Funktionalanalysis und Integrationstheorie

J.B. Cooper

Inhaltsverzeichnis

1 Maßtheorie—Lebesgue-Maß—W-Maße

Ein Hauptproblem der Maßtheorie ist die Erweiterung eines Maßbegriffes für einfache Mengen auf kompliziertere. Wir beginnen mit einem konkreten Beispiel—Lebesgue-Maß auf $[0,1]$. Hier sind die einfachen Mengen die Intervalle, wobei das Maß eines Intervalls seine Länge ist, d.h.

$$l([a,b]) = l(]a,b[) = l([a,b[) = l(]a,b]) = b-a.$$

Wir erweitern dieses Maß stufenweise wie folgt:

a) offene Mengen: Jede offene Teilmenge U aus $I=[0,1]$ hat eine eindeutige Darstellung

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} I_n$$

als disjunkte Vereinigung einer Folge $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ von offenen Intervallen (Beweis!). Wir definieren

$$l(U) = \sum l(I_n).$$

b) abgeschlossene Mengen: Sei $C \subseteq I$ abgeschlossen. Dann ist $U = I \setminus C$ offen und wir definieren:

$$l(C) = 1 - l(U).$$

c) das **äußere Maß** $l^*(A)$ von einer beliebigen Teilmenge A von I ist definiert als

$$l^*(A) = \inf\{l(U) : U \text{ offen}, A \subseteq U\}.$$

Beispiel. Zeige, daß das äußere Maß der rationalen Zahlen in $[0,1]$ gleich 0 ist. (Anleitung: Sei $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Abzählung von $\mathbf{Q}\cap[0,1]$; für $\epsilon>0$ ist $\bigcup_{i=1}^{\infty}]r_n-\epsilon/2^n, r_n+\epsilon/2^n[\cap[0,1]$ eine offene Obermenge von $\mathbf{Q}\cap[0,1]$).

d) das innere Maß l_*:

$$l_*(A) = \sup\{l(C) : C \text{ abgeschlossen}, C \subseteq A\}.$$

Beispiel. Das innere Maß der irrationalen Zahlen in $[0,1]$ ist 1.

Wir untersuchen einige Eigenschaften dieser Maßbegriffe:
1. l ist additiv auf offenen disjunkten Mengen, d.h.

$$l(U_1 \cup U_2) = l(U_1) + l(U_2),$$

falls U_1 und U_2 offen und disjunkt sind.

Beweis. Seien

$$U_1 = \bigcup_n I_n^1 \text{ bzw. } U_2 = \bigcup_m I_m^2$$

die Darstellungen von U_1 bzw. U_2, wobei die I_n^1 und I_m^1 offene Intervalle sind. Dann gilt:

$$U_1 \cup U_2 = (\bigcup_n I_n^1) \cup (\bigcup_m I_m^2)$$

und

$$l(U_1 \cup U_2) = \sum_n l(I_n^1) + \sum_m l(I_m^2) = l(U_1) \cup l(U_2).$$

■

2. l ist σ-additiv auf offenen disjunkten Mengen, d.h.

$$l(\bigcup_n U_n) = \sum_n l(U_n),$$

falls die U_n disjunkte, offene Mengen sind.

Beweis. Sei $U_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} I_n^m$, wobei $(I_n^m)_{m=1}^{\infty}$ eine Folge von offenen disjunkten Intervallen ist. Dann sind alle I_n^m disjunkt. Aus $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} I_n^m$ folgt:

$$\begin{aligned} l(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n) &= l(\bigcup_m \bigcup_n I_n^m) \\ &= \sum_m \sum_n l(I_n^m) \\ &= \sum_n (\sum_m l(I_n^m)) \\ &= \sum_n l(U_n). \end{aligned}$$

∎

3. Sei C eine abgeschlossene Menge, U offen mit $C \subseteq U$. Dann gilt:

$$l(C) \leq l(U).$$

Beweis. Sei $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, wobei $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von disjunkten Intervallen ist. Da C kompakt ist, existieren endlich viele I_n's, etwa $I_1, \ldots, I_N$, sodaß

$$C \subseteq I_1 \cup \cdots \cup I_N.$$

Dann gilt:

$$l(C) \leq \sum_{i=1}^{N} l(I_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} l(I_i) = l(U).$$

∎

4. Falls U offen ist, dann gilt:

$$l(U) = \sup\{l(C) : C \text{ abgeschlossen}, C \subseteq U\},$$

d.h. $l(U) = l_*(U)$. (N.B.: trivialerweise gilt, daß $l(U) = l^*(U)$).

Beweis. Nach 3. gilt $l(U) \geq \sup\{l(C)\}$. Sei $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, $\epsilon > 0$. Wähle N so, daß

$$l(U) - \frac{\epsilon}{2} \leq \sum_{n=1}^{N} l(I_n).$$

Sei C_n ein abgeschlossenes Teilintervall von I_n mit $l(C_n) \geq l(I_n - \frac{\epsilon}{2^{n+1}})$. Dann ist $C = \bigcup_{n=1}^{N} C_n$ abgeschlossen, $C \subseteq U$ und $l(C) \geq l(U) - \epsilon$.

∎

5. Für C abgeschlossen, gilt

$$l^*(C) = l_*(C) = l(C).$$

(Sei $U = I \setminus C$. Dann gilt:

$$l^*(C) = 1 - l_*(U) = 1 - l(U) = l(C)).$$

6. l ist σ-additiv für aufsteigende Folgen von offenen Mengen d.h. wenn $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ eine aufsteigende Folge von offenen Mengen ist und $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ dann gilt

$$l(U) = \lim_{n\to\infty} l(U_n).$$

Beweis. Klarerweise gilt

$$l(U_1) \leq l(U_2) \leq \cdots \leq l(U_n) \leq \cdots \leq l(U).$$

Sei $\epsilon > 0$ und C eine abgeschlossene Teilmenge von U mit $l(C) > l(U) - \epsilon$. Wegen Kompaktheit gibt es ein $n_0 \in \mathbf{N}$, sodaß $U_{n_0} \supseteq C$ und daher, für $n \geq n_0$

$$l(U_n) \geq l(C) > l(U) - \epsilon$$

woraus die Behauptung folgt.

■

7. Seien U_1, U_2 offene und C_1, C_2 abgeschlossene Mengen. Dann gelten die Formeln

$$\begin{aligned} l(U_1 \cup U_2) &= l(U_1) + l(U_2) - l(U_1 \cap U_2) \\ \text{und } l(C_1 \cup C_2) &= l(C_1) + l(C_2) - l(C_1 \cap C_2). \end{aligned}$$

Beweis. Wir beweisen zuerst die Formel

$$l(A_1 \cup A_2) = l(A_1) + l(A_2) - l(A_1 \cap A_2)$$

wenn A_1 und A_2 endliche disjunkte Vereinigungen von Intervallen sind. In diesem Fall kann man $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ finden, sodaß für jedes Intervall $I_k =]t_{k-1}, t_k[$, $1 \leq k \leq n$, gilt

$$\begin{aligned} A_1 \cap I_k &= I_k \text{ oder } \emptyset \\ \text{und } A_2 \cap I_k &= I_k \text{ oder } \emptyset. \end{aligned}$$

Für jedes $1 \leq k \leq n$ gilt dann trivialerweise

$$l((A_1 \cup A_2) \cap I_k) = l(A_1 \cap I_k) + l(A_2 \cap I_k) - l(A_1 \cap A_2 \cap I_k)$$

und daher

$$\begin{aligned} l(A_1 \cup A_2) &= \sum_{k=1}^{n} l((A_1 \cup A_2) \cap I_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} [l(A_1 \cap I_k) + l(A_2 \cap I_k) - l(A_1 \cap A_2 \cap I_k)] \\ &= l(A_1) + l(A_2) - l(A_1 \cap A_2). \end{aligned}$$

Seien nun U_1, U_2 offene Mengen und $(U_1^n)_{n=1}^\infty$ und $(U_2^n)_{n=1}^\infty$ aufsteigende Folgen von endlichen Vereinigungen von offenen Intervallen, sodaß

$$U_1 = \bigcup_{n=1}^\infty U_1^n \text{ und } U_2 = \bigcup_{n=1}^\infty U_2^n.$$

Dann gilt für jedes $n \in \mathbf{N}$

$$l(U_1^n \cup U_2^n) = l(U_1^n) + l(U_2^n) - l(U_1^n \cap U_2^n)$$

und daher unter Benützung von 6.

$$l(U_1 \cup U_2) = l(U_1) + l(U_2) - l(U_1 \cap U_2).$$

Die Formel für die abgeschlossenen Mengen erhält man durch Übergang zum Komplement.

■

8. Falls U offen, C abgeschlossen, mit $U \subset C$, dann gilt:

$$\lambda(U) \leq \lambda(C).$$

(Beweis: Übung).
Zusammenfassend haben wir auf der Potenzmenge von $[0,1]$ die Funktionen l^* und l_* definiert. Sie besitzen folgende Eigenschaften:

a) $l^*(A) = 1 - l_*(I \setminus A)$;

b) $l^*(A) \geq l_*(A)$;

c) $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow l^*(A_1) \leq l^*(A_2)$ bzw. $l_*(A_1) \leq l_*(A_2)$;

d)

$$\begin{aligned} l^*(A_1 \cup A_2) &\leq l^*(A_1) + l^*(A_2) - l^*(A_1 \cap A_2) \\ l_*(A_1 \cup A_2) &\geq l_*(A_1) + l_*(A_2) - l_*(A_1 \cap A_2); \end{aligned}$$

(insbesonders:

$$l^*(A_1 \cup A_2) \leq l^*(A_1) + l^*(A_2)).$$

e) Für jede disjunkte Folge $(A_n)_{n=1}^\infty$

$$\begin{aligned} l^*(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) &\leq \sum_{n=1}^\infty l^*(A_n), \\ l_*(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) &\geq \sum_{n=1}^\infty l_*(A_n). \end{aligned}$$

Beweis. a) – c) folgen sofort aus den Definitionen bzw. Eigenschaften 1. – 7.

d) Seien C_1, C_2 abgeschlossen mit

$$C_1 \subseteq A_1, \quad C_2 \subseteq A_2$$

und $l(C_1) \geq l_*(A_1) - \epsilon$, $l(C_2) \geq l_*(A_2) - \epsilon$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} l_*(A_1 \cup A_2) &\geq l(C_1 \cup C_2) \\ &= l(C_1) + l(C_2) - l(C_1 \cap C_2) \\ &\geq l_*(A_1) - \epsilon + l_*(A_2) - \epsilon - l_*(A_1 \cap A_2). \end{aligned}$$

Die erste Formel erhält man durch Übergang zum Komplement.

e) Sei $\epsilon > 0$ und wähle offene Mengen $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $U_n \supseteq A_n$ und $l(U_n) < l^*(A_n) + \epsilon/2^n$. Dann gilt unter Verwendung von 6.

$$l^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq l(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} l(U_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} l^*(A_n) + \epsilon.$$

Für die zweite Ungleichung wähle abgeschlossene Mengen $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $C_n \subseteq A_n$ und $l(C_n) > l_*(A_n) - \epsilon/2^n$. Für jedes $N \in \mathbf{N}$ gilt

$$l_*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \geq l(\bigcup_{n=1}^{N} C_n) = \sum_{n=1}^{N} l(C_n) > \sum_{n=1}^{N} l_*(A_n) - \epsilon$$

woraus die Behauptung folgt.

■

Definition 1.1 *Eine Teilmenge $A \subseteq I$ heißt* **l-meßbar**, *falls $l^*(A) = l_*(A)$. Man schreibt dann $l(A)$ für diesen Wert. Daher sind sowohl offene, als auch abgeschlossene Mengen meßbar. Es gibt allerdings Mengen, die nicht meßbar sind (unter Annahme des Auswahlaxioms—siehe Übungen).*

Eigenschaften von meßbaren Mengen:

a) Seien A_1, A_2 meßbar. Dann sind $I \setminus A_1$ und $A_1 \cup A_2$ meßbar. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} l(I \setminus A_1) &= 1 - l(A_1) \\ l(A_1 \cup A_2) &= l(A_1) + l(A_2) - l(A_1 \cap A_2). \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort, daß der Durchschnitt bzw. die Vereinigung von endlich vielen meßbaren Mengen meßbar ist.

b) Falls (A_i) eine disjunkte Folge von meßbaren Mengen ist, dann ist $\bigcup_{n=1}^\infty A_n$ meßbar und es gilt:

$$l(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) = \sum_{n=1}^\infty l(A_n).$$

Denn

$$l^*(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) \leq \sum_{n=1}^\infty l^*(A_n) \text{ und } l_*(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) \geq \sum_{n=1}^\infty l_*(A_n).$$

nach e) und daher

$$l^*(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) \leq \sum_{n=1}^\infty l(A_n) \leq l_*(\bigcup_{n=1}^\infty A_n).$$

Daraus folgt sofort, daß Durchschnitte bzw. Vereinigungen von abzählbar vielen meßbaren Mengen wieder meßbar sind.

Allgemeine Konstruktion von Maßräumen:
Es ist jetzt naheliegend, von der konkreten Situation des Lebesgue-Maßes auf $[0,1]$ wegzugehen und die folgenden abstrakten Definitionen einzuführen.

Definition 1.2 *Sei Ω eine Menge. Eine Teilfamilie $\mathcal{A}$ der Potenzmenge $P(\Omega)$ heißt eine* **σ-Algebra**, *falls*

a) $\emptyset$ und $\Omega \in \mathcal{A}$;

b) $A \in \mathcal{A}$ impliziert $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$;

c) $A, B \in \mathcal{A}$ impliziert $A \cup B \in \mathcal{A}$;

d) falls (A_n) eine Folge aus $\mathcal{A}$ ist, dann ist $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}$.

Daraus folgt leicht: Falls (A_i) eine Folge aus $\mathcal{A}$ ist, dann ist auch $\bigcap_{i=1}^\infty A_i$ aus $\mathcal{A}$.
Eine Menge Ω mit einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ heißt ein **Maßraum**.
Falls $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Maßraum ist, dann ist ein **W-Maß** auf Ω eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to [0,1]$, sodaß

a) $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\Omega) = 1$;

b) μ ist σ-additiv, d.h. $\mu(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)$, falls (A_n) eine disjunkte Folge aus $\mathcal{A}$ ist.

Das Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ heißt dann ein **W-Raum**. Z.B. ist $[0,1]$ mit der σ-Algebra der l-meßbaren Mengen und dem Lebesgue-Maß l ein W-Raum.
Wir werden später die Integrationstheorie auf W-Räumen (insbesondere die Lebesgue'sche Integration) untersuchen. Vorher betrachten wir eine abstrakte Version des Erweiterungsprozesses, den wir oben verwendet haben.

Definition 1.3 *Sei $\mathcal{A}$ eine Teilfamilie von $P(\Omega)$. Es existiert eine kleinste σ-Algebra auf Ω, die $\mathcal{A}$ enthält (der Durchschnitt aller solchen Algebren). Wir bezeichnen diese mit $\sigma(\mathcal{A})$ (***der von $\mathcal{A}$ erzeugten σ-Algebra***).*

Normalerweise kann man keine nützliche konkrete Beschreibung der Mengen aus $\sigma(\mathcal{A})$ angeben. In einigen Fällen ist dies allerdings möglich.

Definition 1.4 *Eine Familie $\mathcal{A} \subseteq P(\Omega)$ heißt* **Boole'sche Halbalgebra**, *falls*

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$, $\Omega \in \mathcal{A}$;
2. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$;
3. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B$ *ist eine endliche, disjunkte Vereinigung von Mengen aus* $\mathcal{A}$.

$\mathcal{A}$ *heißt* **Boole'sche Algebra**, *falls 1., 2. und*
die Bedingung $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
erfüllt sind.
(Dann gilt: $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$*).*

Ein Beispiel einer Boole'schen Halbalgebra ist die Familie halboffener Rechtecke in $\mathbf{R}^2$ (d.h. Mengen der Gestalt $[a, b[\times[c, d[$). Ein Beispiel einer Boole'schen Algebra ist die Familie aller endlichen disjunkten Vereinigungen von halboffenen Rechtecken in $[0, 1[\times[0, 1[$. Allgemeiner gilt:

Hilfssatz 1.5 *Falls $\mathcal{A}$ eine Boole'sche Halbalgebra ist, dann besteht $\mathcal{B}(A)$, die von $\mathcal{A}$ erzeugte Boole'sche Algebra, aus allen jenen Mengen, die als disjunkte, endliche Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{A}$ darstellbar sind.*

Beweis. Es ist klar, daß $\mathcal{B}(A)$ diese Mengen enthält. Andererseits kann man leicht nachweisen, daß die Familie aller solchen Teilmengen eine Boole'sche Algebra ist, falls 1. – 3. erfüllt sind.

■

Jetzt betrachten wir Erweiterungen von Maßen:

Satz 1.6 *Sei $\mathcal{A}$ eine Boole'sche Halbalgebra, $\mu : \mathcal{A} \to [0, 1]$ eine Abbildung, sodaß*

a) $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\Omega) = 1$;

b) $\mu(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n)$, *falls $A_1, \ldots, A_n$ disjunkte Mengen aus $\mathcal{A}$.*

Dann existiert eine eindeutig bestimmte Erweiterung von μ zu einem **endlich-additiven Maß** $\widetilde{\mu} : \mathcal{B}(A) \to [0, 1]$ *(d.h. eine Funktion $\widetilde{\mu} : \mathcal{B}(A) \to [0, 1]$ die 1.2 a), b), c) erfüllt).*

Beweis. Sei $A \in \mathcal{B}(A)$ mit Darstellung

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

wobei die A_i disjunkte Mengen aus $\mathcal{A}$ sind. Man setzt

$$\widetilde{\mu}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

und weist nach, daß $\widetilde{\mu}$ wohl-definiert und additiv ist.

■

Bemerkung. Falls $\mu : \mathcal{A} \to [0,1]$ σ-additiv ist, (d.h. falls gilt:

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

wobei (A_i) eine disjunkte Folge aus $\mathcal{A}$ mit $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$), dann ist $\widetilde{\mu}$ auch σ-additiv.

Satz 1.7 *Sei $\mathcal{A}$ eine Boole'sche Algebra, $\mu : \mathcal{A} \to [0,1]$ additiv und σ-additiv. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes W-Maß $\widetilde{\mu} : \sigma(A) \to [0,1]$, das μ erweitert.*

Beweisskizze. (der Beweis ist mehr oder weniger eine abstrakte Version der Konstruktion des L-Maßes).
Schritt 1: Setze

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\sigma &= \{A \subseteq \Omega : A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \text{ wobei } (A_i) \text{ eine steigende Folge aus } \mathcal{A} \text{ ist}\} \\ \mathcal{A}_\delta &= \{A \subseteq \Omega : \Omega \setminus A \in \mathcal{A}_\sigma\}. \end{aligned}$$

Zeige: $\mathcal{A}_\sigma$ ist abgeschlossen unter endlichen Durchschnitten und abzählbaren Vereinigungen.
Schritt 2: Für $A \in \mathcal{A}_\sigma$, setze

$$\widetilde{\mu}(A) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$$

und für $A \in \mathcal{A}_\delta$ setze

$$\widetilde{\mu}(A) = 1 - \widetilde{\mu}(\Omega \setminus A).$$

(Hier muß man unter Verwendung der σ-Additivität von μ nachweisen, daß $\widetilde{\mu}$ wohldefiniert ist).
Schritt 3: Für $A \subset \Omega$ setze

$$\begin{aligned} \widetilde{\mu}^*(A) &= \inf\{\widetilde{\mu}(B) : B \in \mathcal{A}_\sigma,\ A \subseteq B\} \\ \widetilde{\mu}_*(A) &= \sup\{\widetilde{\mu}(B) : B \in \mathcal{A}_\delta,\ B \subseteq A\}. \end{aligned}$$

Schritt 4: Zeige, daß $\widetilde{\mu}^* \geq \widetilde{\mu}_*$ (wieder unter Verwendung der σ-Additivität von μ).
Schritt 5: Setze

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{A}} &= \{A \in \mathcal{A} : \widetilde{\mu}^*(A) = \widetilde{\mu}_*(A)\} \\ \widetilde{\mu}(A) &= \widetilde{\mu}^*(A) \quad (A \in \overline{\mathcal{A}}) \end{aligned}$$

Man zeigt, daß $\overline{\mathcal{A}}$ eine σ-Algebra ist und daß $\widetilde{\mu}$ ein W-Maß darauf ist.

