{Q} = A \cup B$ von $\mathbf{Q}$, wobei

A und B disjunkt sind und $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$;

falls $x \in A$ und $y \in B$, dann ist $x < y$;

A hat kein grösstes Element.

Wir definieren $\mathbf{R}$ als die Familie der Dedekindschen Schnitte von $\mathbf{Q}$. Man kann dann zeigen, daß das soeben definierte $\mathbf{R}$ die gewünschte Eigenschaften hat.
Cauchy-Folgen: (Motivation: Jede reelle Zahl ist der Grenzwert einer (Cauchy)-Folge aus $\mathbf{Q}$). Man betrachtet die Familie $\mathcal{Q}$, deren Elemente Cauchy-Folgen aus $\mathbf{Q}$ sind. Darauf definiert man eine Äquivalenzrelation $\sim$ wie folgt:

$$(r_n) \sim (s_n) \iff r_n - s_n \to 0.$$

$\mathbf{R}$ ist die Familie aller Äquivalenzklassen d.h. $\mathcal{Q}|_\sim$.
Wir bemerken, daß es zweckmäßiger ist, diese Konstruktionen zunächst auf $\mathbf{Q}_+$ anzuwenden (und damit $\mathbf{R}_+$ zu konstruieren). Es ist dann leichter, die arithmetische Eigenschaften nachzuprüfen. Die Konstruktion von $\mathbf{R}$ aus $\mathbf{R}_+$ ist dann völlig analog dem Übergang $\mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ und bringt keine weiteren Schwierigkeiten mit sich.
Wir beenden diesen Anhang mit dem Cantorschen Beweis, daß $\mathbf{R}$ überabzählbar ist. Dazu verwenden wir die Tatsache, daß jede reelle Zahl x zwischen 0 und 1 eine Dezimalentwicklung $0, a_1 a_2 \dots$ hat. Wir verwenden einen Widerspruchsbeweis d.h. wir nehmen an, daß die Zahlen aus $]0, 1[$ abzählbar sind. Wir können sie damit wie folgt auflisten:

$$\begin{aligned} r_1 &= 0, a_1^1 a_2^1 a_2^1 \dots \\ r_2 &= 0, a_1^2 a_2^2 a_2^2 \dots \\ r_3 &= 0, a_1^3 a_2^3 a_2^3 \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

(um Zweideutigkeit zu vermeiden, verwenden wir keine Entwicklungen, die mit $99999\dots$ enden). Es ist dann leicht, ein Element $0, b_1^1 b_2^2 b_3^3 \dots$ zu konstruieren, das nicht auf der Liste steht, indem man die Diagonale $a_1^1 a_2^2 a_3^3 \dots$ entlanggeht und jede Zahl entsprechend abändert.

10.2 Logik

10.2.1 Grundbegriffe der Logik

Wir stellen im folgenden einige Begriffe der Logik zusammen, die notwendig sind, um eine gewisse Abklärung und Normierung des Gebrauchs der Umgangssprache sowie eine Stilisierung der Schreibweise mathematischer Sätze zu erreichen.

Aussagenlogik: Wir verstehen unter einer Aussage ein (schrift-) sprachliches Gebilde, für welches es einen Sinn hat, zu fragen, ob es wahr oder falsch ist. Eine Aussage soll stets entweder wahr oder falsch (jedoch nichts Drittes, insbesondere nicht wahr und falsch zugleich) sein (zweitwertige Logik). Es spielt dabei keine Rolle, ob wir tatsächlich festellen könne, ob eine Aussage wahr oder falsch ist.
Symbole für Aussagen: $A, B, C, \ldots$ oder $p, q, r, \ldots$

Definition 10.1 *A, B seien Aussagen. Dann definieren wir den Wahrheitswert $|A|$ von A wie folgt:*
$|A| = W$ $:\Leftrightarrow$ A ist wahr,
$|A| = F$ $:\Leftrightarrow$ A ist falsch,
$A \equiv B$ (oder $|A| = |B|$) $:\Leftrightarrow$ A und B haben denselben Wahrheitswert.

Beispiele für Aussagen:
“Paris liegt in Frankreich”, “4 ist eine Primzahl” sind Aussagen. Keine Aussagen sind: “Wie spät ist es?”, “Komm her!”.
Die “Aussagenlogik” gestattet, aus gegebenen Aussagen A, B neue Aussagen zu bilden, nämlich:
$\neg A$, (lies “nicht A”), die **Negation** von A,
$A \wedge B$, (lies “A und B”), die **Konjunktion** von A und B,
$A \vee B$, (lies “A oder B”), die **Disjunktion** von A und B,
$A \Rightarrow B$, (lies “wenn A so B” oder “A impliziert B”), die **Implikation** von A auf B,
$A \Leftrightarrow B$, (lies “A genau dann, wenn B” oder “A äquivalent B”), die **Äquivalenz** von A und B.
Diese Aussagen sind definiert durch die folgende “**Wahrheitstafel**” (das ist eine Tabelle, in der der Wahrheitswert von Aussagen angegeben wird):

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	W	F	W	W	W	W
W	F	F	F	W	F	F
F	W	W	F	W	W	F
F	F	W	F	F	W	W

Zusätze:

Wie die Tabelle zeigt, ist $A \vee B$ genau dann wahr, wenn wenigstens eine der beiden Aussagen A, B wahr ist, die Disjunktion “$\vee$” entspricht also dem nichtausschließenden “oder”.

Bei der Implikation “$A \Rightarrow B$” nennt man A die **Prämisse**, B die **Konklusion**. Die Implikation ist definitionsgemäß genau dann falsch (siehe Wahrheitstafel), wenn A wahr und B falsch ist. Im Sinne der Aussagenlogik ist demnach der in der Umgangssprache als Unsinn empfundene Satz “Wenn der Schnee grün ist, dann ist Paris die Hauptstadt von England” eine wahre Aussage.

Vereinbarung:
Um Klammern zu sparen, vereinbart man:
“$\neg$” bindet stärker als “$\wedge$”, “$\vee$”, “$\Rightarrow$”, “$\Leftrightarrow$”;
“$\wedge$”, “$\vee$” binden stärker als “$\Rightarrow$”, “$\Leftrightarrow$”.
Wir schreiben demnach z.B.
$\neg A \wedge B$ statt $(\neg A) \wedge B$ oder $A \wedge B \Rightarrow C$ statt $(A \wedge B) \Rightarrow C$.

Definition 10.2 *Eine Verknüpfung von Aussagen $A, B, C, \dots$, die unabhängig von den Wahrheitswerten von $A, B, C, \dots$ stets wahr (falsch) ist, heißt* **Tautologie** *(***Kontradiktion***).*

Regeln des logischen Schließens

Satz 10.3 *A, B, C seien beliebige Aussagen, T sei eine Tautologie und K eine Kontradiktion, dann gilt:*

a) $\neg(\neg A) \equiv A$

b) $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$ *(De MORGANsche Regel)*

c) $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ *(De MORGANsche Regel)*

d) $A \Rightarrow B \equiv \neg(A \wedge \neg B)$

e) $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$ *(Kontrapositionsregel)*

f) $A \Rightarrow B \equiv A \wedge \neg B \Rightarrow K$ *(reductio ad absurdum)*

g) $A \Rightarrow B \equiv (A \wedge \neg B \Rightarrow C) \wedge (A \wedge \neg B \Rightarrow \neg C)$ *(reductio ad absurdum)*

h) $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C) \equiv T$

i) $A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

j) $(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B \equiv T$

k) $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ *(Distributivgesetze)*

l) $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ *(Distributivgesetze)*

m) $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C) \quad (=: A \vee B \vee C)$ *(Assoziativgesetze)*

n) $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C) \quad (=: A \wedge B \wedge C)$ *(Assoziativgesetze)*

Bemerkung.

Die Beziehungen des voranstehenden Satzes beweist man mit Hilfe von Wahrheitstafeln.

Die in voranstehendem Satz zusammengestellten Beziehungen heißen **Regeln des logischen Schließens**; sie werden beim Beweis mathematischer Sätze benutzt.

Aussageformen und Quantoren:

Definition 10.4 *Eine* **einstellige Aussageform** $A(\ldots)$ *ist ein sprachlicher Ausdruck mit einer "Leerstelle" und einer Klasse M von Objekten, sodaß gilt: Durch Einsetzen eines Objektes a aus der Klasse M entsteht eine Aussage $A(a)$. (Statt der Leerstelle kann auch ein Buchstabe als Platzhaltersymbol stehen.)*
Mit Hilfe einer einstelligen Aussageform bildet man die Aussagen

$$\bigwedge_{a\in M} A(a) \quad \textit{(Generalisierung)}$$

$$\bigvee_{a\in M} A(a) \quad \textit{(Partikularisierung)},$$

deren Wahrheitswert definiert ist durch

a) $$\left|\bigwedge_{a\in M} A(a)\right| = W :\Leftrightarrow \text{ für alle } a\in M \text{ ist } A(a) \text{ wahr}$$

b) $$\left|\bigvee_{a\in M} A(a)\right| = W :\Leftrightarrow \text{ es existiert ein } a\in M, \text{ so daß } A(a) \text{ wahr ist.}$$

Bemerkung.

"$\bigwedge$" heißt **Allquantor** (A ohne Querstrich, Gedächtnisstütze!),

"$\bigvee$" heißt **Existenzquantor**. Falls kein Mißverständnis möglich ist hinsichtlich der zugrundeliegenden Klasse von Objekten, schreibt man einfach $\bigwedge_a A(A)$ und $\bigvee_a A(a)$ statt $\bigwedge_{a\in M} A(a)$ und $\bigvee_{a\in M} A(a)$.

Ist $A(\ldots)$ eine einstellige Aussageform mit der Leermenge als zugehöriger Klasse von Objekten, dann definiert man

$$\bigwedge_{a\in\emptyset} A(a) \quad \text{ist eine Tautologie und}$$

$$\bigvee_{a\in\emptyset} A(a) \quad \text{ist eine Kontradiktion.}$$

Satz 10.5 *Sei B eine Aussage, $A(\ldots)$ eine Aussageform, dann gilt:*

a) $\neg(\bigwedge_a A(A)) \equiv \bigvee_a(\neg A(a))$ *(De MORGANsche Regeln)*

b) $\neg(\bigvee_a A(a)) \equiv \bigwedge_a(\neg A(a))$ *(De MORGANsche Regeln)*

c) $B \wedge (\bigwedge_a A(a)) \equiv \bigwedge_a(B \wedge A(a))$

d) $B \vee (\bigwedge_a A(a)) \equiv \bigwedge_a(B \vee A(a))$

e) $B \vee (\bigvee_a A(a)) \equiv \bigvee_a(B \vee A(a))$

f) $(B \Rightarrow \bigwedge_a A(a)) \equiv \bigwedge_a(B \Rightarrow A(a))$

g) $(B \Rightarrow \bigvee_a A(a)) \equiv \bigvee_a (B \Rightarrow A(a))$

h) $[(\bigwedge_a A(a)) \Rightarrow B] \equiv \bigvee_a (A(a) \Rightarrow B)$

i) $[(\bigvee_a A(a)) \Rightarrow B] \equiv \bigwedge_a A(a) \Rightarrow b)$

Definition 10.6 *Eine* **zweistellige Aussageform** $A(\ldots', \ldots'')$ *ist ein sprachlicher Ausdruck mit einer "ein-gestrichenen" und einer "zwei-gestrichenen" Leerstelle zusammen mit zwei Klassen M' und M'' von Objekten, sodaß folgende zwei Bedingungen gelten:*

1. *Durch Einsetzen eines Objektes a aus M' in die eingestichene Leerstelle von $A(\ldots', \ldots'')$ einsteht eine einstellige Aussageform $A(a, \ldots'')$, deren Leerstelle die zweigestrichene Leerstelle von $A(\ldots', \ldots'')$ ist und deren Eisetzungsklasse M'' ist.*
2. *Durch Einsetzen eines Objektes b aus M'' in die zwei-gestrichenen Leerstelle von $A(\ldots', \ldots'')$ entsteht eine einstellige Aussageform $A(\ldots', b)$, deren Leerstelle die eingestrichene Leerstelle von $A(\ldots', \ldots'')$ ist, und deren Einsetzungsklasse M' ist.*

Bemerkung. Drei- und mehrstellige Aussageformen werden analog der voranstehenden Definition erklärt.
Mit einer zweistelligen Aussageform lassen sich durch Kombination von Generalisiertung und Partikularisierung folgende 8 Aussagen bilden:

$$\bigwedge_a \bigwedge_b A(a,b), \quad \bigwedge_b \bigwedge_a A(a,b), \quad \bigwedge_a \bigvee_b A(a,b), \quad \bigvee_b \bigwedge_a A(a,b),$$

$$\bigvee_a \bigwedge_b A(a,b), \quad \bigwedge_b \bigvee_a A(a,b), \quad \bigvee_a \bigvee_b A(a,b), \quad \bigvee_b \bigvee_a A(a,b).$$

Dabei ist z.B. die Aussage $\bigvee_a \bigwedge_b A(a,b)$ genau dann wahr, wenn es mindestens ein Objekt a der Klasse M' gibt, sodaß für alle Objekte der Klasse M'' die Aussage $A(a,b)$ wahr ist.
Für eine zweistellige Aussageform gelten folgende Beziehungen:

α)
$$\bigwedge_a \bigwedge_b A(a,b) \equiv \bigwedge_b \bigwedge_a A(a,b)$$

β)
$$\bigvee_a \bigvee_b A(a,b) \equiv \bigvee_b \bigvee_a A(a,b)$$

γ)
$$\neg \left(\bigwedge_a \bigwedge_b A(a,b) \right) \equiv \bigvee_a \bigvee_b \neg A(a,b)$$

δ)
$$\neg \left(\bigwedge_a \bigvee_b A(a,b) \right) \equiv \bigvee_a \bigwedge_b \neg A(a,b)$$

Ist $A(\ldots', \ldots'')$ eine zweistellige Aussageform, für die die erste und zweite Einsetzugsklasse miteinander übereinstimmen ($M' = M'' := M$), dann schreibt man:

$$\bigwedge_{a,b \in M} A(a,b) \text{ statt } \bigwedge_{a \in M} \bigwedge_{b \in M} A(a,b)$$

und

$$\bigvee_{a,b\in M} \text{ statt } \bigvee_{a\in M}\bigvee_{b\in M} A(a,b).$$

Vorsicht:

$$\bigvee_{a}\bigwedge_{b} A(a,b) \text{ und } \bigwedge_{b}\bigvee_{a} A(a,b)$$

sind im allgemeinen nicht wahrheitsgleich!

Beispiele. Wir setzen einige der Definitionen bzw. Aussagen der Vorlesung mit Hilfe dieser Schreibweise um:
Die Folge (x_n) konvergiert gegen x: $\bigwedge_{\epsilon>0}\bigvee_{N\in\mathbf{N}}\bigwedge_{n\geq N}|x_n-x|\leq\epsilon$.
Die Folge (f_n) konvergiert punktweise auf $[a,b]$ gegen f:

$$\bigwedge_{\epsilon>0}\bigwedge_{x\in[a,b]}\bigvee_{N\in\mathbf{N}}\bigwedge_{n\geq N}|f_n(x)-f(x)|\leq\epsilon.$$

Die Folge (f_n) konvergiert gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen f:

$$\bigwedge_{\epsilon>0}\bigvee_{N\in\mathbf{N}}\bigwedge_{x\in[a,b]}\bigwedge_{n\geq N}|f_n(x)-f(x)|\leq\epsilon.$$

Das Prinzip der mathematischen Induktion:

$$\left[A(1)\wedge\left(\bigwedge_{n\in\mathbf{N}}A(n)\Rightarrow A(n+1)\right)\right]\Rightarrow\bigwedge_{n\in\mathbf{N}}A(n).$$

11 Übungsaufgaben mit Lösungsvorschlägen

Es folgt eine Liste von Übungsbeispielen, die nach Themen gegliedert sind. Die numerierten Beispiele sind Routine, die buchstabierten dagegen zum Teil eher anspruchsvoll.
(Bemerkung: Einige dieser Beispiele sind auch im Text integriert.)
Zum Schluß finden sich einige ausgewählte Lösungshinweise.

11.1 Übungsaufgaben

11.1.1 Thema—Funktionen

1. Sei $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$, $g(t)=\dfrac{|t-2|}{t+1}$, $h(u)=u^3-1$.

   Berechne $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(-2)$,$f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f(\sqrt{2})$

   (Das gleiche für g und h.)

2. Berechne $h(a)$, $h\left(\frac{1}{a}\right)$, $h(a+1)$, $2h(2a)$ (h wie in **1.**).

3. Zeichne den Graph einer "typischenFunktion f auf dem Intervall $[0,5]$. Wähle zwei Punkte x_1, x_2 und zeichne die Punkte

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right),\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right).$$

Was bedeutet geometrisch die Bedingung: $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2} = f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ bzw. $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ bzw. $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$? Wie schaut der Graph der Funktion aus, wenn gilt: $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2} = f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ bzw. $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ bzw. $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$, für jedes Paar x_1, x_2?

4. Funktionen einer Funktion (Zusammensetzung oder Verknüpfungen zwei Funktionen): Bestimme y als Funktion von x, wenn

   $y = z^2$, $z = x+1$; $y = \sqrt{z+1}$, $z = \tan^2(x)$,

   (bzw. u als Funktion von w, wenn

   $u = v^2, v = w+1$; $u = \tanh v, v = \sqrt{w-1}$).

5. Sei $f(x) = x^3 - x$, $\phi(x) = \sin 2x$. Bestimme $f\left(\phi\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$, $\phi(f(1))$. Gilt $f(\phi(x)) = \phi(f(x))$?

6. (Implizite Funktionen). Bestimme y als Funktion von x, wenn gilt:

   $x^2 + y^2 = 1$; $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; $x^3 + y^3 = a^3$,

   (bzw. u als Funktion von v, wenn gilt:

   $u^2 + v^2 = 1$; $uv = 3$; $u^2 + uv + 1 = 0$).

7. Bestimme den natürlichen Definitionsbereich der Funktionen:

   $y = 1 - \ln x$; $y = \ln(x+3)$; $y = \sqrt{5-2x}$; $y = \frac{x}{x^2-3x+2}$; $y = 1 - \sqrt{1-x^2}$.

8. Eine Funktion f auf $\mathbf{R}$ ist gerade, wenn $f(t) = f(-t)$, ungerade, wenn $f(t) = -f(-t)$. Was bedeutet das geometrisch? (Zeichne den Graph einer "typischen" geraden bzw. ungeraden Funktion.)

   Welche der folgenden Funktionen sind gerade bzw. ungerade?

   $y = x^4 - 2x^2$; $u = t - t^2$; $z = 2^x$; $y = \cos x$; $y = \sin x$; $y = \sin x - \cos x$; $y = \tan x$.