■

Bemerkung. Die hier konstruierte σ-Algebra $\overline{\mathcal{A}}$ enthält $\mathcal{A}$ und daher auch $\sigma(\mathcal{A})$. Es kann vorkommen, daß $\overline{\mathcal{A}}$ strikt größer ist als $\sigma(\mathcal{A})$. Zum Beispiel ist dies der Fall in dem eingangs betrachteten Beispiel des Lebesgue-Maßes auf $[0,1]$, wobei $\mathcal{A}$ die Boole'sche Algebra der endlichen Vereinigungen von Intervallen in $[0,1]$ ist.
In diesem Fall nennt man $\overline{\mathcal{A}}$ die Familie der Lebesgue-meßbaren und $\sigma(\mathcal{A})$ die Familie der Borel Teilmengen von $[0,1]$. Man kann zeigen, daß es Lebesgue-meßbare Mengen gibt, die keine Borel Mengen sind.
Allerdings gilt der folgende Satz, der zeigt, daß es "viele" Elemente von $\sigma(\mathcal{A})$ gibt.
Mit $\mathcal{A}_{\sigma,\delta}$ (resp. $A_{\delta,\sigma}$) bezeichnen wir die abzählbaren Durchschnitte (resp. Vereinigungen) von Elementen in $\mathcal{A}_\sigma$ (resp. $\mathcal{A}_\delta$). Klarerweise sind $\mathcal{A}_{\sigma,\delta}$ und $\mathcal{A}_{\delta,\sigma}$ in $\sigma(\mathcal{A})$ enthalten.
Achtung: Im allgemeinen ist $\mathcal{A}_{\sigma,\delta}$ ungleich $\mathcal{A}_{\delta,\sigma}$! Sei zum Beispiel $\mathcal{A}$ die Familie der offenen Intervalle in $\mathbf{R}$. Dann ist $\mathbf{Q} \in \mathcal{A}_{\delta,\sigma}$ aber man kann zeigen, daß $\mathbf{Q} \notin \mathcal{A}_{\sigma,\delta}$.

Satz 1.8 *Sei $\mathcal{A}$ eine Boole'sche Algebra mit einem σ-additiven Maß μ, das wir zu einem W-Maß $\widetilde{\mu}$ auf $\overline{\mathcal{A}}$ erweitern. Für $A \in \overline{\mathcal{A}}$ gibt es Mengen $A_1 \in \mathcal{A}_{\delta,\sigma}$ und $A_2 \in \mathcal{A}_{\sigma,\delta}$, sodaß $A_1 \subseteq A \subseteq A_2$ und $\widetilde{\mu}(A_1) = \widetilde{\mu}(A) = \widetilde{\mu}(A_2)$.*

Beweis. Für jedes $n \in \mathbf{N}$ gibt es

$$A_1^n = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_1^{n,k} \text{ und } A_2^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_2^{n,k},$$

sodaß $A_1^{n,k}$ und $A_2^{n,k}$ Elemente von $\mathcal{A}$ sind,

$$A_1^n \subseteq A \subseteq A_2^n$$

und

$$\widetilde{\mu}(A_1^n) \geq \widetilde{\mu}(A) - n^{-1}, \quad \widetilde{\mu}(A_2^n) < \widetilde{\mu}(A) + n^{-1}.$$

Dann erfüllen $A_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_1^n$ und $A_2 = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_2^n$ die Bedingungen.

■

Nun zur Eindeutigkeit der Fortsetzung $\widetilde{\mu}$:

Satz 1.9 *Die Fortsetzung $\widetilde{\mu}$ von $\mathcal{A}$ auf $\overline{\mathcal{A}}$ ist eindeutig.*

Beweis. Sei μ ein σ-additives Maß auf $\mathcal{A}$, $\widetilde{\mu}$ die oben konstruierte Fortsetzung auf $\overline{\mathcal{A}}$ und $\overline{\mu}$ ein σ-additives Maß auf $\overline{\mathcal{A}}$, das auf $\mathcal{A}$ mit μ übereinstimmt. Wir müssen zeigen, daß $\overline{\mu}(B) = \widetilde{\mu}(B)$ für alle $B \in \overline{\mathcal{A}}$.
Wir sahen im vorhergehenden Beweis, daß es Elemente $(A_1^{n,k})_{n,k\in\mathbf{N}}$ und $(A_2^{n,k})_{n,k\in\mathbf{N}}$ in $\mathcal{A}$ gibt, sodaß für

$$A_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=1}^{\infty} A_1^{n,k} \text{ und } A_2 = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} A_2^{n,k}$$

gilt

$$A_1 \subseteq B \subseteq A_2 \text{ und } \widetilde{\mu}(A_1) = \widetilde{\mu}(A_2).$$

Es gilt $\overline{\mu}(A_1) = \widetilde{\mu}(A_1)$ und $\overline{\mu}(A_2) = \widetilde{\mu}(A_2)$ (warum ?) und daher $\overline{\mu}(B) = \overline{\mu}(A_1) = \widetilde{\mu}(B)$.

■

2 Integrationstheorie

$(\Omega, \mathcal{A})$ sei ein Maßraum. Eine Funktion $x : \Omega \to \mathbf{R}$ heißt **meßbar**, falls für jedes $a, b \in \mathbf{R}$ mit $a < b$ gilt:

$$\{\omega \in \Omega : x(\omega) \in]a, b[\} \in \mathcal{A}.$$

(Wir werden diese Menge auch mit $\{x \in]a, b[\}$ bezeichnen). Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\{x \in]a, \infty[\} &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in]a, n[\} \in \mathcal{A} \\
\{x \in]-\infty, b[\} &\in \mathcal{A} \\
\{x \in [a, b]\} &= \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \{x \in]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[\} \in \mathcal{A}
\end{aligned}$$

usw. Weiters: Falls U offen in $\mathbf{R}$ ist, dann ist $\{x \in U\}$ aus $\mathcal{A}$ (denn $U = \bigcup_n U_n$, wobei die U_n's offene Intervalle sind. Es gilt dann $\{x \in U\} = \bigcup_n \{x \in U_n\}$). Falls C abgeschlossen ist, dann ist $\{x \in C\}$ aus $\mathcal{A}$. ($\{x \in C\} = \Omega \setminus \{x \in \mathbf{R} \setminus C\}$).

Bemerkung. Jede stetige Funktion auf $[0, 1]$ ist Lebesgue-meßbar.

Satz 2.1 *Eine Funktion $x : \Omega \to \mathbf{R}$ ist genau dann meßbar, wenn sie der punktweise Limes einer Folge von meßbaren Treppenfunktionen ist.*

Beweis. $\Leftarrow$: Es gilt etwas allgemeiner: Sei (x_n) eine Folge von meßbaren Funktionen, die punktweise gegen x konvergieren. Dann ist x meßbar. Denn es gilt etwa

$$\{x < \alpha\} = \bigcup_k \bigcup_n \bigcap_{m \geq n} \{x_m < \alpha - \frac{1}{k}\} \in \mathcal{A}.$$

Sei umgekehrt x meßbar und setze

$$\begin{aligned}
A_{k,n} &= \{x \in [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}[\} \quad (k \in \{-n2^n + 1, \ldots, n2^{n+1}\}) \\
B_n &= \{x \geq n\} \\
C_n &= \{x < -n\}.
\end{aligned}$$

Dann konvergiert x_n punktweise gegen x, wobei

$$x_n = \sum_{k=-n.2^n+1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{A_{k,n}} + n\chi_{B_n} - n\chi_{C_n}$$

■

Bemerkung. Die Konstruktion oben ergibt sogar folgende Eigenschaften:

I. Falls $x \geq 0$, dann gilt: $x_n \geq 0$ und $x_n \uparrow x$;

II. Falls x beschränkt ist, dann konvergiert x_n *gleichmäßig* gegen x;

III. Sei $x^+ = \max(x, 0)$, $x^- = \max(-x, 0)$. Dann gilt:

$$x_n^+ \to x^+, \quad x_n^- \to x^-.$$

Das zeigt, daß x genau dann meßbar ist, wenn x^+ und x^- meßbar sind. Es ist daher für meßbares x auch $|x| = x^+ + x^-$ meßbar.

IV. Die Menge $\mathcal{S}$ der meßbaren Funktionen bildet **einen Verband**, d.h. für meßbares x, y sind auch das Maximum $x \vee y$ und das Minimum $x \wedge y$ meßbar.

V. Der Menge $\mathcal{S}$ der meßbaren Funktionen ist eine **Algebra** (d.h. $x, y \in \mathcal{S}$ und $\alpha, \beta \in \mathbf{R} \Rightarrow \alpha x + \beta y \in \mathcal{S}$ und $x.y \in \mathcal{S}$). Denn aus $x_n \to x$, $y_n \to y$ folgt:

$$\alpha x_n + \beta y_n \to \alpha x + \beta y, \quad x_n.y_n \to x.y.$$

Integrale: Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein W-Raum. Wir definieren stufenweise einen Integralbegriff für meßbare Funktionen.
1. **Treppenfunktionen:** Sei x eine Treppenfunktion

$$x = \sum_{i=1}^{n} l_i \chi_{A_i}$$

(A_i disjunkte Teilmengen aus $\mathcal{A}$). Wir definieren

$$E(x) = \int d\mu = \sum_{i=1}^{n} l_i \mu(A_i).$$

($E(x)$ heißt der **Erwartungswert** oder **Integral** von x). Es gilt trivialerweise:

$$\begin{aligned} E(x+y) &= E(x) + E(y) \\ E(lx) &= lE(x) \quad (l \in \mathbf{R}) \\ |E(x)| &\leq E(|x|) \\ x \geq 0 &\Rightarrow E(x) \geq 0. \end{aligned}$$

Definition 2.2 *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein W-Raum und bezeichne $\overline{\mathcal{A}}$ die in §1 konstruierte μ-Vervollständigung von $\mathcal{A}$. Wir nennen eine Funktion x auf Ω* **μ-meßbar**, *wenn sie bezüglich $\overline{\mathcal{A}}$ meßbar ist.*

Wir wollen nun den Integralbegriff auf eine möglichst große Familie von Funktionen erweitern, wobei die Formel $E(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} E(x_n)$ unter möglichst allgemeinen Voraussetzungen gelten soll.

Hilfssatz 2.3 *Sei (x_n) eine Folge von μ-meßbaren Treppenfunktionen, die punktweise und monoton fallend gegen 0 konvergieren. Dann gilt:*

$$\int x_n d\mu \to 0.$$

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ und setze $A_n = \{x_n \leq \frac{\epsilon}{2}\}$. Da $\bigcup_n A_n = \Omega$, existiert $N \in \mathbf{N}$, sodaß $\mu(\Omega \setminus A_N) < \frac{\epsilon}{2K}$, wobei $K = \max\{x_1(t) : t \in \Omega\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_\Omega x_n d\mu &= \int_{\Omega\setminus A_n} x_n d\mu + \int_{A_n} x_n d\mu \\ &\leq \int_{\Omega\setminus A_n} x_1 d\mu + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon \text{ für } n \geq N. \end{aligned}$$

■

2. **Nicht-negative Funktionen:** Eine μ-meßbare Funktion $x : \Omega \to \mathbf{R}^+$ heißt **integrierbar**, falls $\{\int x_n d\mu\}$ beschränkt ist, wobei x_n die oben konstruierte Folge von meßbaren Treppenfunktionen ist, die monoton gegen x konvergiert. Man definiert dann

$$E(x) = \int x d\mu = \lim \int x_n d\mu.$$

Bemerkung. Falls (y_n) eine zweite Folge von μ-meßbaren Treppenfunktionen ist, die monoton gegen x konvergiert, dann gilt:

$$\int y_n d\mu \to \int x d\mu.$$

Dies folgt aus dem obigen Hilfssatz (Beweis!).

Aus der Bemerkung folgt, daß es für die Integrierbarkeit von x genügt, daß **irgendeine** Folge von μ-meßbaren Treppenfunktionen (y_n) existiert, mit $y_n \uparrow x$ und $(\int y_n d\mu)$ beschränkt.

3. **Reelle Funktionen:** Die μ-meßbare Funktion $x : \Omega \to \mathbf{R}$ heißt **integrierbar**, falls x^+ und x^- integrierbar sind. Dann definiert man

$$E(x) = \int d\mu = \int x^+ d\mu - \int x^- d\mu.$$

Allgemeiner: Falls x integrierbar und A meßbar, dann definieren wir $\int_A x\, d\mu = \int \chi_A . x\, d\mu$. Einfache Eigenschaften:

a) x integrierbar $\Leftrightarrow$ x meßbar und $|x|$ integrierbar. Es gilt dann: $\left|\int x d\mu\right| \leq \int |x| d\mu$;

b) $x : \Omega \to \mathbf{R}$, $y : \Omega \to \mathbf{R}^+$ seien μ-meßbare Funktionen, wobei y integrierbar und $|x| \leq y$. Dann ist x integrierbar.

c) x, y integrierbar $\Rightarrow$ $x + y$ integrierbar und

$$E(x + y) = E(x) + E(y).$$

Hilfssatz 2.4 *Sei $x : \Omega \to \mathbf{R}$ integrierbar. Dann gilt*

$$\int_A x\, d\mu \to 0 \textit{ für } \mu(A) \to 0$$

(d.h. für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodaß $|\int_A x d\mu| < \epsilon$, wenn $\mu(A) \leq \delta$ $(A \in \mathcal{A})$).

Beweis. Wir bemerken zunächst, daß das Ergebnis trivial ist, wenn x beschränkt ist (denn

$$\left|\int_A x d\mu\right| \leq K\mu(A),$$

wobei $K = \sup\{|x(t)| : t \in \Omega\}$). Für allgemeines x wählen wir eine meßbare Treppenfunktion y mit $0 \leq y \leq |x|$ und $\int(|x| - y)d\mu \leq \epsilon/2$. Sei $\delta > 0$ so, daß $\int_A y d\mu \leq \epsilon/2$ falls $\mu(A) \leq \delta$. Dann gilt

$$\mu(A) \leq \delta \Rightarrow \left|\int_A x d\mu\right| \leq \int_A |x| d\mu \leq \int_A (|x| - y)d\mu + \int_A y d\mu \leq \epsilon.$$

■

Satz 2.5 *Satz über monotone Konvergenz Sei (x_n) eine Folge von integrierbaren Funktionen, sodaß $x_n \downarrow 0$. Dann gilt:*

$$\int x_n d\mu \to 0.$$

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ und setze $A_n = \{x_n \leq \epsilon/2\}$. Es gilt: $\bigcup_n A_n = \Omega$. Wähle δ, N so, daß

$$\begin{aligned} \int_A x_1 d\mu &\leq \epsilon/2 \text{ falls } \mu(A) \leq \delta, \\ \mu(A_N) &\geq 1 - \epsilon/2 \text{ und } \mu(A_N) \geq 1 - \delta. \end{aligned}$$

Für $n \geq N$ gilt:

$$\int x_n d\mu = \int_{\Omega \setminus A_n} x_n d\mu + \int_{A_n} x_n d\mu \leq \int_{\Omega \setminus A_N} x_1 d\mu + \frac{\epsilon}{2}\mu(A_n) \leq \epsilon.$$

■

3 Drei Konvergenzsätze

Wir beweisen jetzt drei wichtige Sätze über die Integrale von konvergierenden Folgen von Funktionen. Zunächst ist es allerdings zweckmäßig, den Begriff von Meßbarkeit bzw. Integrierbarkeit wie folgt zu erweitern:

Falls $x : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}_+ \ (= \mathbf{R}_+ \cup \{\infty\})$ μ-meßbar ist, d.h. der punktweise Limes einer steigenden Folge von μ-meßbaren Treppenfunktionen, dann ist es sinnvoll, $\int x d\mu$ zu definieren. Das Integral kann natürlich unendlich sein. Falls aber $\int x d\mu < \infty$, dann sagen wir, daß x **integrierbar** ist. Es gilt dann: $x < \infty$ f. ü., d.h. $\mu(N) = 0$, wobei $N = \{x = \infty\}$. Denn $x \geq n\chi_N$ für jedes n aus $\mathbf{N}$ und daher $\int x d\mu \geq n\mu(N)$. Wenn die linke Seite endlich ist, dann ist $\mu(N) = 0$.

Ähnlicherweise kann man die Begriffe von Meßbarkeit bzw. Integrierbarkeit für Funktionen mit Werten in $\overline{\mathbf{R}}_- \ (= \mathbf{R}_- \cup \{-\infty\})$ einführen. Es ist allerdings nicht sinnvoll, Funktionen, die sowohl den Wert ∞ als auch $-\infty$ auf Mengen von positivem Maß annehmen können, zu betrachten.

Das Verhalten von Limiten gegenüber Konvergenz von Funktionen kann man in den folgenden drei Konvergenzsätzen zusammenfassen.

Satz 3.1 (Satz von Beppo-Levi.) *Sei (x_n) eine steigende Folge von μ-meßbaren Funktionen von Ω nach $\overline{\mathbf{R}}^+$. Dann ist $x = \lim x_n$ meßbar und es gilt*

$$\int x d\mu = \lim_{n\to\infty} \int x_n d\mu.$$

Insbesondere: Falls $\lim_{n\to\infty} \int x_n d\mu < \infty$, dann ist $\int x d\mu < \infty$ und damit x fast überall endlich.

Satz 3.2 (Das Lemma von Fatou.) *Sei (x_n) eine Folge von integrierbaren Funktionen von Ω nach $\overline{\mathbf{R}}_+$. Dann gilt:*

$$\liminf_{n\to\infty} \int x_n d\mu \geq \int \liminf_{n\to\infty} (x_n) d\mu.$$

Satz 3.3 (Der Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz.) *Sei (x_n) eine Folge von μ-meßbaren Funktionen, die punktweise gegen x konvergiert. Falls es ein $y : \Omega \to \mathbf{R}^+$ gibt, sodaß y integrierbar und $|x_n| \leq y$ für jedes $n \in \mathbf{N}$, dann ist x integrierbar und*

$$\int \lim_{n\to\infty} x_n d\mu = \int x d\mu = \lim_{n\to\infty} \int x_n d\mu.$$

Beweis. von 3.1: Wähle für jedes n eine meßbare Treppenfunktion $0 \leq y_n \leq x_n$ so, daß

a) $\int y_n d\mu \geq \int x_n d\mu - \frac{1}{n}$;

b) $y_n(t) \geq x_n(t) - \frac{1}{n}$ falls $x_n(t) \leq n$.

Setze $z_n = \max(y_1, \dots, y_n)$. Es gilt:

$$\begin{aligned} &z_n \text{ ist meßbar} \\ &z_n \uparrow x \\ &\lim \int z_n d\mu \text{ existiert und ist gleich } \lim \int x_n d\mu. \end{aligned}$$

Falls $\lim_{n\to\infty}\int x_n d\mu < \infty$ dann gilt das gleiche für $\lim_{n\to\infty}\int z_n d\mu$. Daher ist in diesem Fall x integrierbar und

$$\int x d\mu = \lim_{n\to\infty}\int z_n d\mu = \lim_{n\to\infty}\int x_n d\mu.$$

■

Beweis. von 3.2: Die Behauptung besagt, daß, falls $\liminf_{n\to\infty}\int x_n d\mu$ endlich ist, dann ist $\liminf_{n\to\infty} x_n$ integrierbar und es gilt

$$\int \liminf_{n\to\infty} x_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int x_n d\mu.$$

Falls die rechte Seite $+\infty$ ist, ist die Ungleichung zwar noch immer richtig. Sie beinhaltet dann allerdings nur die triviale Tatsache, daß die linke Seite $\leq +\infty$ ist.
Wir bringen jetzt den Beweis: Sei $y_n = \inf_{m\geq n} x_m$, sodaß (y_n) eine aufsteigende Folge von integrierbaren $\mathbf{R}_+$-wertigen Funktionen ist. Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \sup_{n\in\mathbf{N}} y_n = \liminf_{n\to\infty} x_n.$$

Da $y_n \leq x_m$ für jedes $m \geq n$, erhalten wir für jedes $n \in \mathbf{N}$

$$\int y_n d\mu \leq \inf_{m\geq n}\int x_m d\mu \leq \liminf_{m\to\infty}\int x_m d\mu.$$

Daher ergibt der Satz von Beppo-Levi (3.1),

$$\begin{aligned}\int(\liminf_{n\to\infty} x_n)d\mu &= \int \lim_{n\to\infty} y_n d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty}\int y_n d\mu \\ &\leq \liminf_{m\to\infty}\int x_m d\mu.\end{aligned}$$

■

Die folgende Umformulierung von 3.2 ist auch oft nützlich:

Satz 3.4 *Sei (x_n) eine Folge von integrierbaren Funktionen von Ω nach $\overline{\mathbf{R}}_-$. Dann gilt:*

$$\limsup_{n\to\infty}\int x_n d\mu \leq \int \limsup_{n\to\infty} x_n d\mu.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\int x_n d\mu &= -\left(\liminf_{n\to\infty}\int(-x_n)d\mu\right) \\ &\leq -\left(\int \liminf_{n\to\infty}(-x_n)d\mu\right) \quad \text{(wegen II)} \\ &= \int \limsup_{n\to\infty} x_n d\mu.\end{aligned}$$

■

Beweis. von 3.3: Im Gegensatz zum Satz von Beppo-Levi benötigt man hier keine Monotonie und im Gegensatz zum Lemma von Fatou bekommen wir eine Gleichung und nicht bloß eine Ungleichung. Dafür muß man allerdings einen Preis zahlen, nämlich die Annahme, daß die Folge (x_n) im Betrag durch eine integrierbare Funktion y dominiert ist.
Wir werden folgende Tatsachen beweisen. Sei (x_n) eine Folge von meßbaren Funktionen und $y \geq 0$ integrierbar, sodaß $|x_n| \leq y$ für alle $n \in \mathbf{N}$. Dann gilt:

a) $\int \liminf_{n\to\infty} x_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int \ x_n d\mu$;

b) $\limsup_{n\to\infty} \int x_n d\mu \leq \int \limsup_{n\to\infty} x_n d\mu$;

c) wenn darüberhinaus (x_n) fast überall gegen die Funktion x konvergiert (d.h. es existiert eine Nullmenge $N \subseteq \Omega$, sodaß $x_n(t) \to x(t)$ für $t \in \Omega \setminus N$), dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int x_n d\mu = \int \lim_{n\to\infty} x_n d\mu = \int x d\mu.$$

Zum Beweis von a) wenden wir das Lemma von Fatou (3.2) auf die Folge von $\mathbf{R}_+$-wertigen integrierbaren Funktionen $(x_n + y)_{n=1}^{\infty}$ an.
Für b) wenden wir die Reformulierung 3.4 auf die Folge $(x_n - y)_{n=1}^{\infty}$ an.

c)

$$\begin{aligned}
\int \lim_{n\to\infty} x_n d\mu &= \int \liminf_{n\to\infty} x_n d\mu \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \int x_n d\mu \text{ (wegen a))} \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} \int \ x_n d\mu \\
&\leq \int \limsup_{n\to\infty} x_n d\mu \text{ (wegen b))} \\
&= \int \lim_{n\to\infty} x_n d\mu.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, daß der Limes von $(\int x_n d\mu)$ existiert und gleich $\int \ \lim_{n\to\infty} x_n d\mu$ ist.

■

4 Konvergenz von meßbaren Funktionen

Für Folgen (x_n) von μ-meßbaren Funktionen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ gibt es verschiedene natürliche Konvergenzbegriffe.

I. Konvergenz im Maß: (x_n) ist **Cauchy im Maß**, falls für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbf{N}$ existiert, sodaß für $m, n \geq N$ gilt:

$$\mu\{|x_m - x_n| > \epsilon\} < \epsilon.$$

(x_n) **konvergiert gegen** x im Maß, falls für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbf{N}$ existiert, sodaß für $n \geq N$

$$\mu\{|x_n - x| > \epsilon\} < \epsilon.$$

II. Fast überall Konvergenz: $x_n \to x$ fast überall (f.ü), falls eine Menge N mit $\mu(N) = 0$ existiert, sodaß

$$x_n(t) \to x(t) \quad (t \in \Omega \setminus N).$$

Eine fast überall Cauchy Folge wird ähnlich definiert.

III. Fast gleichmäßige Konvergenz: Die Folge (x_n) konvergiert fast gleichmäßig gegen x, falls für jedes $\epsilon > 0$ eine Teilmenge Ω_ϵ von Ω mit $\mu(\Omega_\epsilon) \geq 1 - \epsilon$ existiert, sodaß auf Ω_ϵ x_n gleichmäßig gegen x konvergiert. Der Begriff einer fast gleichmäßigen Cauchy-Folge wird ähnlich definiert.

Es ist leicht einzusehen, daß die folgenden Beziehungen gelten:

$$\begin{aligned}
x_n &\to x \text{ im Maß} \Rightarrow (x_n) \text{ Cauchy im Maß;}\\
x_n &\to x \text{ fast gleichmäßig} \Rightarrow (x_n) \text{ fast gleichmäßig Cauchy;}\\
x_n &\to x \text{ fast gleichmäßig} \Rightarrow x_n \to x \text{ f.ü.;}\\
x_n &\to x \text{ fast gleichmäßig} \Rightarrow x_n \to x \text{ im Maß.}
\end{aligned}$$

Weniger trivial sind die folgenden Tatsachen:

Satz 4.1 (von EGOROFF): *Falls $x_n \to x$ f.ü. dann gilt $x_n \to x$ fast gleichmäßig (und daher im Maß).*

Beweis. Für $n, m \in \mathbf{N}$, setze

$$A_{m,n} = \{t : |x_k - x| \leq \frac{1}{n} \text{ für } k \geq m\}.$$

Für jedes n gilt $\bigcup_m A_{m,n} = \Omega$. Daher existiert m_n mit

$$\mu(A_{m_n,n}) \geq 1 - \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Sei $B = \bigcap_n A_{m_n,n}$. Es gilt: $\mu(B) \geq 1 - \epsilon$ und $x_n \to x$ gleichmäßig auf B.

■

Satz 4.2 *Sei (x_n) Cauchy im Maß. Dann existiert eine Teilfolge (x_{n_k}), die fast überall konvergiert. Falls x der entsprechende Limes ist, dann gilt $x_n \to x$ im Maß.*

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Zunächst zeigen wir, daß eine Teilfolge (x_{n_k}) existiert, sodaß (x_{n_k}) gleichmäßig auf einer Menge A konvergiert, wobei $\mu(A) \geq 1 - \epsilon$. Denn nach der Definition existiert eine Folge (A_k) von meßbaren Mengen mit $\mu(A_k) \geq 1 - \frac{\epsilon}{2^k}$ und eine Teilfolge x_{n_k} so, daß

$$|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}| \leq 2^{-k}$$

auf A_k. Dann gilt: (x_{n_k}) ist gleichmäßig Cauchy auf $A = \bigcap_k A_k$ und $\mu(A) \geq 1 - \epsilon$. Um den Beweis zu beenden, verwenden wir das Diagonalverfahren. Das heißt, wir konstruieren eine Folge $\mathcal{X}_k = (x_n^k)_{n=1}^\infty$ von Folgen, sodaß $\mathcal{X}_k$ eine Teilfolge von $\mathcal{X}_{k-1}$ ist (für jedes k) und $(x_n^k)_n$ konvergiert auf einer Menge A_k mit $\mu(A_k) \geq 1 - \frac{1}{2^k}$. Dann erfüllt die Diagonalfolge (x_n^n) die gewünschte Bedingung.

■

Zusammenfassend: Eine Folge (x_n) von meßbaren Funktionen konvergiert genau dann f.ü. punktweise, wenn sie fast gleichmäßig konvergiert. Sie konvergiert dann im Maß. Falls sie im Maß konvergiert, existiert eine Teilfolge, die fast überall und daher fast gleichmäßig konvergiert.

An dieser Stelle sollte man als Übungsaufgabe beweisen: Eine Riemann-integrierbare Funktion auf $[0,1]$ ist Lebesgue-integrierbar und die Integrale stimmen überein (vergleiche Anhang).

Beispiel. Die folgende Folge konvergiert im Maß gegen 0, nicht aber fast überall: Für $n \in \mathbf{N}$ und $1 \leq k \leq 2^n$ sei $I_{n,k}$ das Intervall $[(k-1)/2^n, k/2^n]$ und $\chi_{n,k}$ sei die Indikator-Funktion von $I_{n,k}$. Wir numerieren jetzt die Doppelfolge $((\chi_{n,k})_{k=1}^{2^n})_{n=1}^\infty$ in eine Folge $(x_i)_{i=1}^\infty$ durch: $x_i = \chi_{n,k}$, wenn i die (eindeutige) Form $2^n + k - 2$ hat, wobei $k, n \in \mathbf{N}$ und $1 \leq k \leq 2^n$.
Klarerweise ist $\chi_{n,k}$ nur auf einer Menge vom Maß 2^{-n} ungleich 0, woraus die Konvergenz von $(x_i)_{i=1}^\infty$ im Maß gegen 0 folgt. Andererseits gilt für jedes $t \in [0,1]$ $\limsup_{i\to\infty} x_i(t) = 1$.

5 Allgemeinere Maßbegriffe

Bis jetzt haben wir nur W-Maße betrachtet. Wir erwähnen kurz zwei natürliche Verallgemeinerungen. Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra von Teilmengen einer Menge Ω.

Definition 5.1 σ-endliche, positive Maße. *Das sind Abbildungen $\mu : \mathcal{A} \to \mathbf{R}^+ \cup \{\infty\}$, sodaß*

a) $\mu(\emptyset) = 0$*;*

b) $\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)$ *((A_n) eine disjunkte Folge meßbarer Mengen);*

c) es existiert eine Folge (C_n) aus $\mathcal{A}$ mit $\mu(C_n) < \infty$ für jedes n, sodaß $\Omega = \bigcup_n C_n$.

Falls $\mu(\Omega) < \infty$ (woraus folgt, daß $\mu(A) < \infty$ für jedes $A \in \mathcal{A}$), dann heißt μ **endlich**.
Das *Beispiel ist Lebesgue-Maß auf* $\mathbf{R}$. *Hier*

$$\begin{aligned} \Omega &= \mathbf{R} \\ \mathcal{A} &= \{A \subseteq \mathbf{R} : A \cap [-n, n] \text{ ist } L\text{-meßbar für jedes } n\} \\ \mu(A) &= \lim_n \mu([-n, n] \cap A). \end{aligned}$$

(Wir verwenden die naheliegende Verallgemeinerung des Lebesgue-Maßes auf $[-n, n]$).

Definition 5.2 Signierte Maße: *Das sind Abbildungen $\mu : \mathcal{A} \to \mathbf{R}$, sodaß*

a) $\mu(\emptyset) = 0$*;*

b) $\mu(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)$ *((A_n) eine disjunkte Folge aus $\mathcal{A}$).*

Beispiel. Sei x eine integrierbare Funktion auf $[0, 1]$. Dann ist die auf den L-meßbaren Mengen A definierte Abbildung

$$\nu : A \mapsto \int_A x d\mu$$

ein signiertes Maß auf $[0, 1]$ (Beweis!). Wir sagen dann, daß ν **das Maß mit der Dichte** x bzgl. des Lebesgue-Maßes l ist.

Satz 5.3 (HAHN-JORDAN Zerlegung). *Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra und $\mu : \mathcal{A} \to \mathbf{R}$ ein signiertes Maß. Dann existieren disjunkte, meßbare Mengen Ω_+ und Ω_-, sodaß*

a) $\Omega_+ \cup \Omega_- = \Omega$*;*

b) $\mu(A) \geq 0$*, falls* $A \subseteq \Omega_+$*;*

c) $\mu(A) \leq 0$*, falls* $A \subseteq \Omega_-$*.*

Beweisskizze. Zunächst ist die Zahl

$$l = \inf\{\mu(B) : B \in \mathcal{A}\}$$

endlich. (Denn sonst kann man beweisen, daß eine disjunkte Folge (D_n) aus $\mathcal{A}$ existiert, mit $\sum \mu(D_n) = -\infty$. Dies ist unmöglich).
Wähle nun C_n aus $\mathcal{A}$ mit $\mu(C_n) \leq l + 2^{-n}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\mu(C_n \cup C_{n+1}) &= \mu(C_n) + \mu(C_{n+1}) - \mu(C_n \cap C_{n+1}) \\ &\leq l + 2^{-n} + l + 2^{-n-1} - l \\ &= l + 2^{-n} + 2^{-n-1}.\end{aligned}$$

Ähnlich zeigt man, daß

$$\begin{aligned}\mu(C_n \cup \cdots \cup C_{n+p}) &\leq l + 2^{-n} + \cdots + 2^{-n-p} \\ &\leq l + 2^{-(n-1)}.\end{aligned}$$

Sei $D_n = C_n \cup C_{n+1} \cup \ldots$. Dann ist $\mu(D_n) \leq l + 2^{-(n-1)}$. Setze $\Omega_- = \cap_n D_n$ bzw. $\Omega_+ = \Omega \setminus \Omega_-$. Sie haben die gewünschten Eigenschaften, da $\mu(\Omega_-) = l$.
Existierte etwa $A \subseteq \Omega_+$ mit $\mu(A) = \delta < 0$, so würde gelten

$$\mu(\Omega_- \cup A) = l + \delta < l.$$

Widerspruch!

■

Notation. Man schreibt μ^+ bzw. μ^- für die Maße

$$A \mapsto \mu(A \cap \Omega_+) \text{ bzw. } A \mapsto -\mu(A \cap \Omega_-).$$

Dann gilt: $\mu = \mu^+ - \mu^-$, $\mu^+ \geq 0$, $\mu^- \geq 0$. Man definiert dann den **Absolutbetrag** $|\mu|$ von μ wie folgt: $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$.

6 Der Radon-Nikodym Satz

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein W-Raum. Das signierte Maß $\nu : \mathcal{A} \to \mathbf{R}$ heißt **absolut stetig** bzgl. μ, falls für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodaß $|\nu(A)| \leq \epsilon$, wenn $\mu(A) \leq \delta$. Z.B. ist dies der Fall, wenn ν eine Dichte bzgl. μ hat. Die Umgekehrung gilt auch:

Satz 6.1 *Satz (Radon-Nikodym) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein W-Raum und $\nu : \mathcal{A} \to \mathbf{R}$ ein signiertes Maß, das absolut stetig bezüglich μ ist. Dann gibt es eine integrierbare Funktion $x : \Omega \to \mathbf{R}$, sodaß $d\nu = x d\mu$, d.h. für jedes $A \in \mathcal{A}$ gilt:*

$$\nu(A) = \int_A x d\mu.$$

Beweis. Unter Verwendung der Hahn-Jordan-Zerlegung können wir annehmen, daß $\nu \geq 0$ (warum?). Setze

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \{x : \Omega \to \mathbf{R}^+ : x \text{ ist meßbar und } \int_A x d\mu \leq \nu(A) \text{ für } A \in \mathcal{A}\} \\ K &= \sup\{\int x d\mu : x \in \mathcal{M}\}. \end{aligned}$$

Wähle eine Folge (x_n) aus $\mathcal{M}$ mit

$$\int x_n d\mu \to K.$$

O.B.d.A. (warum?) kann man annehmen, daß x_n steigend ist. $x_0 := \lim x_n$ ist aus $\mathcal{M}$ und es gilt:

$$\int x_0 d\mu = K.$$

Sei ν_1 das Maß mit Dichte (x_0) und setze $\nu_2 = \nu - \nu_1$. Wir behaupten, daß ν_2 gleich 0 ist, womit alles bewiesen sein wird.
Klarerweise ist $\nu \geq \nu_2 \geq 0$. Wenn ν_2 also nicht identisch gleich 0 wäre, so wäre $\nu_2(\Omega) = \alpha > 0$. Betrachten wir die Hahn-Jordan Zerlegung von $\nu_2 - (\alpha/2)\mu$: Wir erhalten Mengen Ω_+ und $\Omega_- \subseteq \Omega$, sodaß für alle $A \subseteq \Omega_+$

$$(\nu_2 - (\alpha/2)\mu)(A) \geq 0$$

d.h.

$$\nu_2(A) \geq (\alpha/2).\mu(A)$$

und für $A \in \Omega_-$

$$\nu_2(A) \leq (\alpha/2).\mu(A).$$

Wir bemerken, daß wegen $\nu_2(\Omega_-) \leq (\alpha/2)\mu(\Omega_-) \leq \alpha/2$ gilt:

$$\nu_2(\Omega_+) \geq \alpha/2$$

und daher wegen der Voraussetzung der absoluten Stetigkeit von ν auch $\mu(\Omega_+) > 0$ gilt.
Die Funktion $x_1 = x_0 + (\alpha/2).\chi_{\Omega_+}$ ist daher ein Element von $\mathcal{M}$ (warum?) und

$$\int x_1 d\mu = K + (\alpha/2).\mu(\Omega_+) > K,$$

wodurch wir einen Widerspruch erhalten.

■

Bemerkung. In diesem Beweis haben wir die absolute Stetigkeit von ν bzgl. μ nur in der Form verwendet, daß $\nu(A) > 0$ impliziert, daß auch $\mu(A) > 0$.
Zusammenfassend also: Für einen W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und ein signiertes Maß $\nu : \mathcal{A} \to \mathbf{R}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1. ν ist absolut stetig bezüglich μ.

2. Für $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = 0$ impliziert $\nu(A) = 0$.

3. Es gibt eine integrierbare Funktion $x : \Omega \to \mathbf{R}$, sodaß für $A \in \mathcal{A}$ $\nu(A) = \int_A x d\mu$.

Bemerkung. Wir skizzieren eine zweite, konstruktivere Methode, um die Dichte eines absolut stetigen Maßes zu bestimmen. Wir nehmen an, daß das Maß nicht-negativ ist.
Für $n \in N$ findet man (mit Hilfe der Hahn-Jordan Zerlegung) eine Familie $A_0, \ldots, A_{2^n n}$ (von disjunkten, meßbaren Mengen), sodaß

$$\begin{aligned} \frac{k}{2^n}\mu &\leq \nu \leq \frac{k+1}{2^n}\mu \text{ auf } A_k \quad (0 \leq k \leq 2^n n - 1), \\ n\mu &\geq \nu \text{ auf } A_{2^n n}. \end{aligned}$$

Sei x_n die Funktion

$$\sum_{k=0}^{2^n n-1} \frac{k}{2^n}\chi_{A_k} + n\chi_{A_{2^n n}}.$$

Dann steigt die Folge (x_n) und der Grenzwert ist eine Dichte für ν.

7 Produkträume—Der Satz von Fubini

Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ W-Räume. Auf dem Produktraum betrachten wir die σ-Algebra $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, die von der Familie $\mathcal{R}$ der Rechtecke, i.e. der Mengen der Gestalt

$$\{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}$$

erzeugt wird. Diese Familie $\mathcal{R}$ bildet eine Boole'sche Halbalgebra und die Abbildung

$$A_1 \times A_2 \mapsto \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$$

erfüllt die Bedingungen des Erweiterungssatzes (§2) (Beweis!). Es existiert daher ein eindeutig bestimmtes W-Maß $\mu_1 \otimes \mu_2$ auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, sodaß

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) \quad (A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2)$$

$\mu_1 \otimes \mu_2$ ist das **Produkt** von μ_1 und μ_2. Völlig analog definiert man Produkte von signierten Maß bzw. σ-endlichen Maßen. (In letzterem Fall betrachtet man die Familie $\mathcal{R}_0$ der Produkte von Mengen mit endlichem Maß.)

Hilfssatz 7.1 *Seien* $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ *W-Räume und* $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. *Setze*

$$\begin{aligned} A_x &= \{y : (x,y) \in A\} \quad (x \in \Omega_1) \\ A_y &= \{x : (x,y) \in A\} \quad (y \in \Omega_2). \end{aligned}$$

Dann gilt: A_x und A_y sind meßbar und die Funktionen

$$x \mapsto \mu_2(A_x) \text{ bzw. } y \mapsto \mu_1(A_y)$$

μ_1- (bzw. μ_2-) meßbar und daher integrierbar. Außerdem gilt

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A) = \int \mu_2(A_x) d\mu_1(x) = \int \mu_1(A_y) d\mu_2(y).$$

Beweis. Bezeichnen wir mit $\mathcal{R}$ die Boole'sche Halbalgebra der Rechtecke $A_1 \times A_2$, mit $\mathcal{FR}$ die Boole'sche Algebra der endlichen Vereinigungen von Rechtecken und mit $\mathcal{M}$ die Familie aller Teilmengen von $\Omega_1 \times \Omega_2$, die die angegebenen Bedingungen erfüllen.
Man verifiziert, daß $\mathcal{FR} \subseteq \mathcal{M}$ und daß $\mathcal{M}$ abgeschlossen ist unter abzählbaren Vereinigungen und Durchschnitten. Daher enthält $\mathcal{M}$ auch $\mathcal{FR}_{\sigma,\delta}$ und $\mathcal{FR}_{\delta,\sigma}$. Nun schließt man (ähnlich wie in den beiden letzten Sätzen von Kapitel 1), daß $\mathcal{M}$ $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ enthält.

■

Satz 7.2 (FUBINI): *Seien μ_1, μ_2 wie oben.*

1. *Falls $h : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbf{R}^+$-meßbar ist, dann sind auch h_x und h_y meßbar und es gilt*

$$\begin{aligned} \int h \, d\mu_1 \otimes \mu_2 &= \int \left(\int h_x d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) \quad * \\ &= \int \left(\int h_y d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y), \end{aligned}$$

wobei h_x die Funktion $y \mapsto h(x,y)$ $(x \in \Omega_1)$, h_y die Funktion $x \mapsto h(x,y)$ $(y \in \Omega_2)$ ist.

2. *Ist* $h : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbf{R}$ *integrierbar, so auch* h_x *bzw.* h_y *und es gilt ebenfalls Formel (*).*

3. *Falls* $h : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbf{R}$ *meßbar und*

$$\int \left(\int (|h_x| d\mu_2(y)) d\mu_1(x) \right) < \infty,$$

dann ist h integrierbar und es gilt wiederum Formel (*).

Beweis. Wir beweisen 1. (2. und 3. folgen leicht daraus): Sei h^n eine Folge von meßbaren Treppenfunktionen auf $\Omega_1 \times \Omega_2$, die punktweise gegen h konvergieren. Dann konvergiert h^n_x gegen h_x bzw. h^n_y gegen h_y. Daher sind h_x und h_y meßbar. Nach dem obigen Hilfssatz und der Linearität des Integrals folgt

$$\begin{aligned} \int h^n \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int \left(\int h^n_x d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) \\ &= \int \left(\int h^n_y d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y). \end{aligned}$$

Nach Beppo-Levi gilt das gleiche für h, h_x und h_y.