9. Die Funktion e^x erfüllt die Gleichung

   $e^{x+y} = e^x.e^y$. Wir definieren:

   $\cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $\sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

   Zeige:

   $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$;

   $(\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$;

   $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y)$.

10. Jetzt definieren wir:

    $\cos x := \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$, $\sin x := \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$.

    Zeige:

    $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$;

    $(\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$;

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$).

(Hinweis: i ist die Quadratwurzel von -1. Man rechnet damit genau wie man mit Buchstaben rechnet, mit der zusätzlicher Information, dass $i^2 = -1$).

Zusätzliche Aufgaben

A. Berechne $f(0)$, $f(1)$ $f(2)$, $f(-2)$,$f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f(\sqrt{2})$
für $f(x) = 7x^3 - 2x + 1$, $f(t) = \sinh 7t^2$, $f(\epsilon) = \epsilon^2 2\epsilon + 1$.

B. Untersuche (mit Taschenrechner, Mathematica usw.) die geometrische Gestalt (Nullstellen, Maxima, Minima usw.) der folgenden Funktionen:
e^x; $\ln x$; $\sin x$; $\cos x$; $\tan x$; $\sinh x$; $\cosh x$; $\tanh x$; $x^2 + 3x + 4$; $\frac{1}{x^2+2x+3}$; $|x^2 - 1|$; $|x+1| + |x-1|$; $|x+1| - |x-1|$; $\frac{x-1}{x-2}$; $\frac{x-1}{x-2}$; $\frac{x-1}{x-2}$; $\frac{x-1}{x-2}$; $\frac{x-1}{x-2}$; 2^x; 2^{-x^2}; $x^2 + 2^x$.

C. Sei $\phi(t) = t^2 + 1$. Berechne $\phi(t^2)$, $(\phi(t))^2$.

D. Wie **4.** mit
$y = z^2$, $z = \sqrt{x+1}$; $s = \sqrt{t}$; $t = u^3 - 27$; $\epsilon = \eta^3 - \eta^2$, $\eta = \frac{1}{\gamma}$.

E. Wie **6.** mit
$xy = C$; $2^{xy} = 5$; $\ln x + \ln(y+1) = 4$; $2^{x+y}(x^2 - 2) = x^3 + 7$.

F. Wie **7.** mit
$y = \arcsin(x-2)$; $y = \arccos(1-2x)$; $y = \ln \sin x$; $y = \ln_x 2$; $y = (x^2 + x + 1)^{-3/2}$.

G. Was ist $f \circ g$, wobei $g : x \mapsto \sin \frac{x}{2}$
$f : y \mapsto 2y\sqrt{1-y^2}$?

H. Falls $\phi(x) = \frac{x-1}{x+1}$, zeige: $\frac{\phi(x)-\phi(y)}{1+\phi(x)\phi(y)} = \frac{x-y}{1+xy}$.

I. Falls $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$, zeige: $f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$.

J. Falls $f(x+y) = f(x) + f(y)$, zeige:

a) $f(0) = 0$

b) $f(nx) = nf(x) \quad (n \in \mathbf{Z})$

c) $f(rx) = rf(x) \quad (r \in \mathbf{Q})$.

K. Zeige: $\sin(-x) = -\sin x$

$\cos(-x) = \cos x$

$\sin(x+\pi) = -\sin x$

$\cos(x+\pi) = ?$

$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$

$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$

$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\cos 3x = \cos^3 x - 3\sin^2 x \cos x$

$\sin 3x = 3\sin x \cos^2 x - \sin^3 x$

$\cos 4x = ?$

$\sin 4x = ?$

L. $\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$\cos A - \cos B = ?$

M. $\sinh(x+y) = ?$

$\cosh(x+y) = ?$

N. $\mathrm{arcsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, $\mathrm{arccosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$

O. Zeige: $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$, $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$, $\tan\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$.

(Hinweis: $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.)

11.1.2 Thema—Differentiation

Wir verwenden die folgenden Tatsachen:

$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$, $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$, $\frac{d}{dx}e^x = e^x$, $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$, $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

$(fg)' = f'.g + f.g'$, $(1/f)' = \frac{-f'}{f^2}$, $(f\circ g)' = f'\circ g.g'$, („$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$").

11. Differenziere die folgenden Funktionen:

$y = (x^2-3x+3)(x^2+2x-1)$;

$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$;

$u = 3t^2 + 27t - 2$;

$v = \frac{(s+4)^2}{s+3}$;

$y = x\arcsin x$;

$y = \ln\sin\sqrt{e^{3x}}$.

12. Differenziere die Funktionen:

$y = \cos^n x \sin nx$;

$y = \sin^n x \cos nx$;

$y = \cosh^n x \sinh nx$;

$y = \sinh^n x \cos nx$.

13. Zeige: Folgende Funktionen sind Lösungen der entsprechenden Diffentialgleichungen:

$y = \sin x : y'' + y = 0$;

$y = \sin\omega x : y'' + \omega^2 y = 0$;

$y = e^{nx}$ bzw. e^{-nx} bzw. $\cos nx$ bzw. $\sin nx : \frac{d^4y}{dx^4} = n^4 y$.

14. Berechne $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ usw. wobei

    $u(x,y) = x + y;$

    $u(x,y) = xy;$

    $u(x,y) = x^2 + y^2;$

    $u(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2};$

    $u(x,y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^a}.$

15. Zeige: folgende Funktionen zweier Variablen sind Lösungen der entsprechenden partiellen Differentialgleichungen:

$$u_n(x,t) = \exp(-n^2\pi^2 t)\cos n\pi x : \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

$$u_n(x,y) = \cos nx \sinh ny : \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$u(x,y,z) = \sin mx \cos ny \exp(-z\sqrt{m^2+n^2}) : \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

16. Sei $p > 1$, $y > 0$. Bestimme das Minimum der Funktion:
    $x \mapsto \frac{x^p}{p} - xy$ $(x > 0)$. (Hinweis: Bestimme die geometrische Gestalt der Kurve (Mathematica, Taschenrechner) und berechne die Stelle, wo die Ableitung verschwindet).

17. Sei $F(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-isx}dx.$
    Was ist $F'(s)$?

18. Sei $F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt.$
    Was ist $F'(p)$?

19. Differenziere: $\cos^2 x$, $\sin^2 x$. Zeige: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Was sind die Ableitungen von $\tan x$, $\cot x$ usw.?

20. Bestimme die entsprechenden Formel für die Ableitungen der hyperbolischen Funktionen $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$ usw.

Zusätzliche Aufgaben

A. Wie **1.** mit

   $u = (t^2 - 3t + 3)(t^2 + 2t - 1)$

   $\epsilon = \eta^3 + 6\eta - 27.$

B. Wie **3.** für

   $y = \sin(n \arcsin x) : (1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$

   $y = e^{\alpha \arcsin x} : (1 - x^2)y'' - xy' - \alpha^2 y = 0.$

C. Berechne $\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$, wobei $f(x,y) = x^2 - y^2$; $e^x \cos \pi y$; $xy^2 + x^3y$ bzw.
$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$, wobei $f(x,y,z) = x^2e^{-yz}$ bzw. $x^2y^2 + y + 1$ bzw. $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

D. Zeige: die Kurvenschar $y = cx$ ist die Lösung der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ bzw. $x^2 + 2ax + y^2 + 2by = 0$ der Gleichung $(x^2+y^2)y'' - 2xy'^2 + 2yy'^2 - 2xy' + 2y = 0$.
(Bild!!)

E. Bestimme die Differentialgleichungen der Kurvenscharen:
$y = cx$
$y = cx + \sqrt{1+c^2}$
$(1+x)^2(1+y)^2 = cx^2$
$y^2 - 2cx - c^2 = 0$
$y = (cx + \ln x + 1)^{-1}$
$y = cx^2 + \frac{b}{x}$
$(x-a)^2 + y^2 = r^2$
$y = ae^{2x} + be^{-2x} + ce^x$
$ax^2 + by^2 = 1$.

F. Zeige:
$\sin A \cos B = \frac{1}{2}(\sin(A+B) + \sin(A-B))$
$\sin A \sin B = \quad ?$
$\cos A \cos B = \quad ?$

G. Aus $y = \cos x \Leftrightarrow x = \arccos y$ und die "Formel" $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ (für eine genauere Behandlung siehe Kap. V, Seite 31 des Skriptums) zeige: $\frac{d}{dy} \arccos y = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$, ($\frac{d}{dy} \arcsin y = \quad ?$, $\frac{d}{dy} \arctan y = \quad ?$).

H. $\frac{d}{dx}\operatorname{arcsinh} x = \quad ?$, $\frac{d}{dx}\operatorname{arccosh} = \quad ?$, $\frac{d}{dx}\operatorname{arctanh} x = \quad ?$

I. Sei $x = e^z$. Bestimme die Differentialgleichung von y als Funktion von z, falls $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$.

J. Falls $y = \phi(z)$, zeige $\frac{d^2y}{dx^2} = \phi''(z)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \phi'(z)\frac{d^2z}{dx^2}$.

K. Es gelte: $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0$. Setze: $x = \cos t$. Was ist die entsprechende Gleichung für y als Funktion von t?

L. Falls $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = 0$ und $x = \frac{1}{t}$, bestimme die Differentialgleichung für y als Funktion von t.

M. Falls $\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$, bestimme die Differentialgleichung für x als Funktion von y.

N. Sei $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Zeige: $\Delta f = 0$.

O. Sei $f(x,y) = r^n \cos n\theta$
$g(x,y) = r^n \sin n\theta$.
Zeige: $\Delta f = \Delta g = 0$ ($r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \arctan \frac{y}{x}$).

P. Zeige: $\frac{d^2}{dx^2}(uv) = u\frac{d^2v}{dx^2} + 2\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + v\frac{d^2u}{dx^2}$
($\frac{d^3}{dx^3}(uv) = \quad ?$,
$\frac{d^2}{dx^2}(uvw) = \quad ?$
$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{u}{v}\right) = \quad ?$).

Q. Zeige, daß folgende Funktionen Lösungen der entsprechenden Differentialgleichung sind:
$y = e^x \sin x$; $y'' - 2y' + 2y = 0$
$y = x \sin x$; $x^2y'' - 2xy' + (x^2+2)y = 0$
$y = ax^{n+1} + bx^{-n}$; $x^2y'' = n(n+1)y$
$y = (\arcsin x)^2$; $(1-x^2)y^n - xy' = 2$
$y = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$; $y' = 1-y^2$

R. Zeige: $\frac{dx^2}{dy^2} = \frac{-\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}$.

S. Was bedeuten geometrisch die Bedingungen $\frac{dy}{dx} > 0$, $\frac{dy}{dx} < 0$, $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$, $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$?
(Hinweis: Zeichne $y = x, x^2, x^3, \ldots$ und bestimme die Regionen, wo die Ungleichungen gültig sind.)

T. (die Kettenregel): Bestimme $\frac{dy}{dx}$, wobei $y = 3u^2 - 1$, $u = 3x^2 + 1$
$y = 3u^2 - 4u - 15$, $u = 2x^3 - 5$
$y = \frac{1}{u}$, $u = 5x^2 - 2x + 4$
$y = 3z^2 + \frac{1}{3z^2}$, $z = \frac{x^2}{3} + \frac{3}{x^4}$.

U. Berechne die Formel für $\frac{d}{dx}f(x^n)$, $\frac{d}{dx}f(x)^n$, $\frac{d}{dx}\cos f(x)$, $\frac{d}{dx}f(\cos x)$.

11.1.3 Thema—Integration

Wir verwenden:
$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, falls F eine Stammfunktion von f, d.h. $F' = f$
$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)$ (F eine Stammfunktion von f) (partielle Integration).
$\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ($n \neq -1$)
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x$
$\int \cos x\,dx = \sin x$, $\int \sin x\,dx = -\cos x$
$\int e^x\,dx = e^x$.

21. Was sind die Stammfunktionen von $\cosh x$ bzw. $\sinh x$?
(Hinweis: Benutze die Formel: $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ usw.)

22. Aus den Formeln: $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$, $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ leite die Formel für $\int \cos x\, dx$ und $\int \sin x\, dx$ ab.

23. $\int \ln x\, dx$.
(Hinweis: partielle Integration — $1 \cdot \ln x$.)

24. Sei $I_n = \int_0^\infty t^n e^{-at}\, dt$. Zeige:
a) $I_0 = \frac{1}{a}$
b) $I_n = \frac{n}{a} \cdot I_{n-1}$
c) Berechne: I_1, I_2, I_3.

25. $\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)\, dx$

26. $\int \frac{dx}{(2x-3)^2}$

27. $\int x \sin 2x\, dx$

28. $\int x^n \ln x\, dx$

29. Berechne: $\int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx\, dx$
$\int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx\, dx$

30. $\int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx\, dx$
(Hinweis: $\sin A \cos B = \frac{1}{2}(\sin(A+B) + \sin(A-B))$ usw.)

Zusätzliche Aufgaben

Bemerkung: Einige Beispiele verwenden die Substitutionsregel: $\int f(u(x))u'(x)\, dx = \int f(u) du$.

A. Zeige: $\int_0^\infty t^n e^{-at} dt = \frac{n!}{a^{n+1}}$

B. $\int_0^\infty t^{2n-1} e^{-at^2} dt = \frac{n!}{2a^{n+1}}$
(Hinweis: Substitution: $u = t^2$ – dann wie **4.** oder **A.**.)

C. $\int_0^\infty t^{2n} e^{-at^2} dt = \frac{1\cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^{n+1} a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$
(Hinweis: wie **B.** Benutze die Formel: $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.)

D. $F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i x s}\, dx$ ist die Fouriertransformation von F. Was ist die Fouriertransformation von f'? (Hinweis: Partielle Integration.)

E. Das gleiche für die Laplacetransformation $F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$.

F. Berechne: $\int_0^1 (\ln x)^2\, dx$.

G. Berechne: $I_\alpha = \int x^\alpha (\ln x)^2\, dx$. (Hinweis: Berechne $\frac{dI_\alpha}{d\alpha}$.)

H. Berechne: $\int_0^\pi \frac{dx}{a - \cos x}$ $\left(= \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}\right)$.

I. Zeige: $\int_0^\pi \frac{dx}{(5-\cos x)^2} = \frac{5\sqrt{6}\pi}{288}$
$\int_0^\pi \frac{dx}{(6-4\cos x)^3} = \frac{11\sqrt{5}\pi}{1000}$.

J. Sei $A = \int e^{ax}\cos x\,dx$, $B = \int e^{ax}\sin x\,dx$.
1) Zeige: (Partielle Integration) $A = \frac{1}{a}e^{ax}\cos x + \frac{1}{a}B$, $B = \frac{1}{a}e^{ax}\sin x - \frac{1}{a}A$.
2) Berechne: $\int e^{ax}\cos x\,dx$, $\int e^{ax}\sin x\,dx$.
3) Berechne: $\int e^{ax}\cos bx\,dx$, $\int e^{ax}\sin bx\,dx$.
4) Zeige: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\cos x\,dx = \frac{e^{\frac{a\pi}{2}}-a}{a^2+1}$.

K. Zeige: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n e^{ax}\cos x\,dx = \frac{d^n}{da^n}\left(\frac{e^{\frac{\pi}{2}}-a}{a^2+1}\right)$.

L. Berechne: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xe^{ax}\cos x\,dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2e^{ax}\cos x\,dx$ usw.

M. Berechne: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{(a+i)x}\,dx$.

N. $\int \arctan x\,dx$. (Hinweis: partielle Integration).

O. Setze $I_n = \int \sin^n x\,dx$.
Zeige: $I_n = -\frac{1}{n}\cos x\sin^{n-1}x + \frac{n-1}{n}I_{n-2}$.
Berechne: I_0, I_1, I_2, I_3, I_4.

P. Setze $J_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$.
Zeige: $J_{n+1} = \frac{1}{2n}\frac{x}{(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}J_n$.
Berechne: J_1, J_2, J_3, ...

11.1.4 Thema—Fourierreihen

(Benutze: $\cos n\pi = (-1)^n$, $\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi = 0$, $\sin n\pi = 0$, $\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi = (-1)^n$.
Die Fourierreihe von f auf $[-\pi,\pi]$ ist $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$ mit $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$.
Die Fouriercosinusreihe (bzw. Fouriersinusreihe) von f auf $[0,\pi]$ ist $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^\infty a_n\cos nx$ (bzw. $\sum_{n=1}^\infty b_n\sin nx$), wobei $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx$, $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx$.)

31. Zeige: Die Fouriersinusreihe der konstanten Funktion 1 auf $[0,\pi]$ ist

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \dots\right).$$

32. Die Fouriersinusreihe der Funktion $f(x) = x$ auf $[0,1]$ ist

$$\frac{2}{\pi}\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\pi x.$$

33 & 34. Die Fourierreihe der Funktion $f(x) = 0$ ($x \in [-\pi,0]$), $f(x) = x$ ($x \in [0,\pi]$) ist

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^\infty\left[\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}\cos nx - \frac{(-1)^n}{n}\sin nx\right].$$

35. Die Fouriercosinusreihe der Funktion $f(x) = x^2$ auf $[0, \pi]$ ist

$$\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}.$$

36.&37. Die Fourierreihe der Funktion e^x aus $[-\pi, \pi]$ ist

$$\frac{2 \sinh \pi}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} (\cos nx - n \sin nx) \right].$$

(Hinweis: Bsp. J, Bl. 2)

38. Bestimme die Fourierreihe der Funktion f auf $[-\pi, \pi]$, wobei

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (x \in [-\pi, 0[) \\ 1 & (x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

39. Bestimme die Fourierreihe der Funktion f auf $[-\pi, \pi]$, wobei

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}.$$

40. Bestimme die Fouriercosinusreihe dieser Funktion auf $[0, \pi]$.

Zusätzliche Aufgaben

A. Bestimme die Fourierreihe der Funktion f auf $[-\pi, \pi]$, wobei $f(x) = x^3$.

B. Bestimme die Fourierreihe der Funktion f auf $[-\pi, \pi]$, wobei $f(x) = |x|$.

C. Bestimme die Fourierreihe der Funktion f auf $[-\pi, \pi]$, wobei $f(x) = \cos \alpha x$.

D. Bestimme die Fourierreihe der Funktion f auf $[-\pi, \pi]$, wobei $f(x) = \sin \alpha x$.

E. Bestimme die Fouriercosinusreihe der Funktion f auf $[0, \pi]$, wobei $f(x) = \sin px$ (p eine ganze Zahl).

F. Bestimme die Fouriersinusreihe der Funktion f auf $[0, \pi]$, wobei $f(x) = x(\pi - x)$.

G. Bestimme die Fourierreihe der Funktion f auf $[-\pi, \pi]$, wobei $f(x) = \ln |\sin \frac{x}{2}|$, bzw. die Fourierreihe auf $[0, 2\pi]$.

H. Bestimme die Fourierreihe der Funktion f auf $[-\pi, \pi]$, wobei $f(x) = \ln |\cos \frac{x}{2}|$, bzw. die Fourierreihe auf $[0, 2\pi]$.

I. Bestimme die Fourierreihe der Funktion f auf $[-\pi, \pi]$, wobei $f(x) = \ln |\tan \frac{x}{2}|$, bzw. die Fourierreihe auf $[0, 2\pi]$.

J. Sei f eine Funktion auf $[-h, h]$. Zeige: Die Fourierreihe der Funktion hat die Gestalt

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi x}{h} + b_n \sin \frac{n\pi x}{h} \right],$$

wobei

$$a_n = \frac{1}{h} \int_{-h}^{h} f(x) \cos \frac{n\pi x}{h} \, dx \qquad b_n = \frac{1}{h} \int_{-h}^{h} f(x) \sin \frac{n\pi x}{h} \, dx.$$

(Hinweis: Betrachte die Funktion $g(x) = f(\pi x / h)$).

K. Zeige:

$$\cos\phi + \cos 2\phi + \cdots + \cos n\phi = \frac{\sin\frac{n\phi}{2}\cos\frac{(n+1)\phi}{2}}{\sin\frac{\phi}{2}}.$$

(Zeige:

$$\sin\phi + \sin 2\phi + \cdots + \sin n\phi = \frac{\sin\frac{n\phi}{2}\sin\frac{(n+1)\phi}{2}}{\sin\frac{\phi}{2}}.$$

Zeige:

$$\cos\phi + \cos 3\phi + \cdots + \cos(2n-1)\phi = \frac{\sin 2n\phi}{2\sin\phi}).$$

(Hinweis: Aus $\sin A\cos B = \frac{1}{2}(\sin(A+B)+\sin(A-B))$ folgt: $\sin\frac{\phi}{2}\cos\phi = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{3\phi}{2} - \sin\frac{\phi}{2}\right)$, $\sin\frac{\phi}{2}\cos 2\phi = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{5\phi}{2} - \sin\frac{3\phi}{2}\right)$ usw.

L. Sei f eine Funktion auf $[0,\pi]$ mit der Eigenschaft, dass $f(x) = f(\pi - x)$. Zeige: Die Fouriersinusreihe von f hat die Gestalt $\sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1}\sin(2k+1)x$ (d.h. die geraden Koeffizienten verschwinden).

M. Berechne

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n^2} + \ldots$$

$$1 + \frac{1}{3^2} + \ldots \frac{1}{(2n-1)^2} + \ldots$$

(Hinweis: $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2} \quad (x \in [-\pi,\pi])$,
$x^2 = \frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi\sin nx}{n}\right) \quad (x \in [0,2\pi])$.)

11.1.5 Thema—die schwingende Saite

41. Wir betrachten die schwingende Saite (für $x \in [0,2]$) mit Anfangsbedingung:
$f(x,0) = hx \quad (x \in [0,1])$, $2h - hx \quad (x \in [1,2])$ $(h > 0)$. Berechne die Fouriersinusreihe für x und zeige, dass

$$u(x,t) = \frac{8h}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)^2}\sin\frac{(2m-1)\pi x}{2}\cos\frac{(2m-1)\pi t}{2}$$

die Lösung ist.

42. Sei $0 < \epsilon < 1$. Löse die Gleichung für den Anfangswert

$$f(x) = \begin{cases} \frac{hx}{\epsilon} & (x \in [0,\epsilon]) \\ -\frac{hx}{1-\epsilon} + \frac{h}{1-\epsilon} & (x \in [\epsilon,1]). \end{cases}$$

43. Verwende die Methode der Trennung der Variablen um Lösungen der Gestalt $V(x,y) = X(x)Y(y)$ der Laplaceschen Gleichung
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$
zu bekommen.

44. Verwende die Methode der Trennung der Variablen, um Lösungen der Gestalt $V(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t)$ der Gleichung
$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$
zu bekommen.

45. Verwende die Methode der Trennung der Variablen, um Lösungen der Gestalt $V = R(r)\Phi(\theta)$ der Laplaceschen Gleichung (zweidimensional in Polarkoordinaten) $\Delta V = 0$, wobei
$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}$$
zu bekommen.

46. (Das Dirichletproblem: für den Kreis.) Man sucht eine Funktion u von zwei Variablen r, θ (Polarkoordinaten) mit $0 \leq r < 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, sodaß $\Delta V = 0$ und $V(1,\theta) = f(\theta)$.

    a) Zeige: Für jedes n sind $r^n \cos n\theta$, $r^n \sin n\theta$ Lösungen der Laplaceschen Gleichung.

    b) Benutze die Fouriersinusreihe $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta + b_n \sin \theta$ von f, um die die Lösung als Reihe darzustellen.

47. Löse das Dirichletproblem wie oben mit
$$f(\theta) = \begin{cases} 1 & (0 \leq \theta < \pi) \\ -1 & (\pi < \theta \leq 2\pi). \end{cases}$$

48. Wir betrachten jetzt die Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ der schwingenden Saiten mit Randbedingung

    $u(x,0) = 0$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$

    $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$ (g eine vorgegebene Funktion).

    Zeige: Die Funktionen
$$u_n(x,t) = \sin nx \sin nt \quad (n \in \mathbf{N})$$
sind Lösungen der homogenen Bedingungen.

49. Benutze die Fouriersinusreihe von g, um die Lösung von **48.** als unendliche Reihe zu bekommen.

50. Löse **48.** mit Anfangsbedingung $g(x) = x(\pi - x)$.

Zusätzliche Aufgaben

A. Die Laplacesche Gleichung in sphärischen Koordinaten ($x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$,
$z = r\cos\theta$) ist

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\cos\theta}{r^2}\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

B. Zeige: Die Lösung der Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ mit Randbedingungen $u(x,y,0) = f(x,y)$,
$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = 0$, $u = 0$ falls $x = 0$ oder π bzw. $y = 0$ oder π ist

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin mx \sin ny \cos t\sqrt{m^2+n^2},$$

wobei $A_{mn} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi f(x,y)\sin\, mx \sin\, ny\, dx\, dy$.

C. Zeige: Die Funktion

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2 t)\cos\, nx \quad (x \in [0,\pi], t > 0)$$

ist eine Lösung der Gleichung $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ mit Randbedingungen $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0$.
Wie soll man die a_n wählen, damit $u(x,0) = f(x)$?

D. Wie oben C für

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left[-\left(-n-\frac{1}{2}\right)^2 t\right] \sin\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right]$$

und Gleichung $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\quad u(0,t) = 0$, $\quad \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0$.

11.1.6 Thema—Induktion

51. Beweise:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ \sum_{k=1}^{n} k^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}.\end{aligned}$$

52. Zeige: $2^n \geq n^2 \quad (n \geq 4)$.

53. Zeige:

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

54. (Bernoulli-Ungleichung) Zeige:

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad (x \geq -1, n \in \mathbf{N}).$$

55. Seien $x_1, \ldots, x_n$ $(n \geq 2)$ reelle Zahlen (alle positiv oder alle negativ aber > -1). Zeige:

$$(1+x_1)\ldots(1+x_n) > 1 + x_1 + \cdots + x_n.$$

56. Zeige:

$$2^n \leq n! \quad (n \geq 4).$$

57. Seien $m, n \in \mathbf{N}$. Zeige: Es gibt (eindeutig-bestimmte) nichtnegative ganze Zahlen q und r, so daß

$$n = qm + r, \qquad 0 \leq r < m.$$

("Division mit Rest").

58. (Abelsche partielle Summation) Zeige:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}),$$

wobei $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

59. Zeige:

$$\binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} - \cdots = 0.$$

60. Zeige:

$$2^{n-1} \leq n! \leq n^n \quad (n \geq 1).$$

Zusätzliche Aufgaben

A. Zeige:

$$N!(N+1)^{n-N} \leq n! \leq N! n^{n-N} \quad (N \geq 1, n \geq N).$$

B. Zeige:

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!} \quad (k \in \mathbf{N}_0).$$

C. Zeige:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq 3.$$

D. Zeige:

$$\binom{n}{3} \leq \frac{1}{3} n!.$$

E. Zeige:

$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k}.$$

F. Es gibt
$$\frac{n!}{n_1!\dots n_k!}$$
Möglichkeiten, $n = n_1 + \dots + n_k$ Objekte auf k Kästchen $K_1, \dots, K_k$ so zu verteilen, daß n_1 Objekten in K_1, ..., n_k Objekte in K_k liegen.

G. Sei p das Polynom $t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$, mit Nullstellen $\lambda_1, \dots \lambda_n$. Falls $s_k = \sum_i \lambda_i^k$, zeige:
$$ka_k = -\sum_{i=0}^{k-1} a_i s_{k-i}.$$

H. Zeige:
$$\binom{2n}{0} < \binom{2n}{1} < \dots < \binom{2n}{n}.$$

I. Zeige:
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

J. Zeige: $m \cdot n = n \cdot m$ $(m, n \in \mathbf{N})$.

K. Zeige:
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}.$$

L. Berechne:
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \quad \text{bzw.} \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}.$$

M. Zeige:
$$\sum_{j=0}^{n} \binom{k+j}{j} = \binom{k+n+1}{n}.$$

N. Zeige:
$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \dots = n2^{n-1}.$$

O. Zeige:
$$\sqrt{\frac{\frac{5}{4}}{4n+1}} \le \frac{1.3.5.\dots.(2n-1)}{2.4.6.\dots.2n} \le \sqrt{\frac{\frac{3}{4}}{2n+1}}.$$

P. Zeige: $\sin n\theta = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2i+1} \sin^{2i+1}\theta \cos^{n-(2i+1)}\theta$

$\cos n\theta = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2i} (-1)^i \sin^{2i}\theta \cos^{n-2i}\theta.$

Q. Zeige: $\frac{d^n}{dx^n}(uv) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} u^{(r)} v^{(n-r)}.$

R. $\frac{d^n}{dx^n} a^x = a^x (\ln a)^n.$

S. $\frac{d^n}{dx^n} \sin x = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \frac{d^n}{dx^n} \cos x = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$

11.1.7 Thema—reelle Zahlen, Konvergenz

61. Zeige: $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ist irrational. (Hinweis: Betrachte die Summe und das Produkt von $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ und $\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

62. Seien $p_1, \ldots, p_n$ positive Zahlen mit $p_1 + \cdots + p_n = 1$. Dann gilt:

$$\min(a_1, \ldots, a_n) \leq p_1 a_1 + \cdots + p_n a_n \leq \max(a_1, \ldots, a_n).$$

63. Seien $a, b > 0$. Zeige:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

64. Die Familie aller reellen Polynome bildet einen Ring. Die Familie aller rationalen Funktionen bildet einen Körper. (Die Familie aller $n \times n$ Matrizen bildet einen Ring.)

65. Seien $(a_k)_{k=1}^n$ und $(b_k)_{k=1}^n$ endliche Folgen von reellen Zahlen. Berechne die Diskriminante der quadratischen Funktion

$$t \mapsto \sum_{k=1}^n (a_k t + b)^2.$$

Beweise damit die **Cauchy-Schwarz Ungleichung**

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right).$$

66. Seien $x_1, \ldots, x_n$ positive Zahlen. Zeige:

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}\right) \geq n^2.$$

67. Berechne $\lim_{n\to\infty}$ für die folgenden Ausdrücke:

$$\frac{n^2-2n+1}{n^2-6}, \quad \frac{6(-1)^n n + 11}{n^2-5}, \quad \frac{3n^2-20n}{n+1}.$$

68. Sei p eine nicht-triviale Polynomfunktion. Zeige:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n+1)}{p(n)} = 1.$$

69. Berechne

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \frac{n-m}{n+m}$$

und

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{n-m}{n+m}.$$

70. Sei (a_n) eine Folge, die gegen a konvergiert. Zeige:

$$\frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n) \to a.$$

Zusätzliche Aufgaben

A. Sei x eine reelle Zahl und k eine natürliche Zahl und setze

$$\binom{x}{k} = \prod_{m=1}^{k} \frac{x-m+1}{m}.$$

Zeige:

$$\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{n-k}\binom{y}{k}.$$

B. Beweise die Identität von Lagrange:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \sum_{1\le k<j\le n} (a_k b_j - a_j b_k)^2.$$

(Konsequenz: Ein zweiter Beweis der Cauchy-Schwarz Ungleichung).

C. Falls $a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n$ und $b_1 \ge \cdots \ge b_n$, zeige:

$$\left(\sum_k a_k\right)\left(\sum_k b_k\right) \le n \sum_k a_k b_k.$$

D. Zeige: die Menge aller reellen Zahlen der Gestalt $a + b\sqrt{2}$ $(a, b \in \mathbf{Q})$ bildet einen Körper.

E. Seien $a_1, \ldots, a_n$ positiv. Zeige:

$$\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \le \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

F. Für eine Zahl x setze

$$|x| = \begin{cases} x & (x \ge 0) \\ -x & (x \le 0). \end{cases}$$

Zeige:

$$|x+y| \le |x| + |y| \quad |xy| = |x|.|y| \text{ und } \sup\{x,y\} = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|).$$

Was ist die entsprechende Formel für $\inf\{x, y\}$?

G. Zeige:

$$|a| - |b| \le ||a| - |b|| \le |a-b|$$

bzw.

$$||a| - |b|| \le |a+b|$$

$(a, b \in \mathbf{R})$.

H. Zeige:

$$\left|\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right| \geq 2$$

$(a, b \in \mathbf{R},\ a \neq 0,\ b \neq 0)$.

I. Sei n eine natürliche Zahl, die nicht das Quadrat eines $p \in \mathbf{N}$ ist. Dann ist $\sqrt{n}$ irrational. Zeige $\sqrt[3]{2}$ ist irrational.

J. Seien a, b, c, d reelle Zahlen mit $b > 0,\ d > 0$, sodaß $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Zeige: $\frac{a+c}{b+d}$ liegt zwischen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$.

K. Berechne $\sup A$, $\inf B$, wobei

$$A = \{\frac{1}{n} + (-1)^n : n \in \mathbf{N}\}$$

bzw.

$$A = \{(-1)^n(1+\frac{1}{n}) : n \in \mathbf{N}\}.$$

L. Seien A, B Teilmengen von $\mathbf{R}$. Zeige:

$$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B).$$

Was ist der entsprechende Ausdruck für $\inf(A \cup B)$? Gilt eine ähnliche Formel für $\sup(A \cap B)$?

M. Seien A und B Teilmengen von $\mathbf{R}$. Zeige: Es gilt $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$ aber nicht immer $\sup(AB) = \sup A . \sup B$. Für welche Mengen gilt diese Formel? Finde eine Formel, die im allgemeinen Fall gültig ist.

N. Seien a und b positive Zahlen. Zeige: $\sqrt{2}$ liegt zwischen $\frac{a}{b}$ und $\frac{a+2b}{a+b}$. (Welche der zwei liegt näher bei $\sqrt{2}$?)

O. Diskutiere wie man Addition und Multiplikation auf $\mathbf{R}$ definieren kann (benütze sowohl die Konstruktion mit Cauchy-Folgen als auch mit Dedekindschen Schnitten). Beweise dann einige einfache Eigenschaften dieser Operationen (etwa Existenz von Inversen, Assoziativität).

P. Sei (a_n) so, daß $a_{n+1} = \frac{3a_n+1}{a_n+3}$ und $a_1 > -1$. Zeige: $a_n \to 1$.

Q. Sei (a_n) so, daß

$$a_{n+1}^2 = a_n + 6 \quad (a_{n+1} \geq 0).$$

Zeige: Falls $a_1 \geq -6$, dann $a_n \to 3$.

R. Seien a und b reelle Zahlen. Untersuche, ob die Folge

$$a_n = \frac{an^4 + 13n^2}{bn^4 + 4n^2 + 1}$$

konvergiert oder divergiert.

S. Seien a und b reelle Zahlen. Die Folge (a_n) ist wie folgt rekursiv definiert:

$$a_1 = a, a_2 = b, a_k = \frac{1}{2}(a_{k-1} + a_{k-2}).$$

Bestimme den Grenzwert.

T. Berechne den Limes der partiellen Summen der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}.$$

U. Man berechne das unendliche Produkt

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$$

d.h. den Limes der Folge

$$p_k = \prod_{n=2}^{k} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}.$$

V. Seien a und x_0 positiv und (x_n) rekursiv wie folgt definiert:

$$x_{n+1} = \frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right).$$

Dann ist (x_n) eine Cauchy-Folge. Der Limes ist eine positive Zahl b, sodaß $b^k = a$.

W. Zeige: Eine Folge reeller Zahlen konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist und genau einen Häufungspunkt besitzt.

11.1.8 Thema—Stetigkeit

71. Berechne $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+3} - \sqrt[5]{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^7+1}}$.

72. Berechne $\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x-b} - \sqrt{a-b}}{x^2 - a^2}$ $\quad (a > b)$.

73. Sei $y = x^2$. Zu einem $\epsilon > 0$ berechne $\delta > 0$, sodaß $|x - 2| < \delta \Rightarrow |y - 4| < \epsilon$. ($y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$; $x = 2$; $y = \frac{x-1}{2(x+1)}$; $x = 3$).

74. Sei

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ x & (x \in [0, 1[) \\ -x^2 + 4x - 2 & (x \in [1, 3[) \\ 4 - x & (x \geq 3). \end{cases}$$

Ist f stetig?

75. Für welchen Wert von a ist

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & (x < 1) \\ 3 - ax^2 & (x \geq 1) \end{cases}$$

stetig?

76. Berechne, falls existent $\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$.

77. Berechne, falls existent,
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x^2}-\sqrt{1-3x^2}}{x}.$$

78. Berechne, falls existent,
$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-7x^2-1}{x^4+7}.$$

79. An welcher Stelle ist die Funktion
$$x\mapsto\begin{cases} x & (x\in\mathbf{Q})\\ -x & (\text{sonst})\end{cases}$$
stetig?

80. Auf welchen Intervallen sind die folgenden Funktionen stetig bzw. Lipschitz-stetig?
$$f: x\to\sqrt{x}\quad (x\in\mathbf{R}_+)\qquad g: x\to\frac{1}{x}\quad (x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}).$$
a) $[1,2]$; b) $]0,1]$.

Zusätzliche Aufgaben

A. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$
($\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[n]{x-1}}$, $\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$.)

B. Gelten folgende Aussagen?

a) $f: D\to\mathbf{R}$ ist Lipschitz-stetig und D beschränkt impliziert f beschränkt.

b) $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ Lipschitz-stetig impliziert fg Lipschitz-stetig;

c) $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ Lipschitz-stetig und beschränkt impliziert fg Lipschitz-stetig.