■

8 Metrische Räume

Definition 8.1 *Ein* **metrischer Raum** *ist eine Menge X mit einer Metrik d, d.h. eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbf{R}^+$, wobei*

$$\begin{aligned} d(x,y) &= 0 \Leftrightarrow x = y \quad (x,y \in X) \\ d(x,y) &= d(y,x) \quad (x,y \in X) \\ d(x,z) &\leq d(x,y) + d(y,z) \quad (x,y,z \in X). \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Metrik definiert man folgende Begriffe:

Konvergenz: *x_n konvergiert gegen x, falls $d(x,x_n) \to 0$;*

Stetigkeit: *$f : (X,d) \to (Y,d_1)$ ist stetig, wenn $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$;*

Offenheit: *$U \subseteq X$ ist offen: $\Leftrightarrow \bigwedge_{x \in U} \bigvee_{\epsilon > 0} U(x,\epsilon) \subseteq U$, wobei $U(x,\epsilon) := \{y \in X : d(x,y) < \epsilon\}$.*

Abgeschlossenheit: *$F \subseteq X$ ist abgeschlossen: $\Leftrightarrow X \setminus F$ ist offen.*

Beispiel. Sei F abgeschlossen, $(x_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge in F, die gegen x_0 konvergiert. Dann gilt $x_0 \in F$.

Beispiele.

I. $(\mathbf{R}^n, d_2)$: d_2 ist **die euklidische Metrik**

$$d_2(x,y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + \cdots + (\xi_n - \eta_n)^2},$$

wobei $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ und $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$.

II. $(\mathbf{R}^n, d_\infty)$: d_∞ ist **die Supremum-Metrik**

$$d_\infty(x,y) = \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} \{|\xi_i - \eta_i|\}.$$

III. $(\mathbf{R}^n, d_1)$ (**die ℓ^1-Metrik**):

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^n |\xi_i - \eta_i|.$$

Übungsaufgabe: Für $n \in \mathbf{N}$ gibt es Konstante $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}_+$, sodaß für alle $x, y \in \mathbf{R}^n$

$$\begin{aligned} d_\infty(x,y) &\leq d_2(x,y) \leq c_1 d_\infty(x,y) \\ d_2(x,y) &\leq d_1(x,y) \leq c_2 d_2(x,y) \\ d_\infty(x,y) &\leq d_1(x,y) \leq c_3 d_\infty(x,y) \end{aligned}$$

Bestimme die bestmöglichen Konstanten c_1, c_2, c_3. Folgere, daß d_1, d_2, d_∞ diesselben Begriffe von Konvergenz, Stetigkeit etc. auf $\mathbf{R}^n$ induzieren.

IV. Auf $C([0,1])$, dem Raum der stetigen Funktionen auf $[0,1]$, definieren wir drei Metriken:

a)
$$d_2(x,y) = \sqrt{\int_0^1 (x(t)-y(t))^2 dt}$$

b)
$$d_1(x,y) = \int_0^1 |x(t)-y(t)| dt$$

c)
$$d_\infty(x,y) = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)-y(t)|.$$

Übungsaufgabe: Zeige, daß $d_\infty(x,y) \geq d_2(x,y) \geq d_1(x,y)$ für $x,y \in C[0,1]$.

Beispiel. Gib ein Beispiel einer Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ in $C[0,1]$, die bezüglich d_2 nach 0 konvergiert aber nicht bezüglich d_∞.

Beispiel. Gib auch ein Beispiel einer Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ in $C[0,1]$, die bezüglich d_1 nach 0 konvergiert aber nicht bezüglich d_2.

Definition 8.2 *Eine Folge in (X,d) heißt* **Cauchy-Folge**, *falls*

$$\bigwedge_{\epsilon>0} \bigvee_{N\in\mathbf{N}} \bigwedge_{m,n\geq N} d(x_m,x_n) \leq \epsilon.$$

Der metrische Raum (X,d) ist **vollständig**, *falls jede Cauchy-Folge konvergiert.*

Beispiel. $\mathbf{Q}$ bzw. $]0,1[$ sind nicht vollständig. $(C([0,1]),d_\infty)$ ist vollständig. $C([0,1]))$ ist **nicht** vollständig bezgl. der Metrik d_1, ebensowenig $(C([0,1]),d_2)$. Abgeschlossene Teilmengen von $\mathbf{R}^n$ sind vollständig (bzgl. d_1, d_2 und d_∞).

Satz 8.3 *Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum. $(A_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge von nicht-leeren abgeschlossenen Teilmengen, sodaß*

(1) $A_{n+1} \subseteq A_n$ für alle $n \in \mathbf{N}$.

(2) diam $(A_n) \to 0$ wobei **diam** $(A_n) = \sup\{d(x,y) : x,y \in A_n\}$. *Dann existiert genau ein Punkt x in $\bigcap_{n=1}^\infty A_n$.*

Beweis. Wähle eine Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ mit $x_n \in A_n$. Wir zeigen, daß (x_n) Cauchy ist. Sei $\epsilon > 0$ und wähle N so, daß diam $(A_N) \leq \epsilon$. Für $m,n \geq N$ gilt $x_m, x_n \in A_N$. Daher gilt: $d(x_m,x_n) \leq \epsilon$. Da (X,d) vollständig ist, existiert x mit $x_n \to x$. Es gilt dann: $x \in \bigcap_{n=1}^\infty A_n$. Denn das Endstück $(x_m)_{m\geq n}$ liegt in A_n, und damit auch x, da A_n abgeschlossen ist. Außerdem gilt: $y \neq x \implies y \notin \bigcap_{m\in\mathbf{N}} A_m$. Denn sei $\epsilon = d(x,y) > 0$. Es gibt $N \in \mathbf{N}$ mit diam $(A_N) \leq \frac{\epsilon}{2}$. Daraus folgt: $y \notin A_N$.

■

Satz 8.4 (Banach'scher Fixpunktsatz) *Sei f eine Kontraktion auf einem vollständigen nicht-leeren metrischen Raum X, d.h.*

$$\bigvee_{0<\rho<1} \bigwedge_{x,y\in X} d(f(x), f(y)) \leq \rho d(x,y).$$

Wähle $x_0 \in X$ und sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ die Iterationsfolge $x_0, x_1, x_2, \ldots,$ wobei $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1), \ldots, x_{n+1} = f(x_n)$. Dann gilt: $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert gegen einen Punkt x und x ist Fixpunkt von f, d.h. $f(x) = x$.

Beweis. Wir zeigen, daß (x_n) eine Cauchy-Folge ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(f(x_n), (f(x_{n-1})) \\ &\leq \rho d(x_n, x_{n-1}) \\ &\leq \rho^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \cdots \leq \rho^n d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq (\rho^{n+p-1} + \rho^{n+p-2} + \cdots + \rho^n) d(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{\rho^n}{1-\rho} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Für $m \geq n$ gilt $d(x_m, x_n) \leq \frac{\rho^n}{1-\rho} d(x_1, x_0)$. Da X vollständig ist, existiert $x \in X$ mit $x_n \to x$. f ist Fixpunkt, da $f(x) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = x$.

∎

Bemerkung. Es gilt sogar: x ist der einzige Fixpunkt von f. Denn sei y ein zweiter Fixpunkt. Es gilt:

$$d(x,y) = d(f(x), f(y)) \leq \rho d(x,y).$$

Das impliziert $d(x,y) = 0$, weil $\rho < 1$.

Wir beenden dieses Kapitel mit einer Anwendung des Banach'schen Fixpunktsatzes auf Integralgleichungen. Wir betrachten die (nichtlineare) Gleichung:

$$x(s) = l \int_0^1 K(s,t,x(t))dt + y(s),$$

wobei K ein geeigneter stetiger Kern ist, λ ein Parameter. Das bedeutet: wir suchen einen Fixpunkt des Operators

$$f : x \mapsto \left(s \mapsto l \int_0^1 K(s,t,x(t))dt + y(s)\right)$$

auf $C[0,1]$.

Frage: Ist f kontraktiv bezüglich der Metrik d_∞?

$$\begin{aligned} d_\infty(f(x_1), f(x_2)) &= \sup_{s\in[0,1]} \left| l \int_0^1 (K(s,t,x_1(t)) - K(s,t,x_2(t)))dt \right| \\ &\leq |l| \sup_{s\in[0,1]} \int_0^1 |K(s,t,x_1(t)) - K(s,t,x_2(t))| dt. \end{aligned}$$

Eine geeignete Bedingung dafür wäre: K ist Lipschitz-stetig bezüglich der letzten Koordinate, d.h.

$$\bigvee_{M>0} \bigwedge_{s,t,u,v} |K(s,t,u) - K(s,t,v)| \leq M|u-v|.$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} d_\infty(f(x_1), f(x_2)) &\leq |l| \cdot M \cdot \int_0^1 |x_1(t) - x_2(t)| dt \\ &\leq |l| \cdot M \cdot \sup_{t\in[0,1]} |x_1(t) - x_2(t)|. \end{aligned}$$

f ist also eine Kontraktion, falls

$$\rho := |l|.M < 1 \quad \text{d.h.} \quad |l| < \frac{1}{M}.$$

Ist die Bedingung erfüllt, so gibt es einen Fixpunkt, der mit Iteration ermittelt werden kann, d.h. die Lösung ist Grenzwert der Iterationsfolge

$$x_{n+1}(s) = l \int_0^1 K(s,t,x_n(t))dt + y(s)$$

(x_0 willkürlich).

9 Normierte Räume—Banachräume—stetige lineare Abbildungen

Definition 9.1 *Eine* **Norm** *auf einem Vektorraum E ist eine Abbildung*

$$\| \ \| : E \to \mathbf{R}^+,$$

sodaß

(1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *($x \in E$)*

(2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *($x, y \in E$)*

(3) $\|lx\| = |l| \cdot \|x\|$ *($l \in \mathbf{R}, x \in E$).*

Beispiele.

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}^n : \|x\|_1 &:= \sum_{i=1} |\xi_i| \quad (\ell^1\text{-Norm}) \\
\|x\|_2 &:= \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\ell^2\text{-Norm}) \\
\|x\|_\infty &:= \sup |\xi_i| \quad (\ell^\infty\text{-Norm}) \\
C[0,1] : \|x\|_\infty &:= \sup_{t \in [0,1]} |x(t)| \quad (\text{Supremum-Norm}) \\
C^k[0,1] : \|x\|_k &:= \max_{i=0,\dots,k} \|x^{(i)}\|_\infty \\
C[0,1] : \|x\|_1 &:= \int_0^1 |x(t)| dt \quad (L^1\text{-Norm}) \\
C[0,1] : \|x\|_2 &:= \left(\int_0^1 |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (L^2\text{-Norm})
\end{aligned}$$

Falls $(E, \| \cdot \|)$ ein normierter Raum ist, dann ist die Abbildung

$$d_{\| \ \|} : (x, y) \mapsto \|x - y\|$$

eine Metrik auf E. $B_{\| \cdot \|}$ bezeichnet die **Einheitskugel** von $(E, \| \cdot \|)$, d.h.

$$B_{\| \cdot \|} = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}.$$

Zwei Normen heißen **äquivalent**, falls die entsprechenden konvergierenden Folgen übereinstimmen, (d.h. $\mathrm{Id} : (E, \| \cdot \|_1) \to (E, \| \cdot \|_2)$ ist ein Homöomorphismus). Es gilt: Zwei Normen sind genau dann äquivalent, wenn $m, M > 0$ existieren, sodaß

$$m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1 \quad (x \in E).$$

Beweis. $\Leftarrow$: Es existiere m, M wie oben. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x_n \to x \text{ in } d_{\|\cdot\|_1} \quad &\Rightarrow \quad \bigwedge_{\epsilon>0} \bigvee_{N\in\mathbf{N}} \bigwedge_{n>N} \|x_n - x\|_1 \le \frac{\epsilon}{M} \\ &\Rightarrow \quad \bigwedge_{n>N} \|x_n - x\|_2 \le \epsilon \Rightarrow x_n \to x \text{ in } d_{\|\cdot\|_2}. \end{aligned}$$

Analog gilt: $x_n \to x$ in $d_{\|\cdot\|_2} \Rightarrow x_n \to x$ in $d_{\|\cdot\|_1}$.
$\Rightarrow$: Es gelte $x_n \to^{\|\cdot\|_1} x \Leftrightarrow x_n \to^{\|\cdot\|_2} x$. Dann gilt: $\mathrm{Id} : (E, d_{\|\cdot\|_1}) \to (E, d_{\|\cdot\|_2})$ ist stetig. $B_{\|\cdot\|_2}$ ist Umgebung von 0 (für $d_{\|\cdot\|_2}$), also $\mathrm{Id}^{-1}(B_{\|\cdot\|_2}) = B_{\|\cdot\|_2}$ enthält eine Menge der Gestalt $\delta.B_{\|\cdot\|_1}$. Daraus folgt: $\|x\|_1 \le \delta \Rightarrow \|x\|_2 \le 1$. In ähnlicher Weise existiert $\epsilon > 0$, sodaß $\|x\|_2 \le \epsilon \Rightarrow \|x\|_1 \le 1$. Daher gilt:

$$\epsilon\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \frac{1}{\delta}\|x\|_1.$$

■

Beispiel. In $\mathbf{R}^n$ sind $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ äquivalent.

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf E. $B_{\|\cdot\|}$ ist konvex und ausgeglichen (das heißt $x \in B_{\|\cdot\|}$, $|l| \le 1 \Rightarrow lx \in B_{\|\cdot\|}$). Eine konvexe, ausgeglichene Menge nennen wir **absolut-konvex**. Außerdem ist B **absorbierend**, d.h. für jedes $x \in E$ existiert $\rho > 0$, sodaß $x \in \rho B_{\|\cdot\|}$.
Sei dagegen B eine absolut-konvexe, absorbierende Menge, die keinen nicht-trivialen Teilraum enthält. Dann ist die Funktion $\|\cdot\|_B : x \mapsto \inf\{l > 0 : x \in lB\}$ eine Norm auf E – das **Minkowski-Funktional** von B.
Zum Beispiel ist $\|\cdot\|_\infty$ das Minkowski-Funktional von

$$\left\{x \in \mathbf{R}^n : \sup_{i=1,\dots,n} |\xi_i| \le 1\right\}.$$

Allgemeiner definieren wir die ℓ^p-Normen auf $\mathbf{R}^n$. Sei $1 \le p < \infty$. $\|\cdot\|_p : x \mapsto (\sum_{i=1}^n |\xi_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ ist eine Norm auf $\mathbf{R}^n$.

Bemerkung. $\|\cdot\|_p$ ist das Minkowski-Funktional von

$$B_p = \left\{x \in \mathbf{R}^n : \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^p\right) \le 1\right\}.$$

Diese Menge ist konvex (Übung) und damit ist $\| \, \|_p$ eine Norm. (Wir werden unten einen zweiten Beweis bringen).

Beispiel. Für $0 < p < 1$ kann man analog die Funktion $\|\cdot\|_p : x \mapsto (\sum_{i=1}^n |\xi_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ auf $\mathbf{R}^n$ definieren. Warum ist diese Funktion (für $n \ge 2$) keine Norm? Skizziere die Menge $\{x \in \mathbf{R}^2 : \|x\|_p \le 1\}$.

Beispiel. Seien $1 \le p, q \le \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (wobei $\frac{1}{\infty} = 0$). Beweise die Hölder'sche Ungleichung

$$(x|y) = \sum_{i=1}^n \xi_i\eta_i \le \|x\|_p.\|y\|_q.$$

Für $p = 2$ nennt man dies die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

Wir zeigen nun, daß für $1 \leq p \leq \infty$, $\|\cdot\|_p$ eine Norm auf $\mathbf{R}^n$ definiert. Wir können annehmen, daß $1 < p < \infty$ und wählen $1 < q < \infty$ so, daß $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Aufgrund der Hölder'schen Ungleichung gilt

$$\|x\|_p \geq \sup\{|(x|y)| : \|y\|_q \leq 1\}.$$

Wir zeigen, daß Gleichheit gilt, d.h.

$$\|x\|_p = \sup\{|(x|y)| : \|y\|_q \leq 1\}.$$

Sei zunächst $\|x\|_p = 1$. Wähle y wie folgt:

$$\begin{aligned} \eta_i &= |\xi_i|^{p-1} \quad (\text{wenn } \xi_i > 0) \\ \eta_i &= -|\xi_i|^{p-1} \quad (\text{wenn } \xi_i < 0). \end{aligned}$$

Für dieses y gilt

$$\|y\|_q^q = \sum |\xi_i|^{(p-1)q} = \sum |\xi_i|^p = 1$$

und $(x|y) = 1$. Damit gilt: Falls $\|x\|_p = 1$, dann existiert ein $y \in \mathbf{R}^n$ mit $\|y\|_q = 1$ und $(x|y) = 1 = \|x\|_p$. Für $\|x\|_p \neq 1$ ersetzt man x durch $z = \dfrac{x}{\|x\|_p}$. Es gilt: $\|z\|_p = \sup\{|(z|y)| : \|y\|_q = 1\}$, d.h.

$$\left\|\frac{x}{\|x\|_p}\right\|_p = \sup\left\{\left|\left(\frac{x}{\|x\|_p}|y\right)\right| : \|y\|_q = 1\right\}$$

oder

$$\|x\|_p = \sup\{|(x|y)| : \|y\|_q \leq 1\}.$$

(d.h. die Hölder'sche Ungleichung ist scharf). Aus dieser Beziehung folgt die Dreiecksgleichung für $\|x\|_p$. Denn

$$\begin{aligned} \|x+y\|_p &= \sup_{\|z\|_q \leq 1} \{|(x+y|z)|\} \\ &\leq \sup_{\|z\|_q \leq 1} \{|(x|z)| + |(y|z)|\} \\ &\leq \|x\|_p + \|y\|_p. \end{aligned}$$

Ab jetzt schreiben wir ℓ_n^p für den normierten Raum $(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_p)$.

Ein normierter Raum $(E, \|\cdot\|)$ ist ein **Banachraum**, falls $(E, d_{\|\cdot\|})$ vollständig ist. (D.h.: jede Cauchy-Folge konvergiert bezüglich der Metrik $d_{\|\cdot\|}$).

Beispiele. Die Räume ℓ_n^1, ℓ_n^2, ℓ_n^∞ sind vollständig—also Banachräume.

Beweis. Sei (x_n) eine Cauchy-Folge in ℓ_m^∞, $x_n = (\xi_1^n, \ldots, \xi_m^n)$. Dann gilt: für jedes $\epsilon > 0$ existiert $N \in \mathbf{N}$, sodaß

$$\max_i |\xi_i^k - \xi_i^n| < \epsilon \quad (k, n \in \mathbf{N},\ k, n \geq N).$$

Daraus folgt: die Folge $(\xi_i^n)_n$ ist Cauchy in $\mathbf{R}$ und daher konvergent für jedes i. Sei $\xi_i = \lim_n \xi_i^n$, $x = (\xi_i)$. Es gilt:

$$\max_i |\xi_i - \xi_i^n| \leq \epsilon \quad (n \geq N)$$

d.h. (x_n) konvergiert gegen x.

∎

In der Tat gilt die Aussage (die wir hier nicht beweisen): Jedes Paar von Normen auf $\mathbf{R}^n$ ist äquivalent. Daher ist die Frage der Vollständigkeit erst für unendlich-dimensionale Räume interessant. Wir werden die sogenannten ℓ^p-Räume untersuchen.

Definition 9.2 *ℓ^p $(1 \leq p < \infty)$ besteht aus allen Folgen $x = (\xi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ in $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, sodaß*

$$\sum_n |\xi_n|^p < \infty.$$

Auf ℓ^p definieren wir die Abbildung

$$\| \cdot \|_p = (\sum |\xi_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

ℓ^∞ bezeichnet die Menge aller beschränkten Folgen mit

$$\|x\|_\infty = \sup |\xi_i|.$$

c_0 bezeichnet die Menge aller Folgen $x = (\xi_n)_{n \in \mathbf{N}}$, die gegen 0 konvergieren. Auf c_0 definieren wir die von ℓ^∞ induzierte Norm

$$\|x\|_\infty = \sup |\xi_i|.$$

Wir zeigen, daß ℓ^p für $1 \leq p \leq \infty$ und c_0 Vektorräume sind und daß $\| \cdot \|_p$ eine Norm ist. Dazu verwenden wir die folgende Charakterisierung von ℓ^p-Folgen. Sei $x = (\xi_k)$ und setze $P_n x = (\xi_1, \dots, \xi_n, 0, 0, \dots)$. Dann gilt:

$$x \in \ell^p \Leftrightarrow \quad \text{es existiert } K > 0, \text{ sodaß} \quad \|P_n x\|_p \leq K \quad (n \in \mathbf{N}).$$

In diesem Fall gilt: $\|x\|_p = \lim_n \|P_n x\|_p$.
Daraus sieht man leicht, daß die Summe von zwei ℓ^p-Folgen wieder eine ℓ^p-Folge ist. Da die Dreiecksungleichung für jedes $\|P_n x\|_p$ gilt, so gilt sie für den Grenzwert, d.h. die Norm auf ℓ^p.