C. Seien f und g stetige Funktionen auf $[0,1]$, so daß $f(x)=g(x)$, falls x rational. Zeige: $f=g$.

D. Sei p ein Polynom ungeraden Grades. Zeige: p besitzt mindestens eine Nullstelle.

E. Sei $A\subset\mathbf{R}$ beschränkt, $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$. Gilt die Aussage $f(A)$ ist beschränkt,

falls f stetig;
falls f gleichmäß stetig;
falls f Lipschitz-stetig?

F. Berechne die Grenzwerte
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right),\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tanh x}{x}.$$

G. Die Funktion $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ erfülle die Bedingung:
$$|f(x)-f(y)|\le 2(e^{|x-y|}-1).$$
Zeige: f ist gleichmäßig stetig.

H. f sei eine stetige Funktion auf $[a,b]$. Zeige: Die Funktion

$$x \mapsto \sup\{f(t) : t \in [a,x]\}$$

ist auch stetig.

I. Sei f stetig und injektiv auf $]0,1[$. Zeige: f ist monoton.

J. Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ stetig. Zeige: f besitzt einen Fixpunkt.

K. Seien f und g auf $\mathbf{R}_+$ definiert und es gelte: $g(x) = f(x^2)$. Zeige: $\lim_{x\to\infty} f(x) = A \iff \lim_{x\to\infty} g(x) = A$.

L. Sei

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \text{ rational }) \\ x^2 & (\text{sonst}). \end{cases}$$

Zeige:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 1-} f(x) = 1.$$

Für welche $c \in]0,1[$ existiert $\lim_{x\to c} f(x)$?

M. Beweise direkt, daß die Funktion $x \mapsto x^2 - 7x + 6$ auf $\mathbf{R}$ stetig ist.

N. Sei f auf $[0,1]$ beschränkt und es gelte:

$$f(ax) = bf(x) \quad (0 \le x \le \frac{1}{a}),$$

wobei $a, b > 1$. Zeige: f ist an der Stelle 0 stetig.

O. Sei $f : [a,b] \to \mathbf{R}$, $x \in [a,b]$. Setze

$$\operatorname{osc}(f; x_0) = \inf_n \sup\{|f(x) - f(y)| : |x - x_0| < \frac{1}{n}, |y - x_0| < \frac{1}{n}\}.$$

Zeige: f ist im Punkt x_0 stetig $\iff$ $\operatorname{osc}(f; x_0) = 0$. Definiere:

$$\operatorname{osc}_u(f) = \inf_n \{\sup |f(x) - f(y)| : |x - y| < \frac{1}{n}\}.$$

Was bedeutet die Bedingung: $\operatorname{osc}_u(f) = 0$?

P. Sei (a_n) eine Folge, a eine reelle Zahl. Definiere eine Funktion $f : D \to \mathbf{R}$ wie folgt. $D = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\} \cup \{0\}$, $f(\frac{1}{n}) = a_n$, $f(0) = a$. Zeige:

$$a_n \to a \iff f \text{ stetig.}$$

Q. Sei $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ monoton wachsend. Zeige: Für jedes $x_0 \in]a,b[$ existiert $f(x_0^+) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ und $f(x_0^-) = \lim_{x\to x_0^-}$. $f(x_0^+) - f(x_0^-)$ heißt der **Sprung** von f im Punkt x_0. Beweise: Es gibt höchstens abzählbar viele Punkte x_0, für die der Sprung nicht-null ist.

R. Sei $f : [0,1[\to \mathbf{R}$ rechts-stetig im Punkt 0 und so, daß $f(x^2) = f(x)$ $(x \in [0,1[)$. Zeige: f ist konstant.

S. Sei $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ so, daß $f(x+y) = f(x)+f(y)$. Zeige: Falls f *einen* Stetigskeitspunkt besitzt, dann hat sie die Form $x \mapsto cx$.

T. Zeige: Falls $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ stetig und injektiv, dann ist f streng monoton.

U. Sei f eine stetige Funktion auf $\mathbf{R}$ und (x_n) eine Folge, so daß $x_{n+1} = f(x_n)$ für jedes n. Zeige: Falls die Folge (x_n) konvergiert, dann ist der Limes ein Fixpunkt für f.

11.1.9 Thema—Wiederholung

81. Berechne die Fouriercosinusreihe der Funktion $\sin x$ auf $[0,\pi]$.

(Zeige: $|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4nx^2-1}$ $(x \in \mathbf{R})$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n^2-1)} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$.)

82. Berechne die Fouriercosinusreihe bzw. Fouriersinusreihe der Funktion $f = \pi - x$ auf $[0,\pi]$.

Wir "berechnen" $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$.

83. Berechne $G(t) = \int_0^\infty e^{-tx} \sin x \, dx$.

84. Berechne $F'(t)$, wobei $F(t) = \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x} \, dx$.

85. Zeige $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}$.
(Hinweis: $\int \frac{1}{t^2+1} \, dt = \arctan t$.)
Betrachte die Gleichung

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{dt^2} & = \frac{\partial^2 y}{dx^2} \quad (0 < x < \pi, t > 0) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) & = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) & = bx, \quad \frac{\partial}{\partial t}(x,0) = 0 \quad \text{(elastischer Stab).} \end{array}$$

86. Zeige $u_n(x,t) = \cos nx \cos nt$ ist eine Lösung der Gleichung (mit Ausnahme der inhomogenen Bedingung $u(x,0) = bx$).

87. Die Lösung hat die Gestalt

$$\frac{1}{2}b\pi - \frac{4b}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x \cos(2n-1)t$$

.

(Hinweis: Berechne die Fouriercosinusreihe von bx auf $[0,\pi]$.)

88. Sei f eine Funktion in einer Variablen. Dann ist $u(x,t) = f(x+t) + f(x-t)$ eine Lösung der Wellengleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

89. Sei f eine Funktion auf $[0,\pi]$, $\tilde{f}$ die ungerade 2π-periodische Erweiterung von f. Zeige

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{f}(x-t) + \tilde{f}(x+t)]$$

ist die Lösung der Wellengleichung mit Randbedingungen

$$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$$

$$(u(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{f}(x-t) + \tilde{f}(x+t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \tilde{g}(\xi)d(\xi))$$

ist eine Lösung der Wellengleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ mit Randbedingungen

$$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0).$$

90.
$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}a_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sinh ny}{\sinh n\pi} \cos nx$$

ist eine Lösung der Laplacegleichung $\Delta u = 0$ auf $\{(x,y) : 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi\}$ mit Randbedingungen $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ falls $x = 0$, $x = \pi$, $u(x,0) = 0$, $y(x,\pi) = f(x)$, wobei die (a_n) die Fouriercosinuskoeffizienten von f sind d.h. $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\, dx$.

11.1.10 Thema—Differentiation

91. Differenziere $(1-x^6)^{100}$, $\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}}$, $\frac{\arccos x}{x}$, $\frac{x}{1+x^2} - \arctan x$.

92. Differenziere $\ln_2(\ln_3(\ln_5 x))$, $(\ln x)^x$.

93. Berechne eine geschlossene Formel für $1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$ und $2 + 2\cdot 3x + 3\cdot 4x^2 + \cdots + n(n-1)x^{n-2}$.

94. Verifiziere direkt den Satz über die Ableitung von Inversfunktionen für den Fall $y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$.

95. Was ist $\frac{d^4\rho}{d\theta^4}$, wobei $\rho = a\sin 2\theta$?

96. Was ist $y^{(n)}$, falls $y = \frac{1-x}{1+x}$?

97. Berechne die Ableitung der Funktionen

$$\sqrt{\exp x^{\cos\sqrt{x}}}, \quad x^{\sqrt{x}}.$$

98. Zeige:
$$x^\alpha y^\beta \le \alpha x + \beta y,$$

wobei x, y, α, β positiv sind, mit $\alpha + \beta = 1$. (Berechne den Extremalwert der Funktion $x \mapsto x^\alpha y^\beta - \alpha x$).

(Beweise die Höldersche Ungleichung

$$\sum_{j=1}^n x_j y_j \le \left(\sum_{j=1}^n x_j^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^n y_j^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

wobei $x_j > 0, y_j > 0$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Hinweis: $\alpha = \frac{1}{p}$, $\beta = \frac{1}{q}$, $x = ?$, $y = ?$.)

99. Bestimme die Taylorreihe von $\ln x$ an der Stelle $x_0 = 1$. (Für welche $x > 0$ konvergiert die Reihe?)

100. Beweise die Regel von Leibniz:

$$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Berechne $(x^2 \sin x)^{(9999)}$.

Zusätzliche Aufgaben

A. Sei f eine stetig-differenzierbare Funktion auf $[a, b]$. Zeige: f ist Lipschitz-stetig.

B. Betrachte die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

Zeige: $\lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right) = 0$ für jedes Polynom p. Bestimme die Taylorreihe von f an der Stelle 0. Ist f durch diese Reihe darstellbar?

C. Sei f zweimal stetig differenzierbar. Zeige:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)}{h^2} = f''(a).$$

D. Zeige:

$$\lim_{x\to 0} x^{-2}[b(1+ax)^{\frac{1}{3}} - a(1+bx)^{\frac{1}{3}} + (a-b)(1+abx^2)^{\frac{1}{2}}] = \frac{7}{18}ab(a-b).$$

E. Sei f zweimal differenzierbar, mit $|f(x)| \leq A$, $|f''(x)| \leq B$ $(x \geq K)$.
Zeige: $|f'(x)| \leq 2\sqrt{AB}$ $(x \geq K)$.

F. Sei f eine Funktion auf $[a, b]$, sodaß

$$|f(x) - f(y)| \leq A|x-y|^2 \quad (x, y \in [a, b]).$$

Zeige: f ist konstant.

G. Bestimme die Extremalwerte der Funktion

$$x \mapsto x^m(1-x)^n$$

auf $[0, 1]$, $(m, n \in I\!N)$.

H. Seien f, g, h stetig-differenzierbare Funktionen auf $[a, b]$. Zeige: Es existiert eine Punkt ξ, so daß

$$\det \begin{bmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{bmatrix} = 0.$$

I. Zeige, mit Hilfe der Potenzreihendarstellungen von sin und cos, daß

$$\sin'(x) = \cos x \qquad \cos'(x) = -\sin x.$$

J. Zeige, daß die Carathéodorysche Definition der Differenzierbarkeit zu Bedingung (1) äquivalent ist. Benütze die Carathéodorysche Definition, um die Kettenregel bzw. den Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion zu beweisen.

K. (Anwendungen von L'HOPITAL)
$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{x-1-\ln x}$, $\lim_{x\to\infty}(a^{\frac{1}{x}} - 1)x$
$\lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}+\sqrt{x-x_0}}{\sqrt{x^2-x_0^2}}$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x - \tan x)$
$\lim_{x\to x_0} \frac{x-\frac{2}{3}\sin x-\frac{1}{3}\tan x}{x^3}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$.

L. Taylorreihen:
$\ln\frac{1+x}{1-x} =?$, $\tan x =?$, $\frac{\ln\sin x}{x} =?$, $\ln(x+\sqrt{1+x^2}) =?$, $\frac{e^x}{1-x} =?$, $\ln(1+e^x) =?$

M. Berechne den Ausdruck

$$V = \frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

als Funktion von den Ableitungen von $r(\theta)$ ($\frac{\left(r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2-r\frac{d^2r}{d\theta^2}}$).

N. Bestimme $y^{(n)}$ für $y = x^k$, $y = \ln x$, $y = a^x$.

O. (Formel von FAA di BRUNO.)

$$D^n f\circ g(x) = \sum_{k_1+2k_n+\cdots+nk_n=n} \frac{n!}{k_1!\ldots k_n!}(D^{k_1+\cdots+k_n}f)(g(x))\left(\frac{Dg(x)}{1}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{D^n g(x)}{n!}\right)^{k_n}.$$

P. Bestimme das Maximum bzw. Minimum von $y = x^x$ auf $[0,\infty[$.

Q. Sei $y = y(x)$ eine Kurve, (x_0, y_0) ein Punkt in der Ebene. Sei

$$V(x) = (x-x_0)^2 + (y(x)-y_0)^2.$$

Berechne $\frac{dV}{dx}$, $\frac{d^2V}{dx^2}$. Wann ist $\frac{dV}{dx} = 0$? (Geometrische Interpretation?)

R. Sei $A(x) = [a_{ij}(x)]$ eine $n\times n$ Matrix, sodaß die Elemente Funktionen von x sind. Berechne eine Formel für $\frac{d}{dx}\det[a_{ij}(x)]$.

11.1.11 Thema—Integration

101. Berechne

$$\int \frac{dx}{(2x-3)^5}; \qquad \int x^2\sqrt[5]{x^3+2}\,dx.$$

102.
$$\int \frac{x}{x+4}\,dx; \qquad \int \frac{dx}{x(x-1)}.$$

103.
$$\int x\sin 2x\,dx; \qquad \int x\cdot 3^x\,dx; \qquad \int x\tan^2 x\,dx; \qquad \int \arctan\sqrt{x}\,dx.$$

104.
$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}} \quad (t^2 = 1+x); \qquad \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}; \qquad \int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (x = a\sin t).$$

105. Berechne direkt (d.h. mit Hilfe von Riemannschen Summen) $\int_0^1 e^x\,dx$. (Hinweis: verwende die Partition $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1$ und die Formel $1+a+\cdots+a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$.)

106. Berechne wie im **105.** das Integral $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$. (Verwende die Partition $1, a, a^2, \dots, a^n$, wobei $a = \sqrt[n]{2}$.)

107. Zeige:
$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{\sqrt{2}}[\arctan(\sqrt{2}x+1)+\arctan(\sqrt{2}x-1)].$$

108. Zeige:
$$\int x^2e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}(x^2 - 2\frac{x}{a} + \frac{2}{a^2}) \quad (a \neq 0).$$

109. Für $F_{m,n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^n x\,dx \quad (m,n \in \mathbb{N}_0)$, zeige:
$$F_{0,0} = \frac{\pi}{2}, \quad F_{0,1} = F_{1,0} = 1, \quad F_{1,1} = \frac{1}{2}, \quad F_{m,n} = \frac{m-1}{m+n}F_{m-2,n} \quad \left(= \frac{n-1}{m+n}F_{m,n-2}\right).$$

(Zeige:
$$\begin{aligned} F_{2p,2q} &= \frac{\pi(2p)!(2q)!}{2^{2p+2q+1}p!q!(p+q)!} \\ F_{2p,2q+1} &= \frac{(2p)!q!(p+q)!2^{2q}}{p!(2p+2q+1)!} \\ F_{2p+1,2q+1} &= \frac{p!q!}{2(p+q+1)!}). \end{aligned}$$

110. Sei $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$, sodass $I_{2n} = \frac{1.3.5.\cdots.(2n-1)}{2.4.6.\cdots.2n}\frac{\pi}{2}$, $I_{2n+1} = \frac{2.4.6.\cdots.2n}{1.3.5.\cdots.(2n+1)}$.
(Vgl. Bsp. **109.**)
Damit gilt:
$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \left[\frac{1.3.5.\cdots.(2n-1)}{2.4.6.\cdots.2n}(2n+1)\frac{\pi}{2}\right].$$

(Es gilt: $0 \le I_{2n+1} \le I_{2n} \le I_{2n-1}$, also
$$1 \le \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \le \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n} \to 1.$$

Damit gilt:

$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \to 1.$$

Dies ist die Formel von WALLIS:

$$\frac{2.2.4.4.\cdots.(2n-2)(2n-2)2n}{1.1.3.3.\cdots.(2n-1)(2n-1)} \to \frac{\pi}{2}.)$$

Zusätzliche Aufgaben:

A. Zeige:

$$\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{1.3.5.\cdots.(2n-1)}.$$

B. Zeige:

$$\int_0^1 \frac{t^4(1-t)^4}{1+t^2}\,dt = \frac{22}{7} - \pi.$$

Berechne $\int_0^1 t^4(1-t)^4\,dt$ und zeige: $\frac{22}{7} - \frac{1}{630} < \pi < \frac{22}{7} - \frac{1}{1260}$.

C. Seien $f, g : [0,1] \to \mathbf{R}$ stetig. Zeige: $\int_0^1 f(x)g(x)\,dx \leq \left(\int_0^1 f(x)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 g(x)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx \leq \left(\int_0^1 f(x)^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 g(x)^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$.

D. Berechne die Ableitungen der Funktionen

$$F(x) = \int_a^{x^2} \sin^3 t\,dt, \quad \int_3^{(\int_1^x \sin^2 t\,dt)} \frac{1}{1+\sin^6 t + t^2}\,dt, \quad \int_x^b \frac{1}{1+t^2+t}\,dt,$$

wobei $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (vgl. Bsp. **98.**).

E. Berechne folgende Integrale:

$$\int xe^{-x}\,dx; \qquad \int x\tan^2 x\,dx; \qquad \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}\,dx.$$

F. Berechne Stammfunktionen für

$$\arcsin x + \arccos x, \qquad (3x+2)^{15}; \qquad \frac{\sin x}{\cos^2 x}; \qquad \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}.$$

G. Berechne Stammfunktionen für

$$\frac{x}{2x+1}, \qquad \frac{3+x}{3-x}; \qquad \frac{1}{x(x-1)}; \qquad \frac{1}{\sqrt{8+6x-9x^2}}.$$

H. Zeige, wie man eine Stammfunktion für jede Funktion der Gestalt $\frac{1}{x+a}$ bzw. $\frac{1}{x^2+ax+b}$ berechnen kann. Zeige damit, wie man mit Hilfe von Bruchdarstellungen jede rationale Funktion explizit integrieren kann.

I. Berechne Stammfunktionen für

$$\frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x+1}}; \qquad \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}; \qquad \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

J. Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ heißt von beschränkter Variation, falls $K > 0$ existiert, sodaß

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq K$$

für jede Partition $a = x_0 < x_1 \cdots < x_n = b$. Das kleinste solche K heißt die **Variation** von f (geschrieben $\mathrm{Var}\,(f)$). Zeige:

jede monotone Funktion ist von beschränkter Variation;
falls f von beschränkter Variation ist, dann ist die Funktion

$$x \mapsto \mathrm{Var}\,(f|_{[a,x]})$$

monoton wachsend;
jede Funktion von beschränkter Variation ist die Differenz von zwei monotonwachsenden Funktionen;
es existieren nicht stetige Funktionen von beschränkter Variation;
falls f stetig und von beschränkter Variation, dann ist die Funktion

$$x \mapsto \mathrm{Var}\,(f|_{[a,x]})$$

stetig.

111. Berechne s_n und den Wert der Summe für die (konvergenten) Reihen:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \cdots \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \right)$$

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right).$$

112. Welche der Reihen konvergieren?

$$\sum \sin \frac{\pi}{2^n}; \quad \sum \frac{1}{(n+1)(n+4)}.$$

113. Welche der folgenden Reihen konvergieren?

$$\sum \frac{1}{n^2+1}, \quad \sum (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}).$$

114. Welche der folgenden Reihen konvergieren?

$$\sum \frac{1}{n}(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n-1}); \quad \sum \frac{n}{(n+1)!}.$$

115. Welche der folgenden Reihen konvergieren?

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1}; \quad \sum (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1}; \quad \sum (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n+1)}.$$

116. Zeige: $\sum nx^{n-1}$ konvergiert, falls $|x| < 1$.

117. Zeige: $\sum \frac{x}{(1+x)^n}$ konvergiert, falls $x \geq 0$ oder $x < -2$.

118. Für welche Werte von α, β konvergieren die Reihen

$$\sum \frac{n^{\beta/n}}{n^\alpha}; \quad \sum \frac{n^\alpha}{n!}$$

$$\sum n^{-\alpha}[\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1}]?$$

119. Sei

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{n^2}, & \text{falls } n \text{ kein Quadrat,} \\ \frac{1}{n^\alpha}, & \text{falls } n \text{ ein Quadrat.} \end{cases}$$

Zeige: $\sum a_n$ konvergiert, falls $\alpha > \frac{1}{2}$.

120. Zeige:

$$\sum_{r=1}^{n} r x^{r-1} = \frac{1-(n+1)x^n + n x^{n+1}}{(1-x)^2} \qquad (x \neq 1).$$

Für welche x konvergiert die unendliche Reihe $\sum_{r=1}^{\infty} r x^{r-1}$?

Zusätzliche Aufgaben:

A. Berechne:

$$\sum \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}; \quad \sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}; \quad \sum \frac{1}{n(n+3)}.$$

B. Zeige: $\sum a_n^2 < \infty$, $\sum b_n^2 < \infty$, $\Rightarrow \sum a_n b_n$ konvergiert.

C. Sei k die Summe der unendlichen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Zeige:

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{3}{4}k.$$

D. Für welche a, b, konvergiert die Reihe

$$(a-b) + (a^2 - b^2) + (a^3 - b^3) + \ldots?$$

E. Sei f eine nicht-negative, monoton fallende Funktion von $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$. Zeige: $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergiert $\iff$ $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n f(2^n)$ konvergiert. (Cauchy Verdichtungssatz).

F. Benütze die letzte Aufgabe, um die Konvergenz der Reihe $\sum \dfrac{1}{n^\alpha \ln n}$ zu untersuchen.

G. Zeige:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+3}{k(k+1)(k+2)} = \frac{5}{4}, \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k^2-1)} = \frac{1}{4}.$$

H. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

falls $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, dann konvergiert $\sum a_n$;
falls $a_n - b_n \to 0$ und $\sum b_n$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum a_n$;
falls $\sum a_n$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum a_n^2$;
falls $\sum a_n^2$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum a_n$;
falls $a_{n+1} + \cdots + a_{2n} \to 0$, dann konvergiert $\sum a_n$.

I. Zeige:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+k)} = \frac{1}{k!k}.$$

J. Welche der folgenden Reihen konvergieren?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{1+n^4}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{1+n^4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^{1/n}}.$$

K. Für welche x konvergiert die Reihe

$$\sum \binom{\alpha+n-1}{n} x^n?$$

L. Für welche x konvergiert die Reihe

$$\sum \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} x^n?$$

M. Formuliere eine Version des Vergleichkriteriums für die Konvergenz von Reihen, die für uneigentliche Integrale gültig ist.

N. Zeige: Das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \dfrac{\sin x}{x}\, dx$ ist bedingt konvergent.

O. (Kriterium von Raabe) Zeige: Falls

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le 1 - \frac{\beta}{n},$$

wobei $\beta > 1$, dann konvergiert die Reihe $\sum a_n$ (absolut).

P. Sei (a_n) eine positive Folge, sodaß $\sum a_n$ konvergiert. Zeige: $\sum b_n$ konvergiert, wobei $b_n = \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}$.

11.1.12 Thema—Fourierreihen und Konvergenz von Funktionenfolgen

121. Zeige:

$$x = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \qquad (0 < x < 2\pi)$$

122. Zeige:

$$\frac{x^2}{2} = \pi x - \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \qquad (0 \le x \le 2\pi).$$

123. Zeige:
$$x^2 = \frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi \sin nx}{n}\right) \quad 0 < x < 2\pi).$$

124. Zeige:
$$\cos x = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n \sin 2nx}{4n^2 - 1} \quad (0 < x < \pi).$$
Was ist der entsprechende Ausdruck für $\sin x$?

125. Berechne die Fourier-reihen (auf $[-\pi, \pi]$) von $x \cos x$, $x \sin x$.

(Gibbsches Phänomen): Sei f die Funktion $2H - 1$ (genauer: Die 2π-periodische Erweiterung der Einschränkung dieser Funktion auf $[-\pi, \pi]$). f hat die Fourierreihe $f(x) = \dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$.

126. Zeige: $\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x = \frac{1}{2}\frac{\sin 2nx}{\sin x}$.
(Hinweis: $\sin x \cos(2k-1)x = \frac{1}{2}(\sin 2kx - \sin(2k-2)x)$.

127. $s_n(x) = \dfrac{2}{\pi}\int_0^x \dfrac{\sin 2nt}{\sin t}\,dt$, wobei $s_n(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$. (Differenziere!)

128. Die Funktion s_n auf $]0, \pi[$ hat lokale Maxima und Minima an den Stellen $x_m = \dfrac{1}{2}\frac{m\pi}{n}$ $(m = 1, 2, \ldots, 2n-1)$ (löse die Gleichung $\frac{d}{dx}s_n(x) = 0$ und berechne $\frac{d^2}{dx^2}s_n(x)$).

129. $s_n\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ ist ein absolutes Maximum der Funktion;

130. $\lim_{n\to\infty} s_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\dfrac{\sin t}{t}\,dt \quad \sim 1.179.$

Zusätzliche Aufgaben

A. Sei $\phi(x) = \dfrac{1}{2^n n!}f_n^{(n)}(x)$, wobei $f_n(x) = (x^2-1)^n$. Zeige: (ϕ_n) ist auf $[-1, 1]$ orthogonal. Berechne $\phi_1, \ldots, \phi_4$.

B. Sei $c_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\cos k\theta$ bzw. $s_n = \sum_{k=1}^{n}\sin k\theta$. Zeige: $\lim \dfrac{c_1 + \cdots + c_n}{n} = 0$ und $\lim \dfrac{s_1 + \ldots s_n}{n} = \frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}\theta$ (θ kein Vielfach von 2π).

C. $\lim_{x\to\frac{1}{2}\pi}\sec x - \tan x = 0$.

D. Zeige:
$$\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{1}{2}x} = 1 + 2\cos x + 2\cos 2x + \cdots + 2\cos nx$$
bzw.
$$\frac{\sin nx}{\sin x} = 2\cos(n-1)x + 2\cos(n-3)x + \ldots.$$
Berechne damit:
$$\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}\,d\theta$$

bzw.

$$\int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx$$

bzw.

$$\int_0^\pi \left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx.$$

E. Sei $\sum a_n$ eine Reihe mit $a_n > 0$ und es gelte:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Zeige: Falls $a > 1$, dann konvergiert die Reihe, falls $a < 1$, dann divergiert sie. Falls

$$\sum a_n = 1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)} + \ldots,$$

zeige:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\gamma+1-\alpha-\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

F. Sei $\sum a_n$ eine Reihe mit beschränkten partiellen Summen (s_n), b_n eine Folge, die monoton gegen Null konvergiert. Zeige: $\sum a_n b_n$ konvergiert. (Benütze die Identität

$$a_1b_1 + \cdots + a_nb_n = s_1(b_1 - b_2) + s_2(b_2 - b_3) + \cdots + s_nb_n).$$

G. Für welche Werte von k konverigert die Reihe

$$\sum n^k\{\sqrt{(n+1)} - 2\sqrt{n} + \sqrt{(n-1)}\}.$$

H. Zeige:

$$\sum_1^\infty \frac{n^2+9n+5}{(n+1)(2n+3)(2n+5)(n+4)} = \frac{5}{36}.$$

I. Berechne den Grenzwert der folgenden Funktionenfolgen. Ist die konvergenz gleichmäßig?

$$f_n(x) = n^2x(1-x)^n \quad (x \in [0,1]);$$
$$g_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} \quad (x \in \mathbf{R});$$
$$h_n = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} \quad (x \in \mathbf{R}).$$

J. Sei $f : \mathbf{N}\times\mathbf{N} \to \mathbf{R}$ eine Doppelfolge und setze $g_n(m) = f(m,n)$. Zeige: Falls $g_n \to g$ auf $\mathbf{N}$, wobei $g(m) = \lim_{n\to\infty} f(m,n)$, und

$$\lim_{m\to\infty}\big(\lim_{n\to\infty} f(m,n)\big)$$

existiert, dann existiert $\lim_{m,n\to\infty} f(m,n)$ (und beide Grenzwerte stimmen überein).

K. Sei $F_n(x)$ die n-te partielle Summe der Reihe $\sum f_n(x)$. Wir nehmen an, daß (F_n) gleichmäßig beschränkt ist. Sei (g_n) eine fallende Folge von Funktionen, die gleichmäßig gegen Null konvergiert. Seige: die Reihe $\sum f_n g_n$ konvergiert gleichmäßig.

L. Welche der folgende Reihen sind gleichmäßig konvergent auf $[0,1]$?

$$\sum \frac{1}{n}\{\log(x+n) - \log n\};$$

$$\sum \frac{1-x}{n} x^n;$$

$$\sum \frac{x}{n^{3/2} + n^{3/4} x^2};$$

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^x \log n}.$$

M. Für welche $\alpha \geq 0$ ist die Reihe

$$\sum (1-x)^\alpha x^n (1-x^n)$$

auf $[0,1]$ gleichmäßig konvergent?

N. Für welche Werte von $x \geq 0$, $\alpha \geq 0$ und $\beta \geq 0$ ist die Reihe

$$\sum \frac{n^\alpha x^\beta}{1 + n^2 x^2}$$

konvergent? Zeige: Die Reihe ist auf $[0,1]$ gleichmäßig konvergent $\iff$ $0 \leq \alpha < 1$, $\beta > \alpha + 1$ und daß sie auf $[1, \infty[$ gleichmäßig konvergiert $\iff$ $0 \leq \alpha < 1$ und $\beta \leq 2$.

O. Sei

$$\sigma_n(x) = \frac{\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx}{n}.$$

Zeige: $\sigma_n(x) \to 0$ für jedes $x \in \mathbf{R}$. Ist $\sigma_n(x)$ gleichmäßig konvergent auf den Intervallen $[\frac{1}{2}\pi, \pi]$ bzw. $[0, \frac{1}{2}\pi]$?

P. Betrachte die zwei Potenzreihen

$$f(z) = \sum a_n z^n \quad g(z) = \sum b_n z^n$$

mit Konvergenzradien r bzw. R. Sei z so, daß $|z| < R$ und $\sum |b_n z^n| < r$. Dann gilt:

$$f \circ g(z) = \sum c_k z^k,$$

wobei $c_k = \sum_{n=0}^\infty a_n b_k(n)$ mit

$$g(z)^n = \sum_{k=0}^\infty b_k(n) z^k.$$

Q. Es habe p eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R und $p(0) = 1$. Zeige: Es existiert $\delta > 0$, sodaß $\dfrac{1}{p}$ eine Potenzreihedarstellung

$$\frac{1}{p(z)} = \sum q_n z^n \quad (|z| < \delta)$$

besetzt.

R. Sei $\sum a_n$ eine konvergente Reihe. Zeige: $\sum a_n x^n$ konvergiert gleichmäßig auf $[0, 1]$. Daraus folgt der Satz von Abel:

$$\lim_{r \to 1-} \sum a_n r^n = \sum a_n.$$

S. Seien (f_n) und (h_n) gleichmäßig konvergierende Funktionenfolgen. Zeige:

a) Es gilt nicht i.a. daß $f_n g_n$ gleichmäßig konvergent ist;

b) Falls (f_n) und (g_n) zusätzlich gleichmäßig beschränkt sind, dann gilt: $f_n g_n$ konvergiert gleichmäßig.

T. Sei (f_n) eine Folge von stetigen Funktion auf $[0, 1]$, die punktweise gegen f konvergiert. Zeige: Die Konvergenz ist genau dann gleichmäßig, wenn gilt: f ist stetig und (f_n) ist gleichgradig stetig.

U. Beweise den Satz von Dini: Sei (f_n) eine Folge von stetigen Funktionen auf $[0, 1]$, die punktweise gegen eine stetige Funktion f konvergiert. Falls die Folge monoton fallend ist (d.h. $f_{n+1} \leq f_n$ für jedes n), dann ist die Konvergenz gleichmäßig.

V. Sei (g_n) eine monoton-fallende Folge von Funktionen auf $[a, b]$, die gleichmäßig gegen 0 konvergiert. Zeige: Die Reihe $\sum (-1)^n g_n$ konvergiert gleichmäßig.

W. Sei (g_n) eine gleichmäßig beschränkte, monoton-fallende Folge von Funktionen auf $[a, b]$, bzw. $\sum f_n$ eine gleichmäßig konvergierende Funktionenreihe. Zeige: Die Reihe $\sum f_n g_n$ konvergiert auch gleichmäßig.

X. Sei (a_n) eine positive, monoton-fallende Folge. Zeige: Die Reihe $\sum a_n \sin nx$ konvergiert genau dann gleichmäßig auf $\mathbf{R}$, wenn $n a_n \to 0$.

Y. Es konvergiere die Reihe $\sum a_n$. Zeige: Die Dirichlet-Reihe $\sum a_n n^{-s}$ konvergiert gleichmäßig auf $[0, \infty[$.

11.2 Lösungsvorschläge

11.2.1 Thema—Funktionen

1. a) $f(0) = -0.5, \quad f(1) = -2, \quad f(2) =$ undefiniert
$f(-2) = 0.25, \quad f(-0.5) = -0.2, \quad f(\sqrt{2}) \approx -4.12132$

   b) $g(0) = 2, \quad g(1) = 0.5, \quad g(2) = 0$
$g(-2) = -4, \quad g(-0.5) = 5, \quad g(\sqrt{2}) \approx 0.24264$

   c) $h(0) = -1, \quad h(1) = 0, \quad h(2) = 7$
$h(-2) = -9, \quad h(-0.5) = -1.125, \quad h(\sqrt{2}) \approx 1.82843$

2. $h(a) = a^3 - 1, \quad h(\frac{1}{a}) = \frac{1}{a^3} - 1$
   $h(a+1) = a^3 + 3a^2 + 3a + 1 - 1 = a \cdot (a^2 + 3a + 3), \quad 2h(2a) = 2 \cdot (8a^3 - 1)$

3. Beispiel: $f(x) := x^2, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 5$
   ergibt die beiden Punkte $(2.5, 6.25)$ und $(2.5, 12.5)$
   Graph der Funktion ist Gerade bzw. jede Verbindungsgerade zwischen zwei Punkten des Graphen der Funktion liegt stets über bzw. unter dem Graphen der Funktion.

4. a) $y = x^2 + 2x + 1; \quad y = \sqrt{\tan^2(x) + 1}$
   b) $u = w^2 + 2w + 1; \quad u = \tanh(\sqrt{w-1})$

5. $\phi(\pi/12) = 0.5, \quad f(0.5) = -0.375$
   $f(1) = 0, \quad \phi(0) = 0$
   Da $\phi(1) = \sin 2, \quad f(\sin 2) \approx -0.15747$ kann man die Reihenfolge der Funktionsauswertung (hier) nicht vertauschen.

6. a) $y = +\sqrt{1-x^2}$ oder $y = -\sqrt{1-x^2}$
   $y = +\sqrt{b^2 \cdot x^2/a^2 - b^2}$ oder $y = -\sqrt{b^2 \cdot x^2/a^2 - b^2}$

   $y = \sqrt[3]{a^3 - x^3}$
   b) $u = +\sqrt{1-v^2}$ oder $u = -\sqrt{1-v^2}$
   $u = 3/v$
   $u = -v/2 + \sqrt{v^2/4 - 1}$ oder $u = -v/2 - \sqrt{v^2/4 - 1}$

7. $\mathbf{R}^+, \quad]-3, \infty[, \quad]-\infty, 2.5]$
   $\mathbf{R}$ ohne die Nullstellen des Nenners, d.s. 1 und 2
   $[-1, 1]$

8. gerade: spiegelbildlich symmetrisch zur y-Achse (Beispiele $f(x) := 0, c, x^2, x^4, \cos x, -x^2$)
   ungerade: punktsymmetrisch zum Ursprung (Beispiele $f(x) := 0, x, -x, \sin x, -\sin x$)
   gerade, weder noch, weder noch, gerade, ungerade, weder noch, ungerade

9. a) $\cosh^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + 2e^0)$
   $\sinh^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} - 2e^0)$
   $\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + 2 - e^{2x} - e^{-2x} + 2) = 1$
   b) $\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$
   $= \frac{1}{4}(e^{x+y} + e^{-x+y} + e^{x-y} + e^{-x-y}) + \frac{1}{4}(e^{x+y} - e^{-x+y} - e^{x-y} + e^{-x-y})$
   $= \frac{1}{4}(2e^{x+y} + 2e^{-x-y}) = \cosh(x+y)$

c.) $\sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y$
   $= \frac{1}{4}(e^{x+y} - e^{-x+y} + e^{x-y} - e^{-x-y} - (e^{x+y} + e^{-x+y} - e^{x-y} - e^{-x-y}))$
   $= \frac{1}{4}(2e^{x-y} - 2e^{-x+y}) = \sinh(x-y)$

10. a) $\cos^2 x = \frac{1}{4}(e^{2ix} + e^{-2ix} + 2e^0)$
   $\sin^2 x = \frac{1}{4i^2}(e^{2ix} + e^{-2ix} - 2e^0)$
   $\cos^2 x + \sin^2 x = \frac{1}{4}(e^{2ix} + e^{-2ix} + 2 - e^{2ix} - e^{-2ix} + 2) = 1$
   b) $\cos x \cos y - \sin x \sin y$
   $= \frac{1}{4}(e^{ix+iy} + e^{-ix+iy} + e^{ix-iy} + e^{-ix-iy}) - \frac{1}{4i^2}(e^{ix+iy} - e^{-ix+iy} - e^{ix-iy} + e^{-ix-iy})$
   $= \frac{1}{4}(2e^{ix+iy} + 2e^{-ix-iy}) = \cos(x+y)$

c.) $\sin x \cos y + \cos x \sin y$
$= \frac{1}{4i}(e^{ix+iy} - e^{-ix+iy} + e^{ix-iy} - e^{-ix-iy} + (e^{ix+iy} + e^{-ix+iy} - e^{ix-iy} - e^{-ix-iy}))$
$= \frac{1}{4i}(2e^{ix+iy} - 2e^{-ix-iy}) = \sin(x+y)$

C. $\phi(t^2) = t^4 + 1 \quad \neq \quad t^4 + 2t^2 + 1 = (\phi(t))^2 \quad$ für alle $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$

3. Sei $y = \sin \omega x$. Es gilt dann $y' = \omega \cos \omega x$, $y'' = -\omega^2 \sin \omega x$. Also $y'' + y = 0$.