Es ist klar, daß jede Folge in ℓ^p $(1 \leq p < \infty)$ eine Nullfolge ist und daher in ℓ^∞ liegt. In der Tat gilt:

Satz 9.3 *Für $p < p_1$ gilt $\ell^p \subseteq \ell^{p_1}$.*

Beweis. Wir zeigen: Aus $\sum |\xi_n|^p \leq 1$ folgt $\sum |\xi_n|^{p_1} \leq 1$. Dies ist aber offensichtlich. Denn aus $\sum |\xi_n|^p \leq 1$ folgt $|\xi_n|^p \leq 1$ (und daher $|\xi_n|^p \geq |\xi_n|^{p_1}$) für jedes n.

■

Umgekehrt liegt die Folge $(n^{-\frac{1}{p}})_{n \in \mathbf{N}}$ in ℓ^{p_1}, aber nicht in ℓ^p d.h. die zwei Räume sind verschieden.

Satz 9.4 *$(\ell^p, \| \cdot \|_p)$ ist ein Banachraum für $1 \leq p \leq \infty$.*

Beweis. Sei $1 \leq p < \infty$ und $(x_n)_{n=1}^\infty$ eine Cauchy-Folge in ℓ^p. D.h.

$$\bigwedge_{\epsilon > 0} \bigvee_{N \in \mathbf{N}} \bigwedge_{m,n \geq N} \sum_k |\xi_k^m - \xi_k^n|^p < \epsilon^p. \ *$$

Für festes k gilt dann

$$|\xi_k^m - \xi_k^n| < \epsilon \quad (m, n \geq N).$$

Daher gibt es eine Zahl ξ_k, sodaß $\xi_k^n \to \xi_k$. Lassen wir $m \to \infty$ in (*), so sehen wir, daß $\|x - x_n\|_p < \epsilon$ für $n > N$. Daraus folgt: $x \in \ell^p$ und $x_n \to x$ in ℓ^p.
Für $p = \infty$ ist der Beweis ähnlich.

■

Beispiele. $(\ell^1, \|\cdot\|_2)$ ist nicht vollständig. Allgemeiner gilt für $1 \leq p < q < \infty$, daß $(\ell^p, \|\cdot\|_q)$ nicht vollständig ist.

Eine Abbildung $T : E \to F$ zwischen normierten Räumen heißt **linear**, falls $T(lx + \mu y) = lT(x) + \mu T(y)$. Sie heißt **stetig**, falls $x_n \to x$ in E impliziert $T(x_n) \to T(x)$. Stetigkeit kann folgendermaßen charakterisiert werden:

Satz 9.5 *Sei T eine lineare Abbildung von E in F (wobei E und F normierte Räume sind). Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

a) T ist stetig;

b) T ist im Punkt 0 stetig;

c) T ist Lipschitz-stetig;

d) T ist beschränkt, d.h. es existiert $K > 0$, sodaß $\|Tx\| \leq K\|x\|$.

Beweis. Wir beweisen b) $\to$ d) (die anderen Implikationen sind trivial). $U = \{y : \|y\| \leq 1\}$ ist eine Nullumgebung in F. Daher gibt es ein $\epsilon > 0$, sodaß $\|Tx\| \leq 1$, falls $\|x\| \leq \epsilon$. Dann gilt $\|Tx\| \leq \frac{1}{\epsilon}\|x\|$ $(x \in E)$. Denn $\|\widetilde{x}\| \leq \epsilon$, wobei $\|\widetilde{x}\| = \frac{\epsilon x}{\|x\|}$. Daher gilt $\|T\widetilde{x}\| \leq 1$ d.h. $\|Tx\| \leq \frac{1}{\epsilon}\|x\|$. ∎

Wir definieren für eine stetige lineare Abbildung:

$$\|T\| = \inf\{K > 0 : \|Tx\| \leq K\|x\|\}.$$

Es ist leicht zu sehen, daß $L(E, F)$, der Raum der stetigen linearen Abbildungen von E nach F, ein Vektorraum ist und daß $\|\cdot\|$ eine Norm darauf ist. Wenn $E = F$, schreiben wir auch $L(E)$ für $L(E, E)$.
Es gilt:

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\} \\ &= \sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in E \setminus \{0\}\}. \end{aligned}$$

Beispiele. $L(E, F)$ ist ein Banachraum, falls F vollständig ist.

Bemerkung. Gibt es unstetige lineare Abbildungen? Zum Beispiel ist klar, daß jede lineare Abbildung von $\mathbf{R}$ nach $\mathbf{R}$ stetig ist. (Mache eine Zeichnung!). Allgemeiner kann man zeigen, daß jede lineare Abbildung von einem endlich-dimensionalen normierten Raum E nach einem normierten Raum F stetig ist.
Bei unendlich-dimensionalen Räumen entsteht aber ein neues Phänomen: Zum Beispiel ist die identische Abbildung $\mathrm{Id} : (\ell^1, \|\cdot\|_2) \to (\ell^1, \|\cdot\|_1)$ nicht stetig (Beweis!). Allgemeiner kann man mit Hilfe des Auswahlaxioms zeigen, daß auf jedem unendlich-dimensionalen normierten Raum E eine lineare Abbildung $f : E \to \mathbf{R}$ existiert, die nicht stetig ist.

BEISPIELE. **I. Kern-Operatoren:** Sei K eine stetige Funktion auf $[0,1]^2$. Dann ist $I_K : C([0,1]) \to C([0,1])$ definiert durch $I_K(x)(s) = \int_0^1 K(s,t)x(t)dt$ stetig. Denn

$$|I_K x(s)| \leq M\|x\|_\infty,$$

wobei $M = \sup\{|K(s,t)| : s,t \in [0,1]\}$. Daher gilt:

$$\|I_K x\|_\infty \leq M\|x\|_\infty \text{ d.h. } \|I_K\| \leq M.$$

II. Multiplikationsoperatoren: Für $a \in C([0,1])$ ist die Abbildung $M_a : x \mapsto xa$ von $C([0,1])$ in $C([0,1])$ stetig. Denn

$$\|M_a x\|_\infty \leq \|a\|_\infty \|x\|_\infty.$$

Ähnlich zeigt man, daß $M_a : C^1([0,1]) \to C^1([0,1])$ stetig ist, falls $a \in C^1([0,1])$. Außerdem gilt:

$$\|M_a\| \leq \|a\| + \|a'\|\cdot$$

(N.B.: Die Norm von M_a als Operator auf $C^1([0,1])$ ist größer als auf $C([0,1])$).
III. Differentiationsoperatoren: Der Operator $D : C^1([0,1]) \to C([0,1])$ ist stetig, wobei $Dx = x'$. Denn

$$\|Dx\|_\infty = \|x'\|_\infty \leq \max(\|x\|_\infty, \|x'\|_\infty).$$

BEISPIELE. **Operatorennormen.**

I. Sei $A = [a_{ij}]$ eine $m \times n$ Matrix. Wir bestimmen die Norm des entsprechenden Operators f_A:

a) als Operator von ℓ^1_n in ℓ^1_m:

$$\begin{aligned} \|f_A(x)\|_1 &= \sum_{i=1}^m |\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j| \\ &\leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}||\xi_j| \\ &\leq (\max_j \sum_{i=1}^m |a_{ij}|)\|x\|_1. \end{aligned}$$

Daher gilt:

$$\|f_A\| \leq \max_j \sum_i |a_{ij}|.$$

Wir zeigen, daß Gleichheit gilt: Sei j_0 so, daß $\sum_{i=1}^m |a_{ij_0}| = k$ $(= \max_j \sum_{i=1}^m |a_{ij}|)$. Für $x = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ (1 an der j_0-ten Stelle) gilt $\|x\|_1 = 1$ und $\|f_A(x)\| = k$. Daher ist k bestmöglich, d.h. $\|f_A\| = k$.

Ähnlich zeigt man, daß

b) die Norm von f_A als Operator von ℓ^∞_n in ℓ^∞_m ist $\max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.

Jetzt betrachten wir einige einfache Eigenschaften von Operatoren $T \in L(E,F)$.
Ein Operator $T : E \to F$ heißt **Isomorphismus**, falls er bijektiv ist und die Inverse T^{-1} auch stetig ist. Äquivalent dazu ist die Bedingung: T ist surjektiv und es existieren $m, M > 0$, sodaß $m\|x\| \leq \|Tx\| \leq M\|x\|$ $(x \in E)$.

Beispiel. Sei E ein Vektorraum mit zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$. $\mathrm{Id}\ : (E, \|\cdot\|_1) \to (E, \|\cdot\|_2)$ ist ein Isomorphismus $\Leftrightarrow$ $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ sind äquivalent. Z.B. sind ℓ_n^1, ℓ_n^2 und ℓ_n^∞ isomorph.

T ist ein **isometrischer Isomorphismus**, falls T zusätzlich längentreu ist (d.h. $\|Tx\| = \|x\|$ für $x \in E$). Z.B. sind ℓ_2^1 und ℓ_2^∞ isometrisch isomorph. ℓ_n^p und ℓ_n^q sind isomorph aber nicht isometrisch isomorph ($n \geq 2, 1 \leq p \neq q \leq \infty$, bis auf die Ausnahme ℓ_2^1 und ℓ_2^∞).

Bemerkung. Die Gleichung $Tx = y$ hat die Lösung $x = T^{-1}y$, falls T invertierbar ist. Das führt zur Frage: Was sind hinreichende Bedingungen für die Existenz einer Inversen? Ein einfacher Satz in dieser Richtung ist:

Satz 9.6 *Sei E ein Banachraum und $T \in L(E)$ mit $\|T\| < 1$. Dann ist $Id\ - T$ invertierbar und es gilt:*

$$(\ Id\ - T)^{-1} = \ Id\ + T + T^2 + T^3 + \dots$$

Beweis. Sei $S_n = \mathrm{Id} + T + \cdots + T^n$. (S_n) ist eine Cauchy-Folge in $L(E)$. Denn

$$\begin{aligned}
\|S_n - S_m\| &= \|T^{n+1} + \cdots + T^m\| \\
&\leq \|T^{n+1}\| + \cdots + \|T^m\| \\
&\leq \|T\|^{n+1} + \cdots + \|T\|^m \\
&\leq \frac{\|T\|^{n+1}}{1 - \|T\|} \quad (m > n)
\end{aligned}$$

Daher existiert S mit $S := \lim_{n\to\infty} S_n$ in $L(E)$. Es gilt:

$$S(\mathrm{Id}\ - T) = (\mathrm{Id}\ - T)S = \ \mathrm{Id}\ ,$$

denn

$$(\mathrm{Id}\ - T)S_n = \mathrm{Id}\ - T^{n+1} = S_n(\mathrm{Id}\ - T) \to \mathrm{Id}\ .$$

(Wir benutzten die Ungleichung: $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$, da $\|STx\| \leq \|S\|\|Tx\| \leq \|S\|\|T\|\|x\|$).

$\blacksquare$

Beispiel. Volterra'sche Integralgleichungen (2. Art). Das sind Gleichungen der Gestalt

$$y(s) = x(s) - \int_0^s k(s,t).x(t)dt \ {**}$$

wobei k stetig (und daher beschränkt) auf $[0,1]^2$ ist. Sei $M = \sup\{|k(s,t)| : (s,t) \in [0,1]^2\}$. Um für gegebenes y die eindeutige Existenz von Lösungen x nachzuweisen, genügt es zu zeigen, daß

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} < 1 \quad \text{(siehe unten).}$$

wobei $T : C[0,1] \to C[0,1]$ der Kernoperator I_k ist:

$$T(x)(s) = \int_0^s k(s,t)x(t)dt.$$

Satz 9.7 $|T^n x(s)| \leq \dfrac{M^n}{n!}.s^n\|x\|_\infty$ *($s \in [0,1]$, $n \in \mathbf{N}$).*

Beweis. **Induktionsbeweis:**

$$\begin{aligned}
n = 1 : |Tx(s)| &= |\int_0^s k(s,t)x(t)dt| \leq s.M.\|x\|_\infty \\
n \to n+1 : |T^{n+1}x(s)| &= |\int_0^s k(s,t)T^n x(t)dt| \\
&\leq \int_0^s M.\frac{M^n}{n!}.t^n \|x\|_\infty dt \\
&= \frac{M^{n+1}}{(n+1)!} s^{n+1} \|x\|_\infty .
\end{aligned}$$

Daher gilt:

$$\|T^n x\| \leq \frac{M^n}{n!}\|x\|_\infty \text{ oder } \|T^n\| \leq \frac{M^n}{n!},$$

d.h.

$$\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{M}{n!^{1/n}} \to_{n\to\infty} 0.$$

■

Wir verwenden jetzt das folgende Ergebnis:

Proposition 9.8 *Sei $T \in L(E)$ (Banachraum) so, daß $\sum \|T^n\| < \infty$, dann ist $(Id \; - T)$ invertierbar und $(Id \; - T)^{-1} = Id + T + \cdots + T^n + \cdots = \sum_{n=0}^\infty T^n$. (Nützlicher Spezialfall: $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} < 1$ (Wurzelkriterium)).*

Beweis. Übungsaufgabe (i.w. Wiederholung des Beweises des vorhergehenden Satzes).

■

Wir sehen also, daß die Volterra'sche Integralgleichung für jede stetige Funktion y eine eindeutige, stetige Lösung x hat, die von der Form

$$x = (\mathrm{Id} + T + \cdots + T^n + \dots)y$$

ist, also

$$\begin{aligned}
x(s) &= y(s) + \int_0^s k(s,t)y(t)dt + \int_0^s k(s,u)\left(\int_0^u k(u,t)y(t)dt\right)du + \dots \\
&= y(s) + \int_0^s \widetilde{k}(s,t)y(t)dt \text{ wobei } \widetilde{k}(s,t) = \sum_{n=0}^\infty k_{n+1}(s,t)
\end{aligned}$$

mit $k_1(s,t) = k(s,t)$ und

$$k_{n+1}(s,t) = \int_t^s k(s,u)k_n(u,t)du.$$

Weitere nützliche Eigenschaften, die ein Operator $T \in L(E,F)$ haben kann:

1. **Injektivität**, d.h. $\ker T = \{0\}$;
2. **Surjektivität**, d.h. $T(E) = F$;

3. **Bijektivität**, d.h. Injektivität und Surjektivität;
4. **Isomorphismus**, siehe oben;
5. Existenz einer **Rechtsinversen**, d.h. ein $S \in L(E,F)$ mit $TS = \mathrm{Id}_F$;
6. Existenz einer **Linksinversen**, d.h. ein $S \in L(E,F)$ mit $ST = \mathrm{Id}_E$;
7. Falls $T \in L(E,E)$, dann ist das **Spektrum** von T die Menge $\sigma(T) = \{l \in \mathbf{R} : (lI - T)$ **kein** Isomorphismus$\}$. (Falls E endlichdimensional ist, dann ist $\sigma(T)$ die Menge der Eigenwerte von T).

Beispiel.

a) Id $: (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (C([0,1]), \|\cdot\|_1)$ ist ein Vektorraum Isomorphismus, nicht aber ein Isomorphismus für die Norm. Denn Id ist stetig, nicht aber $(\mathrm{Id})^{-1}$.

b) Der Operator $M_a : C([0,1]) \to C([0,1])$ für $a \in C[0,1]$.

   M_a ist injektiv $\Leftrightarrow \{t : a(t) = 0\}$ hat leeres Inneres.

   M_a ist surjektiv $\Leftrightarrow a$ hat keine Nullstelle.

Im letzteren Fall ist M_a ein Isomorphismus mit $M_{1/a}$ als inversen Operator. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \sigma(M_a) &= \{l \in \mathbf{R} : (a - lI) \text{ ist nicht invertierbar}\} \\ &= \text{Bildmenge von } a. \end{aligned}$$

10 Dualität—der Hahn Banach Satz

Wir erinnern daran, daß der Dualraum V^* eines endlichdimensionalen Raumes der Raum $L(V, \mathbf{R})$ aller linearen Abbildungen von V in $\mathbf{R}$ ist. Falls $V = \mathbf{R}^n$, können wir V^* mit $\mathbf{R}^n$ identifizieren. Genauer: die Abbildung $y \mapsto f_y$ ist ein Isomorphismus von $\mathbf{R}^n$ auf V^*, wobei f_y das Funktional $x \mapsto (x|y) = \sum \xi_i \eta_i$ ist.

Definition 10.1 *Sei E ein normierter Raum, E' bezeichnet den Raum aller* **stetigen** *linearen Funktionale auf E, d.h. $E' = L(E, \mathbf{R})$. Dies ist ein Banachraum mit der Norm*

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in B_E\}.$$

Beispiele. Endlichdimensionale Räume: In diesem Fall ist jedes lineare Funktional automatisch stetig, d.h.: $E' = E^*$ als Vektorraum.

Betrachten wir nun die Dualität zwischen den Normen auf E und E'. Sei $1 \leq p \leq \infty$ und $\| \cdot \|_p$ die p-Norm auf $\mathbf{R}^n = \ell^p_n$. Wir haben gesehen, daß für $y \in \mathbf{R}^n$

$$\begin{aligned} \|y\|_q &= \sup\{|(x|y)| : \|x\|_p \leq 1\} \\ &= \sup\{|f_y(x)| : \|x\|_p : \|x\|_p \leq 1\}. \end{aligned}$$

Daraus folgt der Satz:

Satz 10.2 *Betrachte die Abbildung $y \mapsto f_y$ von ℓ^q_n in $(\ell^p_n)'$, wobei f_y das Funktional $f_y(x) = (y|x)$ (Skalarprodukt) ist. Diese Abbildung ist ein isometrischer Isomorphismus von ℓ^q_n auf $(\ell^p_n)'$ (wobei $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, oder $p = 1$, $q = \infty$, oder $p = \infty$, $q = 1$). (Weniger pedantische Formulierung: ℓ^q_n ist der Dualraum von ℓ^p_n).*

Beispiel. **Unendlich dimensionale ℓ^p-Räume:** Wir zeigen: $(\ell^p)' = \ell^q$ ($p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ oder $p = 1$, $q = \infty$), bzw. $c_0' = \ell^1$.

Beweis. Der Beweis besteht aus mehreren Schritten:
Schritt 1: Es gibt eine lineare Abbildung von ℓ^q in $(\ell^p)'$ ($\ell^q \subseteq (\ell^p)'$). Sei $y \in \ell^q$. Wie im endlich dimensionalen Fall definieren wir ein Funktional f_y, wobei

$$f_y(x) = \sum \xi_i \eta_i.$$

Wegen der Hölder'schen Ungleichung

$$\sum_{i=1}^n |\xi_i||\eta_i| \leq (\sum_{i=1}^n |\xi_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^n |\eta_i|^q)^{\frac{1}{q}}$$

konvergiert die rechte Seite und es gilt:

$$|f_y(x)| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

d.h. f_y ist stetig und $\|f_y\| \leq \|y\|_q$.

Schritt 2: Es gibt eine lineare Abbildung von $(\ell^p)'$ in ℓ^q. $((\ell^p)' \subseteq \ell^q)$. Für $f \in (\ell^p)'$ definieren wir $y = (\eta_i)$, wobei $\eta_i = f(e_i)$ und e_i der Koordinatenvektor $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ ist. Wir behaupten: $y \in \ell^q$. Denn $P_n y \in \ell^q_n$ und daher gilt:

$$\|P_n y\|_q = \|P_n y\|_{(\ell^p_n)'} \leq \|f\|_{(\ell^p)'}.$$

Daraus folgt: $y \in \ell^q$ und $\|y\|_q \leq \|f\|_{(\ell^p)'}$.
Schritt 3: Die Zusammensetzung $y \mapsto f_y \mapsto (f_y(e_i))$ ist die Identität—folgt sofort aus der Definition.
Schritt 4: Die Zusammensetzung $f \mapsto y \mapsto f_y$ ist die Identität. Denn $f(e_i) = \eta_i = f_y(e_i)$, d.h. $f = f_y$ auf $\{e_i : i \in \mathbf{N}\}$ und daher auf dem Vektorraum ϕ der endlichen Folgen. Wegen der Stetigkeit und der Tatsache, daß ϕ dicht in ℓ^p $(1 \leq p < \infty)$ liegt, gilt: $f = f_y$. Daraus folgt, daß die in Schritt 2 konstruierte Abbildung eine stetige Inverse zu $y \mapsto f_y$ ist. Außerdem gilt:

$$\|y\|_q \leq \|f_y\| \leq \|y\|_q,$$

d.h. die Abbildung ist eine Isometrie.

$\blacksquare$

Der Fall $c_0' = \ell^1$ wird analog bewiesen (gute Übungsaufgabe).

N.B. Mit Hilfe des Satzes von Hahn-Banach kann man zeigen, daß der Dualraum von ℓ^∞ **nicht** ℓ^1 ist.

Notation. Sei F Teilraum eines Vektorraums E. Wir sagen, daß F **Kodimension** n in E hat, wenn es n Elemente $(x_1, \dots, x_n)$ in E gibt, sodaß die lineare Hülle von F und $(x_1, \dots, x_n)$ gleich E ist, jedoch für jeweils $n-1$ Elemente $(z_1, \dots, z_{n-1})$ der Raum E nicht von F und $(z_1, \dots, z_{n-1})$ aufgespannt wird.
Eine **Hyperebene** H in einem Vektorraum E ist ein affiner Teilraum von Kodimension 1, also $H = x + F$, wobei $x \in E$ und F ein Teilraum von E von Kodimension 1.

Beispiel.

a) Erläutere diese Begriffe anschaulich in den Fällen $E = \mathbf{R}^2$ und $E = \mathbf{R}^3$.

b) Zeige, daß $H \subseteq E$ genau dann eine Hyperebene ist, wenn ein lineares Funktional $f : E \to \mathbf{R}$ existiert, $f \not\equiv 0$ und $\alpha \in \mathbf{R}$, sodaß $H = H_f^\alpha = \{x \in E : f(x) = \alpha\}$.

Satz 10.3 (Hahn-Banach Satz – analytische Form.) *Sei E ein Vektorraum, E_0 ein Teilraum, p eine Halbnorm auf E (d.h. eine Abbildung $p : E \to \mathbf{R}^+$, sodaß*

a) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$;

b) $p(lx) = |l|p(x)$ $(x, y \in E,\ l \in \mathbf{R})$).

Falls $f : E_0 \to \mathbf{R}$ ein lineares Funktional mit $|f(x)| \leq p(x)$ $(x \in E_0)$, dann gibt es eine Erweiterung $\widetilde{f}$, wobei $\widetilde{f} : E \to \mathbf{R}$ linear ist und $|\widetilde{f}(x)| \leq p(x)$ $(x \in E)$.

Satz 10.4 (Hahn-Banach Satz – geometrische Form.) *Sei $U \neq \emptyset$ eine offene konvexe Teilmenge eines normierten Raumes E, M ein affiner Teilraum mit $U \cap M = \emptyset$. Dann existiert eine abgeschlossene Hyperebene $E_0 \supseteq M$ mit $U \cap E_0 = \emptyset$.*

Diese zwei Sätze sind im wesentlichen äquivalent (in dem Sinn: Man kann den einen leicht aus dem anderen beweisen.). Zunächst beweisen wir Satz 10.3 Dazu verwenden wir folgenden Hilfssatz:

Hilfssatz 10.5 *Satz 10.3 gilt für den Fall, daß E_0 Kodimension 1 in E hat.*

Beweis. Die Voraussetzung besagt, daß für $x_0 \in E \setminus E_0$ jedes Element y von E eine eindeutige Darstellung $y = x + lx_0$ ($x \in E_0$, $l \in \mathbf{R}$) hat. Fixieren wir $x_0 \in E \setminus E_0$.
Zunächst zeigen wir, daß

$$\sup\{-f(x_1) - p(x_1 + x_0) : x_1 \in E_0\} \leq \inf\{-f(x_2) + p(x_2 + x_0) : x_2 \in E_0\}.$$

Denn für $x_1, x_2 \in E_0$ gilt:

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= f((x_2 + x_0) + (-x_1 - x_0)) \\ &\leq p((x_2 + x_0) + (-x_1 - x_0)) \\ &\leq p(x_2 + x_0) + p(x_1 + x_0), \end{aligned}$$

d.h.

$$-f(x_1) - p(x_1 + x_0) \leq -f(x_2) + p(x_2 + x_0).$$

Wähle ξ zwischen dem Supremum und Infimum und definiere

$$\widetilde{f} : x + lx_0 \mapsto f(x) + l\xi,$$

wobei $x \in E_0$. Die Funktion $\widetilde{f}$ ist linear auf E und für $l > 0$ und $x \in E_0$ gilt:

$$\xi \leq p(\frac{x}{l} + x_0) - f(\frac{x}{l}),$$

d.h.

$$l\xi + f(x) \leq p(x + lx_0) \text{ oder } \widetilde{f}(y) \leq p(y)$$

für $y = x + lx_0$ aus E (wobei $l > 0$). Für $l < 0$, gilt:

$$-f(\frac{x}{l}) - p(\frac{x}{l} + x_0) \leq \xi,$$

d.h.

$$l\xi + f(x) \leq p(x + lx_0) \text{ d.h. } \widetilde{f}(y) \leq p(y) \quad (l < 0).$$

■

Beweis. von Satz 10.3: Wir verwenden das Lemma von Zorn. Sei $\mathcal{P}$ die Menge aller Paare (M, g) wobei $E_0 \subseteq M$ und g ein lineares Funktional auf M, das f erweitert und von p dominiert wird. Falls $(M_\alpha, g_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Kette in $\mathcal{P}$ ist, dann ist $M = \cup_\alpha M_\alpha$ ein Teilraum von E und die g_α's definieren ein lineares Funktional g darauf. (M, g) ist klarerweise das Supremum der Kette. Nach dem Lemma von Zorn existiert ein maximales Element $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ für $\mathcal{P}$. Nach dem Hilfssatz gilt $\widetilde{M} = E$ (sonst könnten wir $\widetilde{g}$ erweitern auf einen echten Oberraum von $\widetilde{M}$ – und das widerspricht der Maximalität).

■

Korollar 10.6 *Sei E_0 ein Teilraum des normierten Raumes E. Falls $f \in E_0'$, dann existiert ein $\widetilde{f} \in E'$ mit $\widetilde{f}|_{E_0} = f$, $\|\widetilde{f}\| = \|f\|$.*

Beweis. Wähle $p(x) = \|f\|\|x\|$.

∎

Korollar 10.7 *Sei x ein Element aus dem normierten Raum E. Dann existiert ein $f \in E'$ mit $\|f\| = 1$ und $f(x) = \|x\|$. Daher gilt: $\|x\| = \sup\{|f(x)| : f \in E', \|f\| \leq 1\}$. (Erweitere das eindimensionale Funktional $lx \mapsto l\|x\|$).*

Korollar 10.8 *Sei E_0 ein Teilraum des normierten Raumes E, $x_0 \in E$. Dann gilt:*

$$x_0 \in \overline{E}_0 \Leftrightarrow \bigwedge_{f \in E'} \bigwedge_{y \in E_0} (f(y) = 0) \Rightarrow f(x_0) = 0.$$

Genauer: falls $x_0 \notin \overline{E}_0$, dann gibt es ein $f \in E'$ mit

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \quad (x \in E_0) \\ f(x_0) &= 1 \\ \|f\| &\leq \frac{1}{d(x_0, E_0)} \ \textit{(wobei } d(x_0, E_0) = \inf\{\|x_0 - y\| : y \in E_0\}\textit{)}. \end{aligned}$$

Beweis. Sei $x_0 \notin \overline{E}_0$, $\rho = d(x_0, E_0)$. Dann gilt:

$$\{x : \|x - x_0\| < \rho\} \cap E_0 = \emptyset.$$

Betrachte das Funktional f

$$x + lx_0 \mapsto l$$

auf $\operatorname{lin}\{E_0 \cup x_0\}$. f ist stetig, $f(x_0) = 1$ und $\|f\| \leq \dfrac{1}{d(x_0, E_0)}$. Verwende nun eine Hahn-Banach Erweiterung von f.

∎

Wir betrachten jetzt die geometrische Fassung des Hahn-Banach Satzes (Satz II).

Hilfssatz 10.9 *Sei U eine offene, konvexe, nicht leere Teilmenge eines normierten Raumes E, wobei $\dim E \geq 2$. Falls $0 \notin U$, dann existiert eine Gerade L durch 0 mit $L \cap U = \emptyset$.*

Beweis. Ohne Verlust der Allgemeinheit können wir annehmen, daß $E = \mathbf{R}^2$ (warum?). Sei ψ die Abbildung

$$(\xi_1, \xi_2) \mapsto \frac{1}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}(\xi_1, \xi_2)$$

von $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ auf $S^1 = \{(\xi, \eta) \in \mathbf{R}^2 : \xi^2 + \eta^2 = 1\}$. Da U konvex und offen ist, ist das Bild $\psi(U)$ ein offenes Winkelintervall in S^1. Außerdem ist die Länge davon $\leq \pi$ (sonst wäre 0 in U). Wähle ein $x \in S^1$, sodaß $x \notin \psi(U)$, $-x \notin \psi(U)$. Die Gerade L, durch die Punkte x und $-x$ trifft U nicht.

∎

Um Satz 10.4 vollständig zu beweisen (wobei wir einen von Satz 10.3 unabhängigen Beweis geben), brauchen wir den folgenden Begriff:

Bemerkung. **Quotientenräume:** Sei E ein normierter Raum, F ein Vektorraum, $\pi : E \to F$ surjektiv und so, daß $\operatorname{Ker}(\pi) = \{\pi^{-1}(0)\}$ abgeschlossen ist. Wir definieren eine Norm auf F wie folgt:

$$\|y\| = \inf\{\|x\| : \pi_E(x) = y\}.$$

Man prüft nach, daß dies eine Norm ist und π die offene Einheitskugel von E auf die offene Einheitskugel von F (bzgl. dieser Norm) abbildet. Daher bildet π offene Mengen auf offene Mengen ab (Beweis!).

Beweis. von Satz 10.4: Wir können annehmen, daß $0 \in M$ und M abgeschlossen ist (warum?). Sei $\mathcal{M} = \{N \subseteq E : N$ ist abgeschlossener, echter Teilraum, $M \subseteq N$ und $N \cap U = \emptyset\}$. Nach Zorn hat $(\mathcal{M}, \subseteq)$ ein maximales Element $\widetilde{M}$. Wir behaupten: $\widetilde{M}$ ist eine Hyperebene von E. Wenn nicht, dann ist $E/\widetilde{M}$ ein normierter Raum von Dimension ≥ 2. Die Bildmenge $\widetilde{U} = \pi(U)$ enthält nicht 0. Daher existiert eine Gerade L durch 0, mit $L \cap \widetilde{U} = \emptyset$. Sei $\widehat{M} = \pi^{-1}(L)$. $\widehat{M}$ ist ein abgeschlossener Teilraum mit $\widehat{M} \cap U = \emptyset$, $\widetilde{M} \subseteq \widehat{M}$, $\widetilde{M} \neq \widehat{M}$ – Widerspruch.

■

Aus diesem Satz können wir eine Reihe von sogenannten **Trennungssätzen** gewinnen:

Satz 10.10 *I. Seien A, B ($\neq \emptyset$) konvexe Teilmengen von E mit $\mathbf{A} \cap B = \emptyset$, wobei $\mathbf{A} \neq \emptyset$. Dann existiert eine Hyperebene $H_f^\alpha = \{x \in E : f(x) = \alpha\}$, wobei $f \in E'$, die A von B trennt, d.h.*

$$\begin{aligned} A &\subseteq \{x : f(x) \geq \alpha\} \\ B &\subseteq \{x : f(x) \leq \alpha\}. \end{aligned}$$

Falls A, B offen sind, dann gilt:

$$\begin{aligned} A &\subseteq \{x : f(x) > \alpha\} \\ B &\subseteq \{x : f(x) < \alpha\}. \end{aligned}$$

Satz 10.11 *II. Seien A, B disjunkte, konvexe Teilmengen von E ($A, B \neq \emptyset$), B abgeschlossen, A kompakt. Dann existiert ein $f \in E'$ und $\alpha < \beta$ in $\mathbf{R}$, sodaß*

$$\begin{aligned} A &\subseteq \{x : f(x) \leq \alpha\} \\ B &\subseteq \{x : f(x) \geq \beta\} \end{aligned}$$

(strikter Trennungssatz.)

Beweis.

I. Sei $U = \mathbf{A}$. Da $U \cap B = \emptyset$, enthält die offene konvexe Menge

$$U - B = \{x - y : x \in U, y \in B\}$$

nicht 0. Daher existiert eine Hyperebene H_f^0, sodaß $H_f^0 \cap (U - B) = \emptyset$. Die Teilmengen $f(U)$, $f(B)$ von $\mathbf{R}$ sind Intervalle, die keinen Durchschnitt haben (da $H_f^0 \cap (U - B) = \emptyset$).

O.B.d.A. nehmen wir an, daß $f(U)$ rechts von $f(B)$ liegt. Wähle $\alpha = \inf\{f(U)\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} U &\subseteq \{x : f(x) > \alpha\} \\ B &\subseteq \{x : f(x) \leq \alpha\}. \end{aligned}$$

II. Zunächst existiert $\epsilon > 0$, sodaß

$$\|x - y\| \geq \epsilon \qquad (x \in A, y \in B).$$

Denn die Funktion $x \mapsto d(x, B)$ $(= \inf\{d(x, y) : y \in B\})$ ist stetig und positiv auf A. Wegen der Kompaktheit von A existiert $\epsilon > 0$, sodaß $d(x, B) \geq \epsilon$ $(x \in A)$. Sei jetzt $V = A + \frac{\epsilon}{2}U$, $W = B + \frac{\epsilon}{2}U$, wobei $U = \{x : \|x\| < 1\}$. Es gilt: V und W sind offen, konvex und disjunkt: Daher gibt es $f \in E'$, $\|f\| = 1$ und $\gamma \in \mathbf{R}$, sodaß

$$\begin{aligned} V &\subseteq \{x : f(x) < \gamma\} \\ W &\subseteq \{x : f(x) > \gamma\} \end{aligned}$$

und daher, mit $\alpha = \gamma - \frac{\epsilon}{2}$ und $\beta = \gamma + \frac{\epsilon}{2}$, $A \subseteq \{x : f(x) \leq \alpha\}$ und $B \subseteq \{x : f(x) \geq \beta\}$.

■

Korollar 10.12 *Sei $K \subseteq E$ abgeschlossen und konvex. Dann gilt: K ist ein Durchschnitt von Halbebenen. Ferner gilt: falls $x \in \partial K = K \setminus K^0$, dann existiert eine* **Stützebene** *durch x, d.h. eine Hyperebene H_f^α mit $x \in H_f^\alpha$ und $K \subseteq \{x : f(x) \leq \alpha\}$.*

Wir kommen jetzt zu einem Begriff, der das Konzept der transponierten Matrix aus der linearen Algebra verallgemeinert:

Bemerkung. **Dualabbildungen:** Sei $T : E \to F$ stetig und linear. Wir definieren die Dualabbildung $T' : F' \to E'$ wie folgt:

$$T'(f)(x) = f((T(x)) \qquad (x \in E)$$

Es gilt:

a) $(lT)' = lT'$;

b) $(S + T)' = S' + T'$;

c) $(ST)' = T'S'$;

d) $\|T'\| = \|T\|$.

Beweis.

$$\begin{aligned} \|T'\| &= \sup\{\|T'f\| : \|f\| \leq 1, f \in F'\} \\ &= \sup\{|T'f(x)| : \|f\| \leq 1, \|x\| \leq 1, f \in F', x \in E\} \\ &= \sup\{|f(T(x))| : \|f\| \leq 1, \|x\| \leq 1, f \in F', x \in E\} \\ &= \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1, x \in E\} \\ &= \|T\|\cdot \end{aligned}$$

■

Beispiele. Für $f_A : x \mapsto (\sum a_{ij}\xi_j)_i$ von $\ell^1_n \to \ell^1_m$ gilt $f'_A = f_{A^t}$, wobei A^t die transponierte Matrix von A ist. Für die Abbildungen

$$\begin{aligned} S_r : (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) &\mapsto (0, \xi_1, \dots, \xi_n, \dots) \\ S_l : (\xi_1, \xi_2, \dots) &\mapsto (\xi_2, \xi_3, \dots) \end{aligned}$$

auf ℓ^p $(1 \leq p \leq \infty)$ bzw. c_0 gilt:

$$S'_r = S_\ell, \quad S'_\ell = S_r.$$

Bemerkung. **Bidualräume:** Sei E ein normierter Raum. Der Dualraum $(E')'$ von E' heißt der **Bidualraum** von E (geschrieben: E''). Im endlich dimensionalen Fall gilt $V = V^{**}$ (genauer: die Abbildung $I_V : V \to V^{**}$ ist ein Isomorphismus, wobei $I_V(x)(f) = f(x) \quad (f \in V^*, x \in V)$)). Für normierte Räume gilt folgendes: Betrachte die Abbildung $J_E : E \mapsto E''$, wobei $J_E(x) : f \mapsto f(x)$. Dann ist J_E ein isometrischer Isomorphismus von E auf einen Teilraum von E''. (Weniger pedantische Formulierung: E ist ein Teilraum von E'').

Beweis. Der einzige nicht-triviale Teil ist die isometrische Bedingung, d.h. $\|x\| = \|J_E x\|$. Aber

$$\begin{aligned} \|J_E x\| &= \sup\{\|J_E(x)(f)\| : \|f\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\|f(x)\| : \|f\| \leq 1\} \\ &= \|x\|\cdot \end{aligned}$$

■

Korollar 10.13 *Sei E ein normierter Raum. Dann ist die Vervollständigung von E (als metrischer Raum) ein Banachraum.*

Beweis. Wegen der Eindeutigkeit der Vervollständigung gilt: $\widehat{E} =$ die abgeschlossen Hülle von E (genauer: $J_E(E)$) in E''.

■

Bemerkung. Falls $T \in L(E, F)$, dann gilt: $T'' \in L(E'', F'')$ (wobei $T'' = (T')'$). Identifizieren wir E (bzw. F) mit einem Teilraum von E'' (bzw. F''), dann ist T'' eine Erweiterung von T, d.h. $J_F \circ T = T'' \circ J_E$
Denn:

$$\begin{aligned} T''(J_E(x))(f) &= J_E(x)(T'f) \\ &= f(T(x)) \\ &= J_F(T(x))(f) \quad (x \in E,\ f \in F'). \end{aligned}$$

11 Hilbertraum—Spektralsatz für kompakte, selbstadjungierte Operatoren

Definition 11.1 *Ein* **Prä-Hilbertraum** *ist ein Vektorraum H zusammen mit* **einem inneren Produkt** $(x, y) \mapsto (x|y)$, *d.h. eine reelle Funktion auf $H \times H$, sodaß*

$$\begin{aligned} (x|x) &\geq 0 \text{ und } (x|x) = 0 \Rightarrow x = 0 \\ (x+z|y) &= (x|y) + (z|y) \quad (x, y, z \in H) \\ (lx|y) &= l(x|y) \quad (x, y \in H, l \in \mathbf{R}) \\ (x|y) &= (y|x) \quad (x, y \in H). \end{aligned}$$

Beispiele.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^n \text{ mit } (x|y) &= \sum \xi_i \eta_i \\ C[0,1] \text{ mit } (x|y) &= \int x(t)y(t)dt \\ C^n[0,1] \text{ mit } (x|y) &= \sum_{j=0}^{n} \int x^{(j)}(t)y^{(j)}(t)dt \\ \ell^2 \text{ mit } (x|y) &= \sum \xi_i \eta_i. \end{aligned}$$

Auf einem Prä-Hilbertraum H ist die Abbildung

$$\| \cdot \| : x \mapsto \sqrt{(x|x)}$$

eine Norm.
Falls $(H, \| \cdot \|)$ vollständig ist, dann heißt H ein **Hilbertraum**. ℓ^2_n und ℓ^2 sind Beispiele von Hilberträumen. $C([0,1])$ ist kein Hilbertraum für das oben definierte innere Produkt.
Für einen Prä-Hilbertraum H und $x \in H$ definiert $f_x : H \to \mathbf{R}, y \mapsto (y|x)$ eine stetige lineare Abbildung, wobei $\|f_x\|_{L(H,\mathbf{R})} = \|x\|_H$. (Zum Beweis verwende man Cauchy-Schwarz).

Definition 11.2 *Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ in einem Prä-Hilbertraum heißt* **orthonormal**, *falls $(x_n|x_m) = \delta_{mn}$,* **orthogonal**, *falls $(x_n|x_m) = 0$ $(m \neq n)$ und $x_n \neq 0$ $(n \in \mathbf{N})$.*

Beispiel. Die Familie

$$\{\cos\ 2\pi nt\}_{n=0}^{\infty} \cup \{\sin\ 2\pi nt\}_{n=1}^{\infty}$$

ist orthogonal in $C[0,1]$ für das oben definierte innere Produkt. Ist sie orthonormal?

Wir behandeln jetzt die Frage, wann ein Element $x \in H$ eine Darstellung der Gestalt $x = \sum_{n=1}^{\infty} l_n x_n$ bzgl. eines orthonormalen Systems besitzt, wobei die Reihe in $(H, \| \cdot \|)$ konvergieren soll. Da jedes x_n ein *stetiges* lineares Funktional induziert, sieht man, daß $x = \sum l_n x_n$ impliziert, daß

$$l_n = (\sum l_m x_m | x_n) = (x|x_n).$$

Wir untersuchen daher Reihen der Gestalt $\sum (x|x_n)x_n$ (die **Fourierreihe von** x bzgl. des Orthonormal-Systems $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$).

Hilfssatz 11.3 *Sei (x_n) eine orthonormale Folge eines Prä-Hilbertraumes H, $x \in H$. Dann gilt:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x|x_n)|^2 \leq \|x\|^2 \qquad (x \in E).$$

BEWEIS. Sei $k \in \mathbf{N}$ und $y = \sum_{n=1}^{k} (x|x_n)x_n$, $z = x - y$. Da $y \perp z$, gilt:

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$$

oder

$$\|y\|^2 \leq \|x\|^2.$$

Daraus folgt, daß für jedes $k \in \mathbf{N}$, $\sum_{n=1}^{k} (x|x_n)^2 \leq \|x\|^2$ und damit die Behauptung.