   Falls $y = e^{nx}$, gilt $y' = ne^{nx}$, $y'' = n^2 e^{nx}$, $y''' = n^3 e^{nx}$, $y^{(iv)} = n^4 e^{nx} = n^4 y$.

4. Für $u = \frac{1}{x^2+y^2}$ gilt $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{4x^2}{(x^2+y^2)^3} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}.$$

5. Für $u_n(x,t) = \exp(-n^2\pi^2 t) \cos n\pi x$ gilt

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -n^2\pi^2 \exp(-n^2\pi^2 t) \cos n\pi x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - n^2\pi^2 \exp(-n^2\pi^2 t) \cos \pi n x.$$

6. Für $f(x) = \frac{x^p}{p} - xy$ gilt

$$f'(x) = x^{p-1} - y \text{ – also } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = y^{\frac{1}{p-1}}$$

   (stillschweigende Annahme: $y > 0$).

   Dann gilt:

$$f(x) = \frac{y^{\frac{p}{p-1}}}{p} - y^{1+\frac{1}{p-1}} = y^{\frac{p}{p-1}} \left(\frac{1}{p} - 1 \right).$$

   (In der Tat ist dies ein Minimum und es gilt daher $\frac{x^p}{p} - xy \geq \frac{p}{y^{p-1}} \left(\frac{1-p}{p} \right)$ $x, y > 0$, oder $\frac{x^p}{p} + \left(\frac{p-1}{p} \right) y^{\frac{p}{p-1}} \geq xy$, oder $\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \geq 1$, wobei $q = \frac{p-1}{p}$.)

7. $F'(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-ix) f(x) e^{-isx} dx$.

8. $F'(p) = \int_0^{\infty} (-t) f(t) e^{-pt} dt$.

9. $\frac{d}{dx} \cos^2 x = 2 \cos x (-\sin x)$
   $\frac{d}{dx} \sin^2 x = 2 \sin x \cos x$.
   Also $\frac{d}{dx}(\cos^2 x + \sin^2 x) = 0$. Daraus folgt: $\cos^2 x + \sin^2 x$ ist konstant.
   Setzt man $x = 0$, so sieht man, dass $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

11.2.2 Thema—Differentiation

13. Sei $y = \sin \omega x$. Es gilt dann $y' = \omega \cos \omega x$, $y'' = -\omega^2 \sin \omega x$. Also $y'' + y = 0$.
    Falls $y = e^{nx}$, gilt $y' = ne^{nx}$, $y'' = n^2 e^{nx}$, $y''' = n^3 e^{nx}$, $y^{(iv)} = n^4 e^{nx} = n^4 y$.
14. Für $u = \frac{1}{x^2+y^2}$ gilt $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}$,
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{4x^2}{(x^2+y^2)^3} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}.$$
15. Für $u_n(x,t) = \exp(-n^2\pi^2 t)\cos n\pi x$ gilt
$$\frac{\partial u}{\partial t} = -n^2\pi^2 \exp(-n^2\pi^2 t)\cos n\pi x$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - n^2\pi^2 \exp(-n^2\pi^2 t)\cos \pi n x.$$
16. Für $f(x) = \frac{x^p}{p} - xy$ gilt
$$f'(x) = x^{p-1} - y - \text{also } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = y^{\frac{1}{p-1}}$$
    (stillschweigende Annahme: $y > 0$).
    Dann gilt:
$$f(x) = \frac{y^{\frac{p}{p-1}}}{p} - y^{1+\frac{1}{p-1}} = y^{\frac{p}{p-1}}\left(\frac{1}{p} - 1\right).$$
    (In der Tat ist dies ein Minimum und es gilt daher $\frac{x^p}{p} - xy \geq \frac{p}{y^{p-1}}\left(\frac{1-p}{p}\right)$ $x, y > 0$, oder $\frac{x^p}{p} + \left(\frac{p-1}{p}\right) y^{\frac{p}{p-1}} \geq xy$, oder $\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \geq 1$, wobei $q = \frac{p-1}{p}$.)
17. $F'(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-ix) f(x) e^{-isx} dx$.
18. $F'(p) = \int_0^{\infty} (-t) f(t) e^{-pt} dt$.
19. $\frac{d}{dx}\cos^2 x = 2\cos x(-\sin x)$
    $\frac{d}{dx}\sin^2 x = 2\sin x \cos x$.
    Also $\frac{d}{dx}(\cos^2 x + \sin^2 x) = 0$. Daraus folgt: $\cos^2 x + \sin^2 x$ ist konstant.
    Setzt man $x = 0$, so sieht man, dass $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

11.2.3 Thema—Integration

21. $\int \sinh x\, dx = \frac{1}{2}\int e^x - e^{-x}\, dx = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x$
    $\int \cosh x\, dx = \frac{1}{2}\int e^x + e^{-x}\, dx = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x$
22. $\int \cos x\, dx = \frac{1}{2}\int e^{ix} + e^{-ix}\, dx = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = \sin x$
    $\int \sin x\, dx = \frac{1}{2i}\int e^{ix} - e^{-ix}\, dx = -\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = -\cos x$
23. $\int \ln x\, dx = \int 1 \cdot \ln x\, dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = x\ln x - x$

24. Sei $I_n = \int_0^\infty t^n e^{-at}\,dt$.
a) $I_0 = \int_0^\infty e^{-at}\,dt = [-\frac{1}{a}e^{-at}]_0^\infty = \frac{1}{a}$
b) Sei $F_n = \int t^n e^{-at}\,dt$. Dann ist $F_{n-1} = \int t^{n-1}e^{-at}\,dt = \frac{1}{n}t^n e^{-at} + \frac{a}{n}F_n$ (partielle Integration). Davon folgt, dass $I_n = \frac{n}{a}\cdot I_{n-1}$
c) $I_1 = \frac{1}{a^2}$, $I_2 = \frac{2}{a^3}$, $I_3 = \frac{6}{a^4}$.

25. $\int(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\,dx = \int 1 - x + x^{\frac{3}{2}} + x\,dx = x + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$

26. $\int \frac{dx}{(2x-3)^2} = -\frac{1}{2}(2x-3)^{-1}$

27. $\int x\sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x$

28. $\int x^n\ln x\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1}$

29. $\int_0^{2\pi}\sin nx\sin mx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(n-m)x - \cos(m+n)x\,dx = \frac{1}{2}[\frac{1}{n-m}\sin(n-m)x - \frac{1}{n+m}\sin(n+m)x]_0^{2\pi} = 0$, für $n \neq m$.
$\int_0^{2\pi}\cos nx\cos mx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(n-m)x + \cos(n+m)x\,dx = \frac{1}{2}[\frac{1}{n-m}\sin(n-m)x + \frac{1}{n+m}\sin(n+m)x]_0^{2\pi} = 0$, für $n \neq m$.

30. $\int_0^{2\pi}\sin nx\cos mx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin(n+m)x + \sin(n-m)x\,dx = \frac{1}{2}[-\frac{1}{n+m}\cos(n+m)x - \frac{1}{n-m}\cos(n-m)x]_0^{2\pi} = 0$, für $n \neq m$.
Sei $A = \int e^{ax}\cos bx\,dx$, $B = \int e^{ax}\sin bx\,dx$.
$A = e^{ax}\frac{\sin bx}{b} - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}B$,
$B = -e^{ax}\frac{\cos bx}{b} + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}A$
Damit hat man das Gleichungssystem

$$bA + aB = e^{ax}\sin bx$$
$$-aA + bB = -e^{ax}\cos bx$$

und die Lösung

$$A = \frac{1}{a^2+b^2}(be^{ax}\sin bx + ae^{ax}\cos bx)$$
$$B = \frac{1}{a^2+b^2}(ae^{ax}\sin bx - be^{ax}\cos bx)$$

11.2.4 Thema—Fourierreihen

31.
$$f(x) = \sum b_n \sin\, nx$$

mit

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin\, nx\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin\, nx\,dx \\ &= \frac{2}{\pi} - \frac{\cos\, nx}{n}\Big|_0^\pi \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^n}{n}\right) \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{\pi n} & n \text{ ungerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

32.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

mit

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos nx}{n} x \right]_0^\pi + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos nx \, dx \\ &= -\frac{2}{\pi} (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

33.&34.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + \sum b_n \sin nx,$$

wobei

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \, dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

33.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \cos nx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[x \frac{\sin nx}{n} \bigg|_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin nx \, dx \right] \\ &= 0 - \frac{1}{\pi n^2} (\cos nx) \bigg|_0^\pi \\ &= \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}. \end{aligned}$$

34.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \sin nx \, dx \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{n} \end{aligned}$$

(siehe 32).

35.

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 \cos nx\,dx \\
a_0 &= \frac{2}{\pi}\frac{\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3} \\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 \cos nx\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[x^2\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^\pi - 2\frac{1}{n}\int_0^\pi x\sin nx\,dx\right] \\
&= -\frac{4}{\pi n}\left[-x\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos nx\,dx\right] \\
&= \frac{4\pi}{4n^2}(-1)^n \\
&= \frac{4(-1)^n}{n^2}
\end{aligned}
$$

36.&37.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

wobei

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi e^x \cos nx\,dx \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi e^{-x} \sin nx\,dx
\end{aligned}
$$

also

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi e^x\,dx = \frac{1}{\pi}(e^\pi - e^{-\pi}) = \frac{2}{\pi}\sinh n\pi.$$

Wir verwenden jetzt die Formel

$$
\begin{aligned}
\int e^{ax}\cos bx\,dx &= \frac{1}{a^2+b^2}[be^{ax}\sin bx + ae^{ax}\cos bx] \\
\int e^{ax}\sin bx\,dx &= \frac{1}{a^2+b^2}[ae^{ax}\sin bx - be^{ax}\cos bx]
\end{aligned}
$$

(vgl. Bl. 2, Bsp. J).

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi(1+n^2)}[ne^x\sin nx + e^x\cos nx]\Big|_{-\pi}^\pi \\
b_n &= \frac{1}{\pi(1+n^2)}[e^x\sin nx - ne^x\cos nx]\Big|_{-\pi}^\pi
\end{aligned}
$$

usw.

11.2.5 Thema—die schwingende Saite

41. Wir entwickeln $f(x,0)$ in eine Fouriersinusreihe, vgl. Blatt 3.

$$\begin{aligned}
b_n &= \tfrac{2}{\pi}\cdot\int_0^\pi f(x,0)\cdot\sin nx\;dx\\
&= \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi/2} hx\frac{2}{\pi}\cdot\sin nx\;dx + \frac{2}{\pi}\cdot\int_{\pi/2}^{\pi}(2h-h\frac{2}{\pi}x)\cdot\sin nx\;dx\\
&= \frac{4h}{\pi^2}\cdot\int_0^{\pi/2} x\cdot\sin nx\;dx + \frac{4h}{\pi^2}\cdot\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi-x)\cdot\sin nx\;dx\\
&\overset{part.Int.}{=} \frac{4h}{\pi^2}\cdot\left((-x/n\cdot\cos nx)\Big|_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}1/n\cdot\cos nx\;dx\right)\\
&\quad+\frac{4h}{\pi^2}\cdot\left(\frac{\pi}{n}\cdot(-\cos nx)\Big|_{\pi/2}^{\pi}-\left(\left(\frac{-x}{n}\cdot\cos nx\right)\Big|_{\pi/2}^{\pi}+\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{1}{n}\cdot\cos nx\;dx\right)\right)\\
&= \frac{4h}{\pi^2}\cdot\left(\frac{-\pi}{2n}\cdot\cos(n\pi/2)+0+\left(\frac{1}{n^2}\cdot\sin nx\right)\Big|_0^{\pi/2}\right)\\
&\quad+\frac{4h}{\pi^2}\cdot\left(\frac{-\pi}{n}\cdot(\cos n\pi-\cos(n\pi/2))\right.\\
&\quad-\left.\left(\left(\frac{-\pi}{n}\cdot\cos n\pi+\frac{\pi}{2n}\cdot\cos(n\pi/2)\right)+\frac{1}{n^2}\cdot\sin nx\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right)\right)\\
&= \frac{4h}{\pi^2}\cdot\left(\frac{-\pi}{2n}\cdot\cos(n\pi/2)+\frac{1}{n^2}\cdot\sin n\pi/2-0\right)\\
&\quad+\frac{4h}{\pi^2}\cdot\left(\frac{-\pi}{n}\cdot((-1)^n-\cos(n\pi/2))\right.\\
&\quad-\left.\left(\frac{-\pi}{n}(-1)^n+\frac{\pi}{2n}\cdot\cos(n\pi/2)+0-\frac{1}{n^2}\cdot\sin n\pi/2\right)\right)\\
&= \frac{-2h}{\pi n}\cdot\cos(n\pi/2)+\frac{4h}{\pi^2n^2}\cdot\sin n\pi/2-\frac{4h}{\pi n}(-1)^n+\frac{4h}{\pi n}\cdot\cos(n\pi/2)\\
&\quad+\frac{4h}{\pi n}(-1)^n-\frac{2h}{\pi n}\cdot\cos(n\pi/2)+\frac{4h}{\pi^2n^2}\cdot\sin n\pi/2\\
&= \frac{8h}{\pi^2n^2}\cdot\sin n\pi/2
\end{aligned}$$

Also

$b_{4k} = b_{4k+2} = 0$

$b_{4k+1} = \frac{8h}{\pi^2(4k+1)^2}\cdot\sin(4k+1)\pi/2 = \frac{8h}{\pi^2(4k+1)^2}\cdot\sin\pi/2 = \frac{8h}{\pi^2(4k+1)^2}$

$b_{4k+3} = \frac{8h}{\pi^2(4k+3)^2}\cdot\sin(4k+3)\pi/2 = \frac{8h}{\pi^2(4k+3)^2}\cdot\sin 3\pi/2 = \frac{-8h}{\pi^2(4k+3)^2}$,

woraus folgt:

$b_{2j} = 0, \quad b_{2j-1} = \frac{(-1)^{j+1}8h}{\pi^2(2j-1)^2}$

und damit die behauptete Reihendarstellung.

Differenzieren von

$$u(x,t) = \frac{8h}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)^2}\cdot\sin\frac{(2m-1)\pi x}{2}\cdot\cos\frac{(2m-1)\pi t}{2}$$

liefert:

$$u_x(x,t) = \frac{8h}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m-1)\pi(-1)^{m+1}}{2(2m-1)^2}\cdot\cos\frac{(2m-1)\pi x}{2}\cdot\cos\frac{(2m-1)\pi t}{2}$$

$$u_{xx}(x,t) = \frac{-8h}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m-1)^2\pi^2(-1)^{m+1}}{2^2(2m-1)^2}\cdot\sin\frac{(2m-1)\pi x}{2}\cdot\cos\frac{(2m-1)\pi t}{2}$$

$$u_t(x,t) = \frac{-8h}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m-1)\pi(-1)^{m+1}}{2(2m-1)^2}\cdot\sin\frac{(2m-1)\pi x}{2}\cdot\sin\frac{(2m-1)\pi t}{2}$$

$$u_{tt}(x,t) = \frac{-8h}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m-1)^2\pi^2(-1)^{m+1}}{2^2(2m-1)^2}\cdot\sin\frac{(2m-1)\pi x}{2}\cdot cos\frac{(2m-1)\pi t}{2}$$

Also ist die Differentialgleichung $u_{xx} = u_{tt}$ erfüllt.
$u(x,0) = f(x,0)$ gilt wegen des Fourierreihenansatzes.
$u(0,t) = u(2,t) = u_t(x,t) = 0$ ist erfüllt wegen $\sin 0 = \sin\pi = 0$.

42. $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\frac{x}{\pi})\sin nx\,dx \overset{Subst. x=\pi y}{=} 2\int_0^1 f(y)\sin n\pi y\,dy$

$$= 2\left(\int_0^\epsilon \frac{hy}{\epsilon}\sin n\pi y\,dy + \frac{h}{1-\epsilon}\int_\epsilon^1 (1-y)\sin n\pi y\,dy\right)$$

$$= 2\left[\frac{h}{\epsilon}\left((y\frac{-\cos n\pi y}{n\pi})\Big|_0^\epsilon + \int_0^\epsilon 1\cdot\frac{\cos n\pi y}{n\pi}\,dy\right)\right.$$
$$\left. + \frac{h}{1-\epsilon}\left(\frac{-\cos n\pi y}{n\pi}\Big|_\epsilon^1 - \left((y\frac{-\cos n\pi y}{n\pi})\Big|_\epsilon^1 + \int_\epsilon^1 1\cdot\frac{\cos n\pi y}{n\pi}\,dy\right)\right)\right]$$

$$= 2\left[\frac{h}{\epsilon}(\frac{-\epsilon\cos n\pi\epsilon}{n\pi} + 0 + \frac{\sin n\pi y}{n^2\pi^2}\Big|_0^\epsilon)\right.$$
$$\left. + \frac{h}{1-\epsilon}\left(\frac{-\cos n\pi}{n\pi} + \frac{\cos n\pi\epsilon}{n\pi} - (\frac{-\cos n\pi}{n\pi} + \frac{\epsilon\cos n\pi\epsilon}{n\pi} + \frac{\sin n\pi y}{n^2\pi^2}\Big|_\epsilon^1)\right)\right]$$

$$= 2\left[\frac{h}{\epsilon}(\frac{-\epsilon\cos n\pi\epsilon}{n\pi} + \frac{\sin n\pi\epsilon}{n^2\pi^2} - 0)\right.$$
$$\left. + \frac{h}{1-\epsilon}\left(\frac{-(-1)^n + \cos n\pi\epsilon}{n\pi} + \frac{(-1)^n - \epsilon\cos n\pi\epsilon}{n\pi} - 0 + \frac{\sin n\pi\epsilon}{n^2\pi^2})\right)\right]$$

$$= 2\left(\frac{-h\cos n\pi\epsilon}{n\pi} + \frac{h\sin n\pi\epsilon}{\epsilon n^2\pi^2} + \frac{h}{1-\epsilon}\frac{1-\epsilon}{n\pi}\cos n\pi\epsilon + \frac{h}{1-\epsilon}\frac{\sin n\pi\epsilon}{n^2\pi^2}\right)$$

$$= \frac{2h}{n^2\pi^2}\sin n\pi\epsilon(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{1-\epsilon}) = \frac{2h}{\epsilon(1-\epsilon)n^2\pi^2}\sin n\pi\epsilon$$

43. Der Ansatz $V(x,y) = X(x)\cdot Y(y)$ erfordert zuerst die partiellen Ableitungen
$V_x = X'(x)Y(y)$ und $V_{xx} = X''(x)Y(y)$ sowie
$V_y = X(x)Y'(y)$ und $V_{yy} = X(x)Y''(y)$
Eingesetzt in die partielle Differentialgleichung erhalten wir:
$V_{xx} + V_{yy} = X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$ für alle (x,y) aus dem Gültigkeitsbereich der Differentialgleichung
Somit folgt
$X''(x)/X(x) = -Y''(y)/Y(y) = c = const.$
und damit die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$X''(x) - cX(x) = 0$ und $Y''(y) + cY(y) = 0$,
welche die beiden linear unabhängigen Lösungen $e^{\sqrt{c}x}$ und $e^{-\sqrt{c}x}$ bzw. $e^{\sqrt{-c}y}$ und $e^{-\sqrt{-c}y}$ besitzen, welche sich abhängig vom Vorzeichen von c durch sinh und cosh (Fall $c \geq 0$) bzw. sin und cos (Fall $c < 0$) ausdrücken läßt.
Zusammen: $V(x,y) = (Ae^{\sqrt{c}x} + Be^{-\sqrt{c}x})(Ce^{\sqrt{-c}y} + De^{-\sqrt{-c}y})$

44. Ähnlich wie in 43.) bilden wir zuerst die partiellen Ableitungen zum Ansatz
$V(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t)$:
$V_t = X(x)Y(y)T'(t)$ und $V_{tt} = X(x)Y(y)T''(t)$ sowie
$V_{xx} = X''(x)Y(y)T(t)$ und $V_{yy} = X(x)Y''(y)T(t)$
Eingesetzt in die partielle Differentialgleichung erhalten wir:
$XYT'' = X''YT + XY''T$ für alle (x,y,t)
Mittels Division durch $XYT(\neq 0$ vorausgesetzt) folgt
$\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = c = const.$ (analog wie in 43.))
Somit muß T der gewöhnlichen Differentialgleichung
$T''(t) - cT(t) = 0$ genügen und es gilt
$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = c,$
woraus analog folgt, daß
$\frac{X''(x)}{X(x)} = d = const.$ und $\frac{Y''(y)}{Y(y)} = c - d = const.$

Zusammen erhalten wir:
$V(x,y,t) = (Ae^{\sqrt{c}t} + Be^{-\sqrt{c}t})(Ce^{\sqrt{d}x} + De^{-\sqrt{d}x})(Ee^{\sqrt{c-d}y} + Fe^{-\sqrt{c-d}y})$

45. Wir verwenden - so wie in Ü 46 - die Variable θ statt ϕ.
Wir bestimmen wieder zuerst die partiellen Ableitungen
$V_r = R'(r)\Phi(\theta), V_{rr} = R''(r)\Phi(\theta)$ und $V_\theta = R(r)\Phi'(\theta)$.
Eingesetzt in die Laplacegleichung in Polarkoordinatendarstellung erhalten wir:
$\Delta V = R''\Phi + \frac{1}{r}R'\phi + \frac{1}{r^2}R\Phi'' = 0$
Durch Division mit $R\Phi$ und Multiplikation mit r erhalten wir
$r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{\Phi''(\theta)}{\Phi(\theta)} = 0$ für alle (r,θ) des Gültigkeitsbereiches der Laplacegleichung, woraus wie schon vorher folgt
$r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\theta)}{\Phi(\theta)} = c = const.$
Also muß R bzw. Φ der gewöhnlichen Differentialgleichung
$r^2R'' + rR' - cR = 0$ bzw. $\Phi'' + c\Phi = 0$ genügen.
Wir denken an $c = n^2$, also $c \geq 0$. Der Ansatz $R(r) = r^\alpha$ führt auf die Lösungen $R(r) = r^{\pm\sqrt{c}}$.
Die Lösung $R(r) = r^{-\sqrt{c}}$ scheidet aus, da diese Funktion bei $r = 0$ unbeschränkt ist.
Also $V(r,\theta) = r^{\sqrt{c}}(Ae^{\sqrt{-c}\theta} + Be^{-\sqrt{-c}\theta})$

46. 1.Zeile: Lies r,θ statt r,ϕ
3.Zeile: $r^n \cos n\theta, r^n \sin n\theta$ statt $r^n \cos\theta, r^n \sin\theta$

a.) Sei $v := r^n \cos n\theta, \qquad w := r^n \sin n\theta$
Da (gilt auch für $n = 0, n = 1$)
$v_r = nr^{n-1}\cos n\theta, \quad v_{rr} = n(n-1)r^{n-2}\cos n\theta$
$v_\theta = -nr^n \sin n\theta, \quad v_{\theta\theta} = -n^2r^n \cos n\theta$
$w_r = nr^{n-1}\sin n\theta, \quad v_{rr} = n(n-1)r^{n-2}\sin n\theta$

$v_\theta = nr^n \cos n\theta, \quad v_{\theta\theta} = -n^2 r^n \sin n\theta$
folgt in Polarkoordinaten tatsächlich
$\Delta v = n(n-1)r^{n-2}\cos n\theta + nr^{n-1-1}\cos n\theta - n^2 r^{n-2}\cos n\theta = 0$ und
$\Delta w = n(n-1)r^{n-2}\sin n\theta + nr^{n-1-1}\sin n\theta - n^2 r^{n-2}\sin n\theta = 0$

b.) Wegen a.) ist jede Linearkombination der Funktionen aus a.) selbst wieder eine Lösung der Laplacegleichung in Polarkoordinaten, also ist

$$u(r,\theta) := \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n r^n \cos n\theta + \beta_n r^n \sin n\theta)$$

für beliebige $\alpha_n, n \in \mathbf{N}_0, \quad \beta_n, n \in \mathbf{N}$ wieder eine Lösung.
Diese freien Parameter ziehen wir nun dazu heran, um die Randbedingung $V(1,\theta) = f(\theta)$ zu erfüllen, und zwar
$\alpha_0 := \frac{a_0}{2}, \alpha_n := a_n, \beta_n := b_n$ für $n \in \mathbf{N}$, wobei die a_n und b_n die auf Blatt 3 definierten Fourierkoeffizienten sind.

47. Anwendung von 46.b.) unter Berücksichtigung der 2π-Periodizität von sin bzw. cos
$f(\theta)$ ist bzgl. π eine ungerade Funktion, daher gilt:
$a_n = 0$
$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta \, d\theta \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\sin n\theta\, d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin n\theta \, d\theta\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{-\cos n\theta}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{-\cos n\theta}{n}\Big|_{\pi}^{2\pi}\right) \\
&= \frac{1}{\pi n}(-\cos n\pi + 1 + \cos 2n\pi - \cos n\pi) = \frac{2}{\pi n}(1-\cos n\pi) = \frac{2}{\pi n}(1-(-1)^n)
\end{aligned}$$
Also $b_n = 0$ für n gerade und $b_n = \frac{4}{\pi n}$ für n ungerade. Also

$$u(r,\theta) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n-1)}r^{2n-1}\sin(2n-1)\theta$$

48. Da
$(u_n)_{tt} = -n^2 \sin nx \sin nt, \quad (u_n)_{xx} = -n^2 \sin nx \sin nt$
ist die partielle Differentialgleichung erfüllt.
Da $\sin 0 = 0 = \sin n\pi$ sind die die ersten drei (= die homogenen) Randbedingungen erfüllt.

49. Wie in 46.b.) ist wieder jede Linearkombination

$$V(x,t) := \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n u_n(x,t)$$

der u_n aus 48.) eine Lösung der partiellen Differentialgleichung sowie der 3 homogenen Rand- bzw. Anfangsbedingungen, d.h., die Parameter β_n können dazu verwendet werden, die 4.Bedingung (=2.Anfangsbedingung) zu erfüllen.
Da

$$V_t(x,t) := \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n n \sin nx \cos nt$$

führt diese Bedingung auf

$$V_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n n \sin nx = g(x)$$

Wählen wir $\beta_n := b_n/n$ mit b_n den Fouriersinuskoeffizienten nach Blatt 3, haben wir eine Reihendarstellung für die Lösung der partiellen Differentialgleichung in 48.) gefunden.

50. Anwendung von 49.)
$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi - x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi x - x^2)\sin nx\,dx$
Als Teilprobleme lösen wir
$A := \int_0^\pi x\sin nx\,dx \overset{part.Int.}{=} x\frac{-\cos nx}{n}\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos nx}{n}\,dx = -\pi\frac{(-1)^n}{n} + 0 + \frac{\sin nx}{n^2}\Big|_0^\pi$
$= -\pi\frac{(-1)^n}{n}$
sowie
$B := \int_0^\pi x^2\sin nx\,dx \overset{part.Int.}{=} x^2\frac{-\cos nx}{n}\Big|_0^\pi + \int_0^\pi 2x\frac{\cos nx}{n}\,dx$
$= -\pi^2\frac{(-1)^n}{n} + 0 + 2\left(x\frac{\sin nx}{n^2}\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin nx}{n^2}\,dx\right) = -\pi^2\frac{(-1)^n}{n} + 2\left(0 - 0 + \frac{\cos nx}{n^3}\Big|_0^\pi\right)$
$= -\pi^2\frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{n^3}\left((-1)^n - 1\right)$
Damit ergibt sich für
$b_n = \frac{2}{\pi}(\pi A - B) = \frac{2}{\pi}\left(-\pi^2\frac{(-1)^n}{n} + \pi^2\frac{(-1)^n}{n} - \frac{2}{n^3}((-1)^n - 1)\right) = \frac{4}{\pi n^3}(1 - (-1)^n)$,
also $b_n = 0$ für n gerade bzw. $b_n = \frac{8}{\pi n^3}$ für n ungerade und damit für die Reihe

$$V(x,t) := \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}\sin(2n-1)x\sin(2n-1)t$$

11.2.6 Thema—Induktion

51. $n = 1\surd$
$n \to n+1$: zu zeigen ist:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Induktionsannahme:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\begin{aligned} LS = \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \quad \text{(Induktionsannahme)} \\ &= RS \quad \text{(einfache Algebra).} \end{aligned}$$

52. Wir zeigen zunächst $(n+1)^2 \le 2n^2$ oder $n^2 - 2n - 1 \ge 0$ für $(n \ge 4)$. Aber $n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2 \ge 0$ falls $n \ge 3$.

    Z.z. $2^n \ge n^2 \quad (n \ge 4)$

    $n = 4 \quad LS = 2^4 = 16, \quad RS = 4^2 = 16\surd$

    $n \to n+1$ Induktionsannahme $2n \ge n^2$.

    Z.z. $2^{n+1} \ge (n+1)^2$

$$\begin{aligned} LS &= 2 \cdot 2^n \ge 2n^2 \quad \text{(Induktionsannahme)} \\ &\ge (n+1)^2. \end{aligned}$$

55. (**54.** ist der Spezialfall $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$.)

    Induktion: $LS = 1 + x_1 \quad RS = 1 + x_1\surd$

    $n \to n+1$ Induktionsannahme: $(1+x_1)\ldots(1+x_n) \ge 1 + x_1 + \cdots + x_n$.

    Z.z.

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) \ge 1 + x_1 + \cdots + x_n.$$

    Wir multiplizieren: $\times(1 + x_{n+1})$ (N.B. $1 + x_n \ge 0$).

$$\begin{aligned} (1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_{n+1}) &\ge (1 + x_1 + \cdots + x_n)(1 + x_{n+1}) \\ &= 1 + x_1 \cdots + x_{n+1} + \underbrace{x_{n+1}(x_1 + \cdots + x_n)}_{\ge 0} \\ &\ge 1 + x_1 + \cdots + x_{n+1}. \end{aligned}$$

58. Induktion: $n = 1 \quad LS = a_1 b_1 = RS$

    $n \to n+1$ Induktionsannahme:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}).$$

    Es gilt dann:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} a_k b_k &= \sum_{k=1}^{n} a_k b_k + a_{n+1} b_{n+1} \\ &= A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + a_{n+1} b_{n+1} \quad \text{(Induktionsannahme)} \\ &= A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_{n+1} b_{n+1} - A_n b_{n+1} \\ &= A_{n+1} b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} A_k (b_k - b_{k+1}). \end{aligned}$$

59. Aus $(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r$ folgt (Differentiation):

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{r=1}^{n} r \binom{n}{r} x^r.$$

    Setze jetzt $x = -1$.

60. Wir zeigen $n! \leq n^n$

$n = 1 \quad LS = 1 = RS.$

$n \to n+1$

Induktionsannahme $n! \leq n^n$.

Z.z.

$$(n+1)! \leq (n+1)^{n+1}.$$

Aber

$$\begin{aligned}(n+1)! &= (n+1)n! \leq (n+1)n^n \quad \text{(Induktionsannahme)}\\ &\leq (n+1)(n+1)^n = (n+1)^{n+1}.\end{aligned}$$

11.2.7 Thema—reelle Zahlen, Konvergenz

61. $\sqrt{2}$ ist irrational: Nehmen wir an, $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbf{N}$. Dann ist $2q^2 = p^2$. Weil $p = 2^m p_0$, $q = 2^n q_0$ für geeignete $m, n \in \mathbf{N}_0$, p_0, q_0 ungerade, heisst es, daß $2^{2n+1} q_0^2 = 2^{2m} p_0^2$, und das ist ein Widerspruch.

Sei $A = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $B = \sqrt{2} - \sqrt{3}$. Weil $A + B = 2\sqrt{2}$ können nicht beide Zahlen A und B rational sein. Weil $A \cdot B = -1$, ist entweder A und B rational oder A und B irrational. Es müssen also A und B irrational sein.

62. Sei $a = \min(a_1, \dots, a_n)$ und $A = \max(a_1, \dots, a_n)$. Dan ist

$$a = a(p_1 + \cdots + p_n) \leq a_1 p_1 + \cdots + a_n p_n \leq A(p_1 + \cdots + p_n) = A.$$

63. Seien $a, b > 0$. Dann

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \;\Leftrightarrow\; 4ab \leq a^2 + b^2 + 2ab \;\Leftrightarrow\; 0 \leq (a-b)^2.$$

64. Die Familie aller reellen Polynome bildet einen Ring: Die Axiome der Addition sind erfüllt (0 ist das neutrale Element und $p + (-p) = 0$ für jedes Polynom p). Es ist auch $p(qs) = (pq)s$ und $p(q+s) = pq + ps$ für alle Polynome p, q, s.

Die Familie aller rationalen Funktionen bildet einen Körper: Die Axiome der Addition sind erfüllt ähnlich wie bei der Polynomen. Multiplikation is komutativ und associativ; 1 ist das neutrale Element der Multiplikation. Für alle Polynome $P, Q \neq 0$ ist $\frac{P}{Q} \cdot \frac{Q}{P} = 1$. Für alle Polynome P_1, P_2, P_3, und $Q_1, Q_2, Q_3 \neq 0$ ist $\frac{P_1}{Q_1}(\frac{P_2}{Q_2} + \frac{P_3}{Q_3}) = \frac{P_1}{Q_1} \cdot \frac{P_2}{Q_2} + \frac{P_1}{Q_1} \cdot \frac{P_3}{Q_3}$.

Die Familie aller $n \times n$ Matrizen bildet einen Ring: Die Axiome der Addition und der Multiplikation sind erfüllt (die 0-Matrix ist das neutrale Element der Addition, die Einheitsmatrix ist das neutrale Element der Multiplikation). $A(B+C) = AB + AC$ für alle Matrixen A, B, C.

65. Die Diskriminante der quadratischen Funktion $f(t) = \sum_{k=1}^n (a_k t + b_k)^2$ ist

$$D(t) = 4\left((\sum_{k=1}^n a_k b_k)^2 - (\sum_{k=1}^n a_k^2)(\sum_{k=1}^n b_k^2) \right).$$

Weil $f(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbf{R}$ ist $D(t) \leq 0$ für alle $t \in \mathbf{R}$ und die Ungleichung ist damit bewiesen.

66. Setze $a_k = \sqrt{x_k}$ und $b_k = \frac{1}{\sqrt{x_k}}$ in die Cauchy-Schwarz Ungleichung.

67. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-2n+1}{n^2-6} = 1$, $\lim_{n\to\infty} \frac{6(-1)^n n+11}{n^2-5} = 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-20n}{n+1} = \infty$.

68. Es ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} n^{j-k} = \binom{k}{k} = 1,$$

und für $m < k$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^m}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} n^{j-k} = 0.$$

Sei $p(t) = a_k t^k + \cdots + a_0$. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n+1)}{p(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_k(n+1)^k + \cdots + a_0}{a_k n^k + \cdots + a_0} \cdot \frac{\frac{1}{n^k}}{\frac{1}{n^k}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_k \frac{(n+1)^k}{n^k} + a_{k-1} \frac{(n+1)^{k-1}}{n^k} + \cdots + a_0 \frac{1}{n^k}}{a_k n^{k-k} + a_{k-1} n^{(k-1)-k} + \cdots + a_0 n^{-k}} =$$

69.

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \frac{n-m}{n+m} = \lim_{n\to\infty} -1 = -1$$

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{n-m}{n+m} = \lim_{m\to\infty} 1 = 1$$

70. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Für $1 \leq m < n$ ist

$$E := \left| \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n) - a \right| = \left| \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_m) - \frac{m}{n}a + \frac{1}{n}((a_{m+1} - a) + \cdots + (a_n - a)) \right|.$$

Weil $\lim a_n = a$, die Folge (a_n) ist beschränkt. Es existiert also $A > 0$ so, daß $|a_k| \leq A$ für alle $k \in \mathbf{N}$. Wähle $m \in \mathbf{N}$ so daß $|a_k - a| < \varepsilon$ für alle $k \geq m$, $\frac{m}{n}A < \varepsilon$, und $\frac{m}{n}|a| < \varepsilon$. Dann ist

$$E \leq \frac{m}{n}A + \frac{m}{n}|a| + \frac{n-m}{n}\varepsilon \leq 3\varepsilon,$$

und $\lim \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n) = a$.

11.2.8 Thema—Stetigkeit

71. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+3} - \sqrt[5]{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^7+1}} = 0$.

72. $\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2} = \lim_{x\to a} \frac{(\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b})(\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b})}{(x^2-a^2)(\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b}} =$
$\lim_{x\to a} \frac{x-a}{(x^2-a^2)(\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b})} = \lim_{x\to a} \frac{1}{(x+a)(\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b})} = \frac{1}{4a\sqrt{a-b}}$.