∎

Lemma 11.4 *Sei H ein Hilbertraum, x, (x_n) wie oben. Dann konvergiert*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x|x_n)x_n$$

in H.

BEWEIS. Sei $y_n = \sum_{k=1}^{n} (x|x_k)x_k$. Wir zeigen: (y_n) ist Cauchy. Denn

$$\|y_m - y_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} (x|x_k)^2 \to 0 \text{ mit } m, n \to \infty.$$

∎

BEMERKUNG. Im allgemeinen ist $\sum_{n=1}^{\infty} (x|x_n)x_n$ ungleich x. Wir untersuchen nun, unter welchen Voraussetzungen Gleichheit gelten muß.

Satz 11.5 *Sei (x_n) eine orthonormale Folge in einem Hilbertraum H. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

a) *(x_n) ist maximal (d.h. $x \in H$, $x \perp x_n$ für jedes n impliziert, daß $x = 0$);*

b) *H ist die abgeschlossene lineare Hülle von $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$;*

c) *$x \in H \Rightarrow x = \sum (x|x_n)x_n$;*

d) *$x \in H \Rightarrow \|x\|^2 = \sum |(x|x_n)|^2$ (Parseval'sche Gleichung);*

e) *$x, y \in H \Rightarrow (x|y) = \sum (x|x_n)(y|x_n)$.*

Beweis.

c) $\Rightarrow$ e) $\Rightarrow$ d) sind trivial.

d) $\Rightarrow$ a): (x_n) nicht maximal impliziert die Existenz von $x \in H$ mit $x \neq 0$, $x \perp x_n$ $(n \in \mathbf{N})$. Daher gilt:

$$0 \neq \|x\|^2.$$

Aber $\sum (x|x_n)(x|x_n) = 0$ – Widerspruch!

a) $\Rightarrow$ b): Falls $\overline{[x_n]} \neq H$, wähle $y \in H \setminus \overline{[x_n]}$. Setze $x = y - \sum (y|x_n)x_n$. Dann ist $x \neq 0$, $x \perp x_n$ $(n \in \mathbf{N})$.

b) $\Rightarrow$ c): Sei $x \in H$, $y = \sum (x|x_n)x_n$, $z = x - y$. Aus $z \perp x_n$ $(n \in \mathbf{N})$ folgt: $z \perp \overline{[x_n]}$. Daher gilt: $x = 0$.

■

Satz 11.6 *Jeder separable Hilbertraum besitzt eine orthonormale Basis. (N.B.: Ein metrischer Raum heißt separabel, wenn er eine dichte Folge enthält).*

Beweis. Wir wählen eine dichte Folge (x_n) in H. Daraus wählen wir eine linear unabhängige Teilfolge (y_n), sodaß $[y_n]$ dicht in H liegt. Mit Hilfe des **Gram-Schmidt-Verfahrens** konstruieren wir eine orthonormale Folge (z_n), sodaß

$$[z_1, \ldots, z_m] = [y_1, \ldots, y_m] \text{ für jedes } m.$$

(z_n) hat die gewünschten Eigenschaften.

■

Ab jetzt werden wir stillschweigend annehmen, daß der Hilbertraum H separabel ist.
Wie im endlich dimensionalen Fall gilt der Satz:

Satz 11.7 *Sei K ein abgeschlossener Teilraum von H. Dann gilt:*

$$H = K \oplus K^\perp,$$

d.h. jedes $z \in H$ hat eine eindeutige Darstellung $x + y$, wobei $x \in K$, $y \in K^\perp$.

Beweis. Sei (x_n) eine orthonormale Basis für K. **Es gilt:** $z = x + y$ wobei $x = \sum (z|x_n)x_n$, $y = z - x$ $(x \in K,\ y \perp K)$.

■

Die lineare Abbildung $p_K : x \mapsto y$, wobei $x = y + z$ $(y \in K,\ z \in K^\perp)$ heißt **orthogonale Projektion von H auf K**. Es gilt:

$$\|x - y\| = \inf\{\|x - \overline{y}\| : \overline{y} \in K\}$$

(sogar $\|x - y\| < \|x - \overline{y}\|$ $(\overline{y} \in K,\ \overline{y} \neq y)$. (D.h. y ist der Punkt aus K mit kleinstem Abstand zu x).

Eine wichtige Eigenschaft von Hilberträumen ist die Tatsache, daß sie ihre eigenen Dualräume sind.

Satz 11.8 *Sei $f \in H'$. Dann existiert ein $y \in H$, sodaß $f = f_y$, wobei $f_y : x \mapsto (x|y)$. Außerdem gilt:*

$$\|f\| = \|f_y\|\cdot$$

Beweis. Sei $K = \text{Ker } f$ $(f \neq 0)$. $K^\perp$ ist 1-dimensional. Wähle $\widetilde{y} \in K^\perp$, sodaß $\|\widetilde{y}\| = 1$. Setze $y = f(\widetilde{y})\widetilde{y}$. Dann gilt:

$$f(x) = (x|y).$$

■

Diese Tatsache ermöglicht die Definition der Selbstadjungiertheit für Operatoren im Hilbertraum. Sei $T \in L(H_1, H_2)$. Dann existiert ein $T^* \in L(H_2, H_1)$, sodaß

$$(Tx|y) = (x|T^*y).$$

Denn das Funktional $x \mapsto (Tx|y)$ ist stetig und linear und hat daher die Gestalt $x \mapsto (x|z)$ für $z \in H$. Wir setzen $T^*x = z$. Es gilt: $\|T^*\| = \|T\|$. Denn

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|(Tx|y)| : \|x\| \leq 1,\ \|y\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|(x|T^*y)| : \|x\| \leq 1,\ \|y\| \leq 1\} \\ &= \|T^*\|\cdot \end{aligned}$$

Falls $H_1 = H_2$, dann heißt T **selbstadjungiert**, wenn $T = T^*$. T heißt **normal**, falls $T^*T = TT^*$. Es gilt:

1. S, T selbstadjungiert $\Rightarrow lS + \mu T$ selbstadjungiert (es gilt aber nicht, daß S, T normal $\Rightarrow S + T$ normal);

2. Seien S, T selbstadjungiert. Dann ist ST selbstadjungiert $\Leftrightarrow ST = TS$.

3. Sei S selbstadjungiert. Dann gilt:

$$\|S\| = \sup\{|(Sx|x)| : x \in H, \|x\| \leq 1\};$$

4. Für $S : H_1 \to H_2$ gilt: S^*S und SS^* sind selbstadjungiert und $\|S^*S\| = \|S\|^2$;

5. $S \in L(H)$ ist eine orthonormale Projektion $\Leftrightarrow S^2 = S$ und $S^* = S$.

Beweis. **von 2:** Dies folgt aus der Tatsache, daß $(ST)^* = T^*S^*$. (Denn $(STx|y) = (Tx|S^*y) = (x|T^*S^*y)$).

■

Beweis. **von 3:** Sei $K = \sup\{|(Sx|x)| : \|x\| \leq 1\}$. Es gilt: $K \leq \|S\|$. Wir zeigen: $\|S\| \leq K$. Für $x \in H$ mit $\|x\| \leq 1$, $x \neq 0$, $Sx \neq 0$, $l \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ gilt:

$$\begin{aligned} \|Sx\|^2 &= (Sx|Sx) = (S^2x|x) \\ &= \frac{1}{4}\{(S(lSx + l^{-1}x)|lSx + l^{-1}x) - (S(lSx - l^{-1}x)|lSx - l^{-1}x)\} \\ &\leq (\frac{1}{4})K(\|lSx + l^{-1}x\|^2 + \|lSx - l^{-1}x\|^2) \\ &= \frac{1}{2}K(l^2\|Sx\|^2 + l^{-2}\|x\|^2). \end{aligned}$$

Setze $l^2 = \dfrac{\|x\|}{\|Sx\|}$. Dann gilt:

$$\|Sx\|^2 \leq K\|Sx\|\|x\| \text{ d.h. } \|Sx\| \leq K\|x\|\cdot$$

■

Für Elemente im Hilbertraum bzw. Operatoren darauf, gibt es verschiedene Konvergenzbegriffe. Sei (x_n) eine Folge in H bzw. (S_n) eine Folge in $L(H_1, H_2)$. Wir sagen:

$x_n \to x$ schwach (geschrieben: $x_n \to^w x$), falls $(x_n - x|y) \to 0$ für jedes $y \in H$.

$x_n \to x$ stark (geschrieben: $x_n \to^s x$), falls $\|x_n - x\| \to 0$.

$S_n \to S$ schwach (geschrieben: $S_n \to^w S$), falls $((S_n - S)x|y) \to 0$ $(x \in H_1, y \in H_2)$.

$S_n \to S$ stark (geschrieben: $S_n \to^s S$), falls $\|(S_n - S)x\| \to 0$ $(x \in H_1)$.

$S_n \to S$ gleichmäßig (geschrieben: $S_n \to^u S$), falls $\|S_n - S\| \to 0$.

Beispiele. In ℓ^2 konvergiert (e_n) schwach gegen 0, aber $e_n \not\to^s 0$. Es gilt:

$$\begin{array}{ccc} S_r^n \to^w 0 & \text{aber} & S_r^n \not\to^s 0 \\ S_\ell^n \to^s 0 & \text{aber} & S_\ell^n \not\to^u 0. \end{array}$$

Unser Hauptziel in diesem Kapitel ist es, den folgenden unendlich-dimensionalen Spektralsatz zu beweisen:

Satz 11.9 *Sei S ein* **kompakter, selbstadjungierter** *Operator auf dem separablen Hilbertraum H. Dann existiert eine* **Orthonormalbasis** (x_n) *für H und eine Folge (l_n) in* $\mathbf{R}$ *mit $l_n \to 0$ so, daß*

$$Sx_n = l_n x_n.$$

(Identifizieren wir H und ℓ^2 mit Hilfe der Abbildungen

$$U : (\xi_n) \mapsto \sum \xi_n x_n$$

so sehen wir, daß die Abbildung die Darstellung $M : (\xi_n) \to (l_n \xi_n)$ als Diagonal- oder Multiplikationsoperator hat).

Der Begriff der Kompaktheit für Operatoren wird wie folgt definiert:

Definition 11.10 *Seien E, F Banachräume. $T \in L(E,F)$ heißt* **kompakt**, *falls $\overline{T(B_E)}$, der Abschluß des Bildes der Einheitskugel B_E von E kompakt in F ist.*

Um Kompaktheit festzustellen, sind die folgenden Tatsachen nützlich:

a) Eine Teilmenge M eines Banachraumes ist genau dann relativ kompakt, (d.h., ihr Abschluß ist kompakt) wenn gilt:

$$\bigwedge_{\epsilon > 0} \bigvee_{x_1, \ldots, x_n} M \subseteq \bigcup_{i=1}^n U(x_i, \epsilon).$$

(d.h. M is **totalbeschränkt**);

b) Sei $T \in L(E,F)$ von endlichem Rang. Dann ist T kompakt;

c) Sei T_n eine Folge von kompakten Operatoren in $L(E,F)$, mit $\|T_n - T\| \to 0$ $(T \in L(E,F))$. Dann ist T auch kompakt.

Beweis. Sei $M = T(B)$. Wir verwenden a). Sei $\epsilon > 0$ und wähle $N \in \mathbf{N}$ so, daß

$$\|(T_N - T)x\| \leq \frac{\epsilon}{2} \text{ falls } x \in B_E.$$

Wähle $x_1, \dots, x_m$ so, daß $T_N(B_E) \subseteq \bigcup_{i=1}^m U(x_i, \frac{\epsilon}{2})$. Dann gilt

$$T(B_E) \subseteq \bigcup_{i=1}^m U(x_i, \epsilon).$$

■

Beispiele.

I. Betrachte die Abbildung
$$M_y : (\xi_n) \mapsto (\xi_n \eta_n)$$
auf ℓ^2, wobei $y = (\eta_n) \in \ell^\infty$. Es gilt: $y \in c_0 \Leftrightarrow M_y$ ist kompakt. (Sei $y \in c_0$ und $y_n = (\eta_1, \dots, \eta_n, 0, \dots)$. Es gilt dann: M_{y_n} ist kompakt und $M_{y_n} \to^u M_y$).

II. Sei $K : [0,1]^2 \to \mathbf{R}$ stetig. Dann ist
$$I_K : (C[0,1], \|\cdot\|_2) \to (C[0,1], \|\cdot\|_2)$$
kompakt. Dazu brauchen wir folgende Tatsachen:

1. Es gibt eine Folge K_n von Funktionen der Gestalt $K_n(s,t) = \sum_{i=1}^{r(n)} x_i^n(s) y_i^n(t)$; ($x_i^n \in C([0,1])$, $y_i^n \in C([0,1])$), sodaß $K_n \to K$ gleichmäßig auf $[0,1]^2$.
2. Dann gilt: $I_{K_n} \to^u I_K$.
3. I_{K_n} hat endlichen Rang und ist daher kompakt.

Wir bringen jetzt den Beweis des Spektralsatzes. Wie im endlich-dimensionalen Fall ist der entscheidende Schritt der Nachweis, daß der Operator **einen** Eigenvektor besitzt. Dies ist der Inhalt des folgenden Lemmas:

Hilfssatz 11.11 *Sei $T \in L(H)$ kompakt und selbstadjungiert. Dann existiert ein x_1 in H mit $\|x_1\| = 1$, sodaß*
$$Tx_1 = l_1 x_1,$$
wobei $|l_1| = \|T\| = \sup\{|(Tx|x)| : x \in B_H\}$.

Beweis. O.B.d.A. können wir annehmen, daß

$$\|T\| = \sup\{(Tx|x) : x \in B_H\}$$

(sonst betrachten wir $-T$). Wähle eine Folge (x_n) in B_H, sodaß

$$(Tx_n|x_n) \geq l_1 - \frac{1}{n},$$

wobei $l_1 = \sup\{(Tx|x) : x \in B_H\}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|Tx_n - l_1 x_n\|^2 = \|Tx_n\|^2 - 2l_1(Tx_n|x_n) + l_1^2\|x_n\|^2 \\ &\leq l_1^2 - 2l_1(l_1 - \frac{1}{n}) + l_1^2 \to 0. \end{aligned}$$

Da T kompakt ist, existiert eine Teilfolge von $(Tx_n)_{n\in\mathbf{N}}$, die konvergiert (etwa gegen y). Um die Schreibweise einfach zu halten, nehmen wir an, daß $(Tx_n)_{n\in\mathbf{N}}$ diese Teilfolge ist. Da $\|Tx_n - l_1x_n\| \to 0$, ist auch (x_n) eine Cauchy-Folge. Sei $x_1 = \lim x_n$. Dann ist $y = Tx_1$. Es ist klar, daß $Tx_1 = l_1x_1$ und, falls $\|x_1\| = 1$,

$$(Tx_1|x_1) = l_1 = \max\{(Tx|x) : x \in B_H\}.$$

■

Wir sind jetzt in der Lage, den Spektralsatz zu beweisen.

Beweis. Betrachten wir die Restriktion T_1 von T auf $[x_1]^\perp$, so bekommen wir einen Einheitsvektor x_2, der senkrecht auf x_1 steht, und l_2, sodaß $T_1x_2 = Tx_2 = l_2x_2$. Außerdem gilt:

$$|l_2| = \sup\{|(Tx|x)| : x \perp x_1\} \leq |l_1|.$$

Wiederholen wir diese Methode, so bekommen wir eine orthonormale Folge (x_n) in H und eine Folge (l_n) in $\mathbf{R}$ mit

$$Tx_n = l_nx_n \text{ und } |l_{n+1}| \leq |l_n| \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Die Folge (l_n) liegt in c_0. Denn wäre dies nicht der Fall, so gäbe es ein $\epsilon > 0$, mit $|l_n| \geq \epsilon$ für jedes n. Dann ist die Folge $\{x_n/l_n\}$ beschränkt in H. Sein Bild unter T allerdings ist $\{x_n\}$ und dies enthält keine konvergierende Teilfolge. Dies steht im Widerspruch zu der Kompaktheit von T. Sei jetzt $H_\infty = [\overline{x}_n]$, $H_0 = H_\infty^\perp$. Die Einschränkung von T auf H_0 verschwindet (sonst könnten wir den Hilfssatz anwenden, um einen Eigenwert $l \neq 0$ zu bekommen, der im Absolutbetrag kleiner als jedes l_n ist und dies ist unmöglich). Wir bekommen jetzt die gewünschte Basis, indem wir das System (x_n) vereinigen mit einer orthonormalen Basis für H_0).

■

12 Die L^p-Räume

Sei μ ein W-Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ (der Fall eines nicht-negativen, σ-additiven Maßes wird ähnlich behandelt). Wir definieren für $p \in [1, \infty[$

$$\mathcal{L}^p(\mu) = \{x : \Omega \to \mathbf{R}, x \ \mu\text{-meßbar}, \ : |x|^p \text{ integrierbar}\}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\infty(\mu) &= \{x : \Omega \to \mathbf{R}, x \ \mu\text{-meßbar und es existiert eine Nullmenge} \\ N &\subseteq \Omega \text{ und } K \in \mathbf{R}_+, \text{sodaß } |x(\omega)| \leq K \text{ für } \omega \notin N\}. \end{aligned}$$

Darauf betrachten wir die Abbildungen

$$\| \cdot \|_p : x \mapsto \left(\int |x(t)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \quad (p \in [1, \infty[)$$

bzw.

$$\| \cdot \|_\infty : x \mapsto \inf\{K > 0 : |x| \leq K \text{ f.ü.}\}$$

Jedes $\| \cdot \|_p$ ist eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^p$ (Beweis unten). Der entsprechende Nullraum (d.h. $\{x : \|x\|_p = 0\}$) ist

$$N = \{x : \Omega \to \mathbf{R} : x = 0 \text{ f.ü.}\}$$

Daher ist $L^p(\mu) = \mathcal{L}^p(\mu)/N$ ein normierter Raum mit der induzierten Norm. Wir zeigen, daß $L^p(\mu)$ ein Banachraum ist und bestimmen den Dualraum.

Bemerkung. Im Gegensatz zur Situation der ℓ^p-Räume gilt nun, für $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $L^1(\mu) \supseteq L^p(\mu) \supseteq L^q(\mu) \supseteq L^\infty(\mu)$.

Hilfssatz 12.1 *Sei $x \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und $(x_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge von approximierenden Treppenfunktionen, wie wir sie in §2 konstruierten (d.h., x_n ist μ-meßbar und nimmt nur endlich viele Werte an, $|x_n| \leq |x|$ und $(x_n(\omega))_{n=1}^\infty$ konvergiert für fast alle $\omega \in \Omega$ gegen $x(\omega)$). Dann gilt: $x_n \in \mathcal{L}^p$ und*

$$\|x_n - x\|_p \to 0 \text{ und } \|x_n\|_p \to \|x\|_p.$$

Beweis. Zunächst die Bemerkung, daß x genau dann aus $\mathcal{L}^p$ ist, wenn x^+ und x^- aus $\mathcal{L}^p$ sind. Außerdem gilt:

$$\|x\|_p^p = \|x^+\|_p^p + \|x^-\|_p^p,$$

bzw. für $p = \infty$

$$\|x\|_\infty = \max\{\|x^+\|_\infty, \|x^-\|_\infty\}.$$

Man kann daher (ohne Verlust der Allgemeinheit) annehmen, daß $x \geq 0$. Dann gilt nach dem Satz von Beppo-Levi, für $1 \leq p < \infty$

$$x_n \in \mathcal{L}^p, \quad \|x_n - x\|_p \to 0, \quad \|x_n\| \to \|x\|$$

da $0 \leq x_n \leq x$. Der Fall $p = \infty$ ist einfach und wir lassen ihn als Übungsaufgabe.

∎

Aus diesem Hilfssatz folgt, daß die Treppenfunktionen dicht in $\mathcal{L}^p$ liegen ($1 \leq p \leq \infty$). Falls

$$x = \sum_{i=1}^{n} l_i \chi_{A_i}$$

eine solche Treppenfunktion ist, wobei die $(A_i)_{i=1}^n$ disjunkt sind, dann ist

$$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |l|^p \mu(A_i))^{\frac{1}{p}},$$

d.h. die Norm (in ℓ_n^p) der Folge $(l_i \mu(A_i)^{\frac{1}{p}})$. Daraus folgt, daß $\|\cdot\|_p$ eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^p(\mu)$ ist. Denn, falls (x_n) bzw. (y_n) die Folgen von Treppenfunktionen sind, die gegen x bzw. y konvergieren, so haben wir die Ungleichungen

$$\|x_n + y_n\|_p \leq \|x_n\|_p + \|y_n\|_p$$

und im Limes

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Satz 12.2 *Der Raum $\mathcal{L}^1(\mu)$ ist vollständig, d.h. falls (x_n) eine Folge aus $\mathcal{L}^1(\mu)$ mit*

$$\lim_{m,n\to\infty} \int |x_m - x_n| d\mu = 0$$

dann existiert ein $x \in \mathcal{L}^1(\mu)$, sodaß $\int |x_n - x| d\mu \to 0$. Außerdem existiert eine Teilfolge (x_{n_k}), die f.ü. gegen x konvergiert.