73. $y-4 = x^2-4 = (x-2)(x+2)$. Also gilt $|y-4| \leq |x-2|\,|x+2| \leq 3\delta$, falls $|x-2| \leq \delta$ und $|x-2| \leq 1$. Wähle also $\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{3}, 1\right)$.

74. Ja.

75. $a = 1$.

76. Da $\cos\frac{1}{x} = 1$ für $x = \frac{1}{2n\pi}$, bzw. -1 für $x = \frac{1}{(2n+1)\pi}$, existiert der Limes nicht.

77. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+3x^2}-\sqrt{1-3x^2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1+3x^2-(1-3x^2)}{x(\sqrt{1+3x^2}+\sqrt{1-3x^2})} = 0.$

78. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4-7x^2-1}{x^4+7} = 3.$

79. Die Funktion ist nur an der Stelle $x = 0$ stetig.

80. Beide sind stetig. Beide Lipschitz stetig auf $[1, 2]$, nicht aber auf $]0, 1]$.

11.2.9 Thema—Wiederholung

81. $\sin x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ mit $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \cos nx\, dx$ also $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\, dx = \frac{4}{\pi}$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos nx\, dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-1}{1+n}\cos(1+n)x + \frac{1}{1-n}\cos(1+n)x\right]\int_0^{\pi} \\ &= \begin{cases} -\frac{4}{\pi}\frac{1}{4m^2-1} & n = 2m \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

82. $|\sin x|$ ist die 2π-periodische gerade Erweiterung von $\sin x$ ($x \in [0, \pi]$). Daher gilt: $|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$ für jedes x aus $\mathbf{R}$.

Setzen wir $x = 0$, so bekommen wir:

$$0 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} \text{ d.h. } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}.$$

Setzen wir $x = \frac{\pi}{2}$, so bekommen wir:

$$1 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{4n^2-1}$$

also

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{4n^2-1} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{2}{\pi} - 1\right) \text{ d.h. } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

83. $\int_0^{\infty} e^{-tx} \sin x\, dx = \frac{1}{(t^2+1)}(te^{-tx}\sin x - e^{-tx}\cos x)$ (Blatt 2, Lösung J), also $\int_0^{\infty} e^{-tx}\sin x\, dx = \frac{1}{(t^2+1)}$.

84.

$$F(t) = \int_0^{\infty} e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\, dx \Rightarrow F'(t) = -\int_0^{\infty} e^{-tx}\sin x\, dx = \frac{-1}{t^2+1} \text{ (Bsp. 83.)}$$

85. Daher gilt: $F(t)$ ist eine Stammfunktion von $\frac{-1}{t^2+1}$, also $F(t) = -\arctan t + c$ (c eine Konstante).

Aber $\lim_{t\to\infty} F(t) = 0$, $\lim_{t\to\infty} \arctan t = \frac{\pi}{2}$ (Bild!). Daher gilt: $F(t) = \arctan t + \frac{\pi}{2}$ und damit $F(0) = \frac{\pi}{2}$.

86.

$$\begin{aligned} u_n &= \cos nx \cos nt \Rightarrow \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = -n^2 \cos nx \cos nt = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= -n \sin nx \cos nt \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0. \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -n \cos nx \sin nt \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0. \end{aligned}$$

87. Wir berechnen die Fouriercosinusreihe $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ für bx, also

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi bx dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{bx^2}{2}\right)\Big|_0^\pi = b\pi \\ a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi bx \sin nx \, dx \\ &= \frac{2b}{\pi}\int_0^\pi x \sin nx \, dx \\ &= \frac{2b}{\pi}\left(\left[\frac{-\cos nx}{n} x\right]_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos nx \, dx\right)? \end{aligned}$$

88. Für $u(x,t) = f(x+t) + f(x-t)$ gilt: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x+t) + f''(x-t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

89. Nach **88.** gilt: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Randbedingungen: $u(x,0) = \frac{1}{2}[\tilde{f}(x) + \tilde{f}(x)] = f(x) \quad (x \in [0,\pi])$

$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}[-\tilde{f}(x-t) + \tilde{f}(x+t)]$, also $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = [-\tilde{f}(x) + \tilde{f}(x)] = 0$.

90. Die Funktionen $u(x,y) = y$ bzw. $u_n(x,y) = \sinh ny \cos nx$ sind Lösungen der Laplaceschen Gleichung. Damit ist $u(x,y) = \frac{1}{2}b_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sinh ny \cos nx$ eine Lösung. Außerdem gilt: $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ falls $x = 0$ oder π, $u(x,0) = 0$,

$$u(x,\pi) = \frac{1}{2}b_0\pi + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sinh n\pi \cos nx.$$

Falls $f(x)$ die Darstellung

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

hat, (d.h. $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x) \cos nx \, dx$), dann wählen wir b_n, sodaß

$$\frac{1}{2}b_0\pi = a_0 \text{ d.h. } b_0 = \frac{2a_0}{\pi}.$$

11.2.10 Thema—Differentiation

91. $\frac{d}{dx}(1-x^6)^{100} = -600x^5(1-x^6)^{99}$.

92. $(\ln x)^x = e^{x \ln \ln x}$ – daher

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\ln x)^x &= e^{x\ln\ln x}\frac{d}{dx}(x\ln\ln x) \\
&= (\ln x)^x\left(\ln\ln x + x\frac{d}{dx}\ln\ln x\right) \\
&= (\ln x)^x\left(\ln\ln x + x\frac{x}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}\right) \\
&= (\ln x)^x\left(\ln\ln x + \frac{1}{\ln x}\right).
\end{aligned}$$

93. $\frac{d}{dx}(1+x+\cdots+x^n) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)$.

Daher

$$\begin{aligned}
1+2x+\cdots+nx^{n-1} &= \frac{(1-x)(-(n+1)x^n)+(1-x^{n+1})}{(1-x)^2} \\
&= \frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x^2)}.
\end{aligned}$$

94.

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \Leftrightarrow e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \Rightarrow x = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} = \tanh y \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\frac{1}{2}(\ln(1+x)-\ln(1-x)) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right) \\
&= \frac{1}{1-x^2} \\
\frac{dx}{dy} &= \frac{1}{\cosh^2 y}.
\end{aligned}$$

Also $\frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \cosh^2 y$. Man sieht, dass $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$, da $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1-\tanh^2 y} = \frac{\cosh^2 y}{\cosh^2 y - \sinh^2 y} = \cosh^2 y$.

96. $y = \frac{1-x}{1+x} = \frac{2-(1+x)}{1+x} = \frac{2}{1+x} = 2(1+x)^{-1}$.

Daraus folgt leicht:

$$y^{(n)} = 2(-1)^n(1+x)^{-n-1}n!.$$

98. $\frac{d}{dx}(x^\alpha y^\beta - \alpha x) = 0 \Leftrightarrow \alpha x^{\alpha-1}y^\beta - \alpha = 0 \Leftrightarrow x = y^{\frac{\beta}{\alpha-1}} = y$ (da $\alpha+\beta=1$).

Dies ist ein Maximum (Bild!).

Damit gilt: $x^\alpha y^\beta - \alpha x \leq y^\alpha y^\beta - \alpha y^\alpha = (1-\alpha)y$, d.h. $x^\alpha y^\beta \leq \alpha x + \beta y$.

Setze

$$X = \sum_{j=1}^n x_j^p, \quad Y = \sum_{j=1}^n y_j^q, \quad x = \frac{x_j^p}{x}, \quad y = \frac{y_j^q}{Y}, \quad \alpha = \frac{1}{p}, \beta = \frac{1}{q}:$$

Es gilt dann:

$$\left(\frac{x_j^p}{X}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\frac{y^q}{X}\right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}\frac{x_j^p}{X} + \frac{1}{q}\frac{y_j^q}{Y}.$$

Wir summieren beide Seiten über j und bekommen $\frac{1}{X^{\frac{1}{p}}Y^{\frac{1}{q}}}\sum_{j=1}^{n} x_j y_j \leq \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. Daraus folgt $\sum_{j=1}^{n} x_j y_j \leq X^{\frac{1}{p}}Y^{\frac{1}{q}}$ Q.E.D.

99. $\frac{d^n}{dx^n}\ln x = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \qquad (n \geq 1).$
Damit ist die Taylorreihe

$$\ln x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n}\frac{(-1)^{n-1}}{x_0^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n \quad \text{für} \quad x_0 = 1.$$

100. Induktionsbeweis: $n = 1\surd$
$n \to n+1$ Induktionsannahme:

$$\begin{aligned}
(f\cdot g)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}g^{(n-k)} \\
\text{Zu zeigen ist:}\quad (f\cdot g)^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k} f^{(k)}g^{(n+1-k)}. \\
\text{Aber}\quad (f\cdot g)^{(n+1)} &= ((f\cdot g)^{(n)})' \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}[f^{(k+1)}g^{(n-k)} + f^{(k)}g^{(n-1-k)}] \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} f^{(k)}g^{(n+1-k)}\left[\left(\binom{n}{k-1}\right)+\binom{n}{k}\right] \quad \text{Indexverschiebung} \\
& \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} f^{(k)}g^{(n+1-k)}\surd \\
(x^2\sin x)^{9999} &\doteq x^2\frac{d^{9999}}{dx^{9999}}\sin x + 9999\cdot 2x\frac{d^{9998}}{dx^{9998}}\sin x + \frac{9999\cdot 9998}{2}\cdot 2\frac{d^{9997}}{dx^{9997}}\sin \\
&= -x^2\cos x - 19998\sin x + 9999\cdot 9998\cos x.
\end{aligned}$$

11.2.11 Thema—Integration

101. a)

$$\int\frac{dx}{(2x-3)^5} = \int\frac{1}{u^5}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\frac{v^{-4}}{-4} = -\frac{1}{8}(2x-3)^{-4} \quad (u = 2x-3).$$

b)

$$\int x^2\sqrt[5]{x^3+2}\,dx = \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{5}}\,dv = \frac{5}{18}(x^3+2)^{\frac{6}{5}} \quad (u = x^3+2).$$

102. a)

$$\int\frac{x}{x+4}dx = \int\left(1-\frac{4}{x+4}\right)dx = x - 4\ln(x+4) \quad (x > -4).$$

b) Zunächst Partialbruchzerlegung: $\frac{1}{x(x-1)} = \frac{-1}{x}+\frac{1}{x-1}$.

Also

$$\int\frac{dx}{x(x+1)} = \int\left(\frac{-1}{x}+\frac{1}{x-1}\right)dx = \ln\frac{x-1}{x} \quad (x > 1).$$

103. d)

$$\begin{aligned}
\int \arctan\sqrt{x}\,dx &= 2\int y\arctan y\,dy \quad (y=\sqrt{x})\\
&= y^2\arctan y - \int \frac{y^2}{1+y^2}\,dy\\
&= y^2\arctan y - \int \left(1-\frac{1}{1+y^2}\right)\,dy\\
&= y^2\arctan y - y + \arctan y\\
&= (x+1)\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x}.
\end{aligned}$$

104. a)

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}\,dx &= \int \frac{2t\,dt}{1+t} \quad (t^2 = 1+x)\\
&= 2\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\,dt = 2(t-\ln(1+t))\\
&= 2(\sqrt{x+1} - \ln(1+\sqrt{x+1})).
\end{aligned}$$

105. Für die angegebene Partition ist die Riemannsumme:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} e^{i/n} = \frac{1}{n}\left(\frac{1-(e^{\frac{1}{n}})^n}{1-e^{\frac{1}{n}}}\right) \to e-1.$$

(Denn $\lim_{x\to\infty} x(1-e^{\frac{1}{x}}) = \lim_{y\to 0+} \frac{1}{y}(1-e^y) = -1.$)

106. Für die angegebene Partition ist die Riemannsumme:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{a^i}(a^{i+1}-a^i) = \sum_{i=0}^{n-1}(a-1) = n(a-1) = n(\sqrt[n]{2}-1) \to \ln 2.$$

(Denn $\lim_{x\to\infty} x(\sqrt[x]{2}-1) = \lim_{y\to 0+} \frac{1}{y}(2^y-1) = \ln 2.$)

108.

$$\begin{aligned}
\int x^2 e^{ax}\,dx &= x^2\frac{1}{a}e^{ax} - \int 2x\frac{1}{a}e^{ax}\,dx\\
&= \frac{1}{a}x^2e^{ax} - \frac{2}{a}\int xe^{ax}\,dx\\
&= \frac{1}{a}x^2e^{ax} - \frac{2}{a}\left(\frac{1}{a}x^{ax} - \frac{1}{a}\int e^{ax}dx\right)\\
&= \frac{e^{ax}}{a}\left(x^2 - 2\frac{x}{a} + \frac{2}{a^2}\right).
\end{aligned}$$

109. Für $F_{m,n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^n x\,dx$ gilt

$$\begin{aligned}
F_{0,0} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}\\
F_{1,0} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = 1, \quad F_{0,1} = 1\\
F_{1,1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\sin^2 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{m,n} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^n x \sin^{m-1} x \, dx \\
&= \sin^{m-1} x \frac{-\cos^{n+1} x}{n+1} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (m-1) \sin^{m-2} x \cos x \frac{-\cos^{n+1} x}{n+1} \, dx \\
&= \frac{m-1}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x \, dx \\
&= \frac{m-1}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \cos^m x (1 - \sin^2 x) \, dx \\
&= \frac{m-1}{n+1} F_{m-2,n} - \frac{m-1}{n+1} F_{m,n}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{n+1+m-1}{n+1} F_{m,n} = \frac{m-1}{n+1} F_{m-2,n}$$

also

$$F_{m,n} = \frac{m-1}{m+n} F_{m-2,n}.$$

110. Da $I_n = F_{n,0}$, folgt: $I_0 = F_{0,0} = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = F_{1,0} = 1$, $I_2 = F_{2,0} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$, $I_3 = \frac{2}{3}$.

Daher $I_n = F_{n,0} = \frac{n-1}{n} F_{n-2,0}$ nach **109.**.

Daraus folgt (Induktion)

$$I_{2n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \frac{\pi}{2}, \quad I_{2n+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2n+1}$$

$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \right)^2 (2n+1) \frac{\pi}{2}.$$

11.2.12 Thema—Fourierrheien und Konvergenz von Funktionenfolgen

111.

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}((1 - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) + \dots + (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1})) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}.$$

112. Da $(x - \sin x)' = 1 - \cos x \geq 0$ und $0 - \sin 0 = 0$, ist $0 \leq \sin x \leq x$ für $x \in [0, \pi]$. Deshalb ist

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^n} = \pi.$$

$$\sum \frac{1}{(n+1)(n+4)} \leq \sum \frac{1}{n^2} \text{ (konvergent).}$$

113.

$$\sum \frac{1}{n^2+1} \leq \sum \frac{1}{n^2} \text{ (konvergent).}$$

$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{n-(n-1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}},$$

und die Reihe divergiert.

114.

$$\frac{1}{n}(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n-1}) = \frac{n^2+n+1-(n^2-n-1)}{n(\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n-1})} = 2\frac{n+1}{n(\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-}}$$

$$\geq \frac{1}{(\sqrt{n^2+n+1}} \geq \frac{1}{2n}$$

für n groß genug, also die Reihe divergiert.

Für n groß ist

$$0 \leq \frac{n}{(n+1)!} \leq \frac{n}{(n-1)n(n+1)} = \frac{1}{n^2-1} \leq \frac{1}{(n-1)^2},$$

und die Reihe konvergiert.

115. Da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{n+1}{n-1}}{\frac{n+1}{n-1} - 1} = 1,$$

ist für n groß

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\ln \frac{n+1}{n-1}}{\frac{n+1}{n-1} - 1} \cdot \left(\frac{n+1}{n-1} - 1\right) \leq 2\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2}{n-1} \leq 6\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},$$

und die Reihe konvergiert.

Da $\frac{1}{2n-1}$ monoton gegen Null konvergiert, ist die Reihe $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}$ konvergent nach dem Kriterium von Leibnitz.

Da $\frac{1}{\ln(n+1)}$ monoton gegen Null konvergiert, ist die Reihe $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+1)}$ konvergent nach dem Kriterium von Leibnitz.

116.

$$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \left|\frac{(n+1)x^n}{nx^{n-1}}\right| = |x| < 1.$$

117. Für $x = 0$ konvergiert die Reihe offensichtlich. Für $x > 0$ und $x < -2$ ist

$$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \left|\frac{\frac{x}{(1+x)^{n+1}}}{\frac{x}{(1+x)^n}}\right| = \frac{1}{|x+1|} < 1.$$

118. Da $\lim n^{\frac{1}{n}} = \lim e^{\frac{\ln n}{n}} = 1$, ist für n groß

$$\frac{1}{2n^\alpha} \leq \frac{(n^{\frac{1}{n}})^\beta}{n^\alpha} \leq \frac{2}{n^\alpha},$$

also $\sum \frac{n^{\beta/n}}{n^\alpha}$ konvergiert für $\alpha > 1$ und β beliebig.

Die Reihe $\sum \frac{n^\alpha}{n!}$ konvergiert für alle $\alpha \in R$. Für $\alpha \leq 0$ ist dies klar. Sei $\alpha > 0$; wir können annehmen daß $\alpha \in N$. Da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(n-\alpha+1)\cdot\dots\cdot n} = 1,$$

ist für n groß

$$\frac{n^\alpha}{n!} = \frac{1}{1\cdot\dots\cdot(n-\alpha)} \cdot \frac{n^\alpha}{(n-\alpha+1)\cdot\dots\cdot n} \leq 2\frac{1}{1\cdot\dots\cdot(n-\alpha)} \leq \frac{4}{n^2}.$$

Es ist

$$-n^{-\alpha}[\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1}] = 2n^{-\alpha}\frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$$

$$= 2n^{-\alpha}\frac{1}{(\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}+\sqrt{n-1})(n+\sqrt{n^2-1})},$$

und für n groß

$$\frac{n^{-\alpha}}{4n^{\frac{3}{2}}} \leq -n^{-\alpha}[\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1}] \leq 4\frac{n^{-\alpha}}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Reihe $\sum n^{-\alpha}[\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1}]$ konvergiert, falls $\alpha + \frac{3}{2} > 1$, also für $\alpha < -\frac{1}{2}$.

119.
$$\sum a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}},$$

also die Reihe für $\alpha > \frac{1}{2}$ ist konvergent.

120. Induktion: $n = 1$ stimmt,

$$\sum_{r=1}^{n+1} rx^{r-1} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2} + (n+1)x^n = \frac{1-(n+2)x^{n+1} + (n+1)x^{n+2}}{(1-x)^2}.$$

$$\lim\left|\frac{a_{r+1}}{a_r}\right| = \lim\frac{r+1}{r}|x| = |x|,$$

und die Reihe konvergiert falls $|x| < 1$.

Mann kann auch benutzen, daß $rx^{r-1} = (x^r)'$, und daß $\sum_{r=0}^{n} x^r = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$.