Beweis. Wähle eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ so, daß für $k \in \mathbf{N}$

$$\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\|_1 \leq 2^{-k}.$$

Setzen wir, für $k \geq 1$,

$$y_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}.$$

Dann konvergiert

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|$$

überall monoton in $[0, \infty]$ (wobei der Limes auch $+\infty$ sein kann). Aus dem erweitertem Satz von Beppo-Levi erhalten wir, daß y außerhalb einer Nullmenge N ungleich $+\infty$ ist und daher ist $x = x_{n_1} + \sum_{k=1}^\infty y_k$ auf $\Omega \setminus N$ wohldefiniert. Setzen wir, für $\omega \in N$, $x(\omega) = 0$, so gilt

$$x \in \mathcal{L}^1(\mu), \ \|x_n - x\|_1 \to 0 \text{ und } x_{n_k} \to x \text{ f.ü.}$$

Wir bemerken noch, daß der Limes x (bis auf die Werte auf einer beliebigen Nullmenge) eindeutig ist.

■

Korollar 12.3 *Der Raum $(\mathcal{L}^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ ist vollständig $(1 \leq p \leq \infty)$.*

Korollar 12.4 *Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ ein Banachraum.*

Jetzt betrachten wir Dualitätstheorie für Lebesgue-Räume. Seien p, q konjugiert (d.h. $1 \leq p, q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Für $y \in \mathcal{L}^q(\mu)$, $x \in \mathcal{L}^p(\mu)$ gilt die Hölder'sche Ungleichung:

$$xy \in \mathcal{L}^1(\mu) \text{ und } |\int xy d\mu| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Daher gilt: Die Abbildung

$$y \mapsto T_y$$

wobei

$$T_y : x \mapsto \int xy d\mu,$$

bildet $\mathcal{L}^q(\mu)$ in $\mathcal{L}^p(\mu)'$ und daher $L^q(\mu)$ in $L^q(\mu)'$. Analog zum Fall der ℓ^p-Räume zeigt man, daß $y \mapsto T_y$ ein **isometrischer Isomorphismus** von $L^q(\mu)$ auf einem Teilraum von $L^p(\mu)'$ ist. Wir zeigen jetzt die Surjektivität.

Hilfssatz 12.5 *Für $p \in [1, \infty[$ ist die Abbildung $y \mapsto T_y$ surjektiv.*

Beweisskizze. Sei $f \in L^p(\mu)'$. Wir müssen zeigen, daß f die Gestalt T_y hat, für $y \in \mathcal{L}^q(\mu)$. Betrachte dazu das Maß

$$\nu : A \mapsto f(\chi_A) \quad (A \in \mathcal{A}).$$

Man prüft nach, daß ν ein σ-additives, μ-absolut-stetiges Maß auf $\mathcal{A}$ ist. Nach dem Satz von Radon-Nikodym besitzt daher dieses Maß eine **Dichte** y. Man beweist dann:

$$y \in \mathcal{L}^q(\mu) \text{ und } f = T_y.$$

■

Korollar 12.6 *Sei $p \in [1, \infty[$. Dann ist $L^q(\mu)$ der Dualraum zu $L^p(\mu)$. Genauer, die Abbildung*

$$y \mapsto T_y$$

induziert einen isometrischen Isomorphismus von $L^q(\mu)$ auf $L^p(\mu)'$.

Wieder ist der Fall $p = \infty$ eine Ausnahme. $L^1(\mu)$ ist **nicht** der Dualraum von $L^\infty(\mu)$. In der Tat gibt es keinen Raum E, sodaß $E' = L^1(\mu)$.

Bei der Herleitung der Dualität der L^p-Räume haben wir oben ganz wesentlich den Satz von Radon-Nikodym verwendet. Wir skizzieren nun einen (zweiten) Beweis dieser Dualität, der diesen Satz nicht verwendet; dann drehen wir den Spieß quasi um und beweisen den Satz von Radon-Nikodym aus der Dualität der L^p-Räume. Der Zweck der Übung besteht darin, die enge Verwandtschaft dieser Sätze dem Leser klarzumachen.

Ausgangspunkt ist die Selbstdualität der Hilberträume (§11, 4. Satz): $L^2(\mu)' = L^2(\mu)$, wobei die Dualität durch das innere Produkt

$$(x|y) = \int xy d\mu$$

gegeben ist. Diesen Satz, den wir gratis aus der allgemeinen Theorie der Hilberträume erhalten, versuchen wir nun auf andere Werte von p zu erweitern:

Hilfssatz 12.7 $L^1(\mu)' = L^\infty(\mu)$.

BEWEIS. Wir müssen zeigen, daß die isometrische Einbettung

$$\begin{array}{rcl} i : L^\infty(\mu) & \to & L^1(\mu)' \\ i(y) & = & T_y \end{array}$$

surjektiv ist. Sei T also auf $L^1(\mu)'$. Da $L^2(\mu) \subseteq L^1(\mu)$, wobei die Einbettung stetig ist (genauer: $\|\cdot\|_2 \geq \|\cdot\|_1$ für ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ, (Übungsaufgabe)) ist die Restriktion von T auf $L^2(\mu)$ ein stetiges lineares Funktional.
Es gibt also $y \in L^2(\mu)$, sodaß

$$T(x) = \int xyd\mu \quad (x \in L^2(\mu) \; *$$

Wir müssen noch zeigen, daß $y \in L^\infty(\mu)$ und die Formel (*) für alle $x \in L^1(\mu)$ gilt. Wir zeigen zuerst, daß $\|y\|_\infty \leq \|T\|_{L^1(\mu)'}$. Wenn dies nicht so wäre, könnten wir $\epsilon > 0$ finden, sodaß entweder
(i) $\mu\{t \in \Omega : y(t) > \|T\| + \epsilon\} > 0$, oder
(ii) $\mu\{t \in \Omega : -y(t) > \|T\| + \epsilon\} > 0$.
Angenommen (i) ist der Fall ((ii) geht analog). Sei

$$A = \{t \in \Omega : y(t) > \|T\| + \epsilon\}$$

und

$$x = \mu(A)^{-1}.\chi_A.$$

Dann ist $x \in L^\infty(\mu)$ und $\|x\|_1 = 1$. Wegen (*) gilt

$$\|T\| \geq |Tx| = \int xyd\mu \geq (\|T\| + \epsilon).|\int_A xd\mu| = \|T\| + \epsilon,$$

—ein Widerspruch. Daher ist $y \in L^\infty(\mu)$. Die stetigen Funktionale T und T_y auf $L^1(\mu)$ stimmen auf dem dichten Teilraum $L^2(\mu)$ überein, daher gilt $T = T_y$.

■

BEMERKUNG. Mit—im wesentlichen—demselben Beweis kann man zeigen, daß $L^p(\mu)' = L^q(\mu)$ für $p \in [1, 2]$, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Für den Fall $p \in]2, \infty[$, für den der Dualitätssatz auch richtig ist, müssen wir uns aber etwas Neues einfallen lassen.

BEMERKUNG. Sei $\nu : \mathcal{A} \to \mathbf{R}$ ein auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ definiertes signiertes Maß. Im §4 haben wir ν_+, ν_- and $|\nu|$ definiert. Man sieht leicht, daß

$$\nu_+(A) = \sup\{\nu(B) : B \subseteq A, B \in \mathcal{A}\}$$

und

$$\nu_-(A) = \sup\{-\nu(B) : B \subseteq A, B \in \mathcal{A}\}.$$

Außerdem gilt: $|\nu(A)| \leq |\nu|(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Sei $x \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Dann ist

$$\nu(A) = \int_A xd\mu$$

ein signiertes Maß und es gilt

$$\begin{aligned}\nu_+(A) &= \int_A x_+ d\mu \\ \nu_-(A) &= \int_A x_- d\mu \\ |\nu|(A) &= \int_A |x| d\mu.\end{aligned}$$

Das Maß ν wird symbolisch als $\nu = x.\mu$ bezeichnet. Man schreibt auch $\frac{d\nu}{d\mu} = x$.
Das Maß $\nu = x.\mu$ hängt nur von der Äquivalenzklasse von x ab; man kann also $\nu = x.\mu$ für $x \in L^1(\mu)$ definieren.
Weiters ist $\nu = x.\mu$ **absolut stetig** bezüglich μ (symbolisch $\nu \ll \mu$), das heißt $\nu(A) = 0$ für jede μ-Nullmenge A. Wenn $x \in L^\infty(\mu)$, dann gilt für $\nu = x.\mu$, daß $|\nu(A)| \leq \|x\|_\infty.\mu(A)$, $(A \in \mathcal{A})$.
Für ein signiertes Maß ν auf $\mathcal{A}$ kann man für beschränkte $\mathcal{A}$-meßbare Funktionen y durch die Formel

$$\int y d\nu = \int y d\nu_+ - \int y d\nu_-$$

ein Integral $\int y d\nu$ definieren.

Der folgende Satz ist eine Version des Satzes von Radon-Nikodym, für die wir jetzt einen neuen Beweis geben:

Satz 12.8 *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und ν ein signiertes Maß auf $\mathcal{A}$.*
(a) Wenn es ein $M \in \mathbf{R}_+$ gibt, sodaß

$$|\nu(A)| \leq M.\mu(A) \qquad (A \in \mathcal{A}),$$

dann gibt es $x \in L^\infty(\mu)$, sodaß $\nu = x.\mu$. Es gilt dann $\|x\|_\infty \leq M$.
(b) Wenn $\nu \ll \mu$, dann gibt es $x \in L^1(\mu)$, sodaß $\nu = x.\mu$.

Beweis. (a) Das Maß ν definiert ein lineares Funktional T auf dem Raum der Treppenfunktionen vermöge

$$T(\sum_{i=1}^n l_i \chi_{A_i}) = \sum_{i=1}^n l_i \nu(A_i) = \int (\sum_{i=1}^n l_i \chi_{A_i}) d\nu.$$

Man prüft nach, daß $\|T\|_{L^1(\mu)'} \leq M$, daß also T zu einem stetigen linearen Funktional auf $L^1(\mu)$ fortgesetzt werden kann. Nach dem Hilfssatz gibt es ein $x \in L^\infty(\mu)$, $\|x\|_\infty \leq M$, sodaß für $y \in L^1(\mu)$

$$T(y) = \int y.x d\mu.$$

Insbesondere gilt

$$\nu(A) = \int_A x d\mu \qquad (A \in \mathcal{A}).$$

(b) Um diesen Fall auf (a) zurückzuführen, wenden wir einen Trick an: Wir betrachten das endliche positive Maß $\mu + |\nu|$ und bemerken, daß

$$|\nu(A)| \leq |\nu|(A) \leq |\nu|(A) + \mu(A) \qquad (A \in \mathcal{A}),$$

daß also das signierte Maß ν bezüglich des Referenz-Maßes $\mu + |\nu|$ die Voraussetzung von (a) erfüllt (mit $M = 1$). Daher gibt es ein $z \in L^\infty(\mu + |\nu|) = L^\infty(\mu)$, $\|z\|_\infty \leq 1$, sodaß für alle $y \in L^1(\mu + |\nu|)$

$$\int y d\nu = \int y.z d(\mu + |\nu|).$$

Symbolisch geschrieben: $z = \frac{d\nu}{d(\mu + |\nu|)}$. Wir suchen aber $\frac{d\nu}{d\mu}$. Dafür verwenden wir als heuristische Hilfe folgendes
Faktum Sei $a \in \mathbf{R}$ und $b > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{n} \frac{a}{|a|+b} \left[\frac{|a|}{|a|+b}\right]^n &= \frac{a}{|a|+b} \cdot \frac{1}{1 - \frac{|a|}{|a|+b}} \\ &= \frac{a}{|a|+b} \cdot \frac{|a|+b}{|a|+b-|a|} \\ &= \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

Man wird also vermuten, daß die Funktion $x = \frac{d\nu}{d\mu}$ gegeben ist durch

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} z(t).[|z(t)|]^n.$$

Nach diesen heuristischen Überlegungen wenden wir uns dem formalen Beweis zu. Zuerst bemerken wir, daß

$$\mu\{t : z(t) = 1\} = 0,$$

da $\nu\{t : z(t) = 1\} = |\nu|\{t : z(t) = 1\} + \mu\{t : z(t) = 1\}$. Ähnlich sieht man, daß

$$\mu\{t : z(t) = -1\} = 0,$$

daß also für μ fast alle $t \in \Omega$ gilt: $|z(t)| < 1$. Nun gilt, für $A \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \int_A z d\mu + \int_A z.d|\nu| \\ &= \int_A z d\mu + \int_A z.|z| d\mu + \int_A z.|z| d|\nu| \\ &= \int_A z d\mu + \int_A z.|z| d\mu + \int_A z.|z|^2 d\mu + \int_A z.|z|^2 d|\nu| \\ &\vdots \\ &= \sum_{i=0}^{n} \int_A z.|z|^i d\mu + \int_A z.|z|^n d|\nu|. \end{aligned}$$

Der letzte Term geht nach dem Satz von Lebesgue gegen 0 für $n \to \infty$, also

$$\nu(A) = \int_A (\sum_{i=0}^{\infty} z.|z|^i) d\mu,$$

womit wir mit $x = \sum_{i=0}^{\infty} z.|z|^i$ (die Summe konvergiert punktweise fast überall!) eine Funktion gefunden haben, die $\nu = x.\mu$ erfüllt. Die Tatsache, daß $x \in L^1(\mu)$, folgt daraus, daß für jedes $A \in \mathcal{A}$

$$|\int_A x d\mu| = |\nu(A)| < \infty.$$

■

Satz 12.9 *Für $p \in [1, \infty[$ und $q \in]1, \infty]$, mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, gilt $L^p(\mu)' = L^q(\mu)$.*

Beweis. Da das Resultat für $p = 1$ bereits gezeigt ist, können wir annehmen, daß $p \in]1, \infty[$. Sei $T \in L^p(\mu)'$. Wir müssen zeigen, daß T von der Form $T_y : x \mapsto (x|y)$ für ein $y \in L^q(\mu)$ ist. Das Funktional T definiert eine reellwertige Funktion ν auf $\mathcal{A}$

$$\nu(A) = T(\chi_A),$$

die klarerweise additiv ist. Für jede Folge $(A_n)_{n=1}^{\infty}$, die monoton gegen $\emptyset$ geht, gilt

$$\lim_{n\to\infty} |\nu(A)| \leq \lim_{n\to\infty} \|T\| \|\chi_{A_n}\|_p = \lim_{n\to\infty} \|T\| \mu(A_n)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Daraus folgt, daß ν ein signiertes Maß auf $\mathcal{A}$ definiert. Es gilt $\nu \ll \mu$; daher können wir den vorhergehenden Satz anwenden und erhalten ein $y \in L^1(\mu)$, sodaß

$$T(x) = \int x d\mu = \int xy d\mu = T_y(x) \qquad (x \in L^\infty(\mu)), \ **$$

Wir müssen noch zeigen, daß $y \in L^q(\mu)$ und das (**) für alle $x \in L^p(\mu)$ gilt.
Wir werden zeigen, daß y_+ und y_- in $L^q(\mu)$ sind. Sei $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von Treppenfunktionen, $0 \leq y_n \leq y_+$, die monoton gegen y_+ konvergiert. Wenn

$$y_n = \sum_{i=1}^{k(n)} l_i^{(n)} \chi_{A_i}^{(n)},$$

wobei, für jedes $n \in \mathbf{N}$, $(A_i^{(n)})_{i=1}^{k(n)}$ eine Menge von disjunkten Elementen von $\mathcal{A}$ ist, definieren wir

$$x_n = \sum_{i=1}^{k(n)} (l_i^{(n)})^{q-1} \chi_{A_i}^{(n)}.$$

Wir können die L^p-Norm von x_n abschätzen durch

$$\|x_n\|_p = \left[\sum_{i=1}^{n} (l_i^{(n)})^{(q-1)p} . \mu(A_i^{(n)}) \right]^{\frac{1}{p}} = \|y_n\|_q^{\frac{q}{p}}.$$

Es gelten die Ungleichungen

$$|Tx_n| = |(x_n|y)| = (x_n|y_+) = \lim_{m\to\infty} (x_n|y_m) \geq (x_n|y_n) = \|y_n\|_q^q$$

und

$$|Tx_n| \leq \|T\|_{L^p(\mu)'} . \|x_n\|_p = \|T\| \cdot \|y_n\|_q^{\frac{q}{p}}$$

daher

$$\|y_n\|_q^q \leq \|T\|\|y_n\|_q^{\frac{q}{p}} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

oder

$$\|y_n\|_q^{q(1-\frac{1}{p})} = \|y_n\|_q \leq \|T\| \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Daher gilt $\|y_+\|_q \leq \|T\|$ und $\|y_-\|_q \leq \|T\|$. (Mit einem etwas geschickteren Argument kann man zeigen, daß $\|y\|_q = \|T\|$—während wir jetzt nur $\|y\|_q \leq 2\|T\|$ erhalten—wir benötigen diese Verfeinerung aber nicht, da sie schließlich ohnehin daraus folgen wird, daß $i : L^q(\mu) \to L^p(\mu)'$ eine isometrische Einbettung ist.)
y ist also in $L^q(\mu)$ und T_y daher ein stetiges lineares Funktional auf $L^p(\mu)$, das wegen (**) auf dem dichten Teilraum $L^\infty(\mu)$ mit T übereinstimmt. Daher $T = T_y$, womit alles bewiesen ist.

∎

A Anhang

A.1 Satz von Baire

In diesem Anhang sammeln wir (ohne Beweis) einige Ergebnisse, die mit Hilfe des Satzes von Baire bewiesen werden.

Satz A.1 *I. Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit*
Sei $\mathcal{F}$ eine Familie von beschränkten linearen Operatoren zwischen den Banachräumen E und F. Dann gilt: Falls $\mathcal{F}$ punktweise beschränkt
(d.h. $\bigwedge_{x\in E} \bigvee_{K>0} \bigwedge_{T\in\mathcal{F}} \|Tx\| \leq K$), dann ist $\mathcal{F}$ gleichmäßig beschränkt (d.h. $\bigvee_{M>0} \bigwedge_{T\in\mathcal{F}} \|T\| \leq M$).

Satz A.2 *II. Satz von Banach-Steinhaus Sei T_n eine Folge in $L(E,F)$ (E, F Banachräume), die punktweise konvergiert (d.h. T_nx konvergeriert für jedes $x \in E$). Dann ist die Abbildung*

$$x \to \lim_n T_nx$$

stetig und linear.

Satz A.3 *III. Epimorphismussatz Sei $T \in L(E,F)$ surjektiv ((E,F) Banachräume). Dann existiert $K > 0$ so, daß*

$$\bigwedge_{y\in F} \bigvee_{x\in E} Tx = y \wedge \|x\| \leq K\|y\| \cdot$$

Satz A.4 *IV. Isomorphismussatz Sei $T \in L(E,F)$ eine Bijektion (E, F Banachräume). Dann ist T^{-1} stetig.*

Satz A.5 *V. Graphensatz Sei $T : E \to F$ linear. Dann ist T stetig, falls*

$$\Gamma(T) = \{(x, Tx) : x \in E\}$$

abgeschlossen in $E \times F$ ist.

A.2 Lebesgue-Stieltjes Integrale und das Riemann-Integral

Dieser Anhang enthält einige Ergebnisse der klassischen Analysis, die im Zusammenhang mit abstrakter Maßtheorie stehen.

I. Lebesgue-Stieltjes Integrale

Sei μ ein endliches, σ-additives Maß auf $\mathbf{R}$. Die Funktion

$$F_\mu : t \mapsto \begin{cases} \mu([0,t[) & (t > 0) \\ -\mu([t,0[) & (t \leq 0) \end{cases}$$

ist die **Verteilung** von μ. Aus der σ-Additivität von μ folgt die Tatsache, daß F_μ linksseitig stetig ist. μ ist genau dann nicht negativ, wenn F_μ monoton steigend ist. Umgekehrt gilt: falls F eine steigende, linksseitig stetige Funktion ist mit $F(0) = 0$, dann existiert ein nicht negatives Maß μ, mit $F = F_\mu$. (Dies folgt aus den Ergebnissen von §1 – wir setzen

$$\mu([a,b[) = F(b) - F(a)$$

und verwenden die Caratheodory-Erweiterung). Das entsprechende Integral $\int x d\mu$ einer Funktion x heißt das **Lebesgue-Stieltjes Integral** bzgl. F (oft geschrieben: $\int x dF$).
Wir betrachten jetzt den Fall von signierten Maßen. In diesem Fall ist F_μ nicht notwendigerweise monoton. Es gilt aber

$$F_\mu = F_{\mu^+} - F_{\mu^-},$$

d.h. F_μ ist eine Differenz von steigenden Funktionen. Dies führt zur Definition:

Definition A.6 *Eine Funktion $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ist von beschränkter Variation, falls*

$$\bigvee_{K>0} \bigwedge_{t_0<t_1<\cdots<t_n} \sum_{i=0}^{n-1} |F(t_{i+1}) - F(t_i)| \leq K.$$

Das kleinste solche K heißt die **Variation** *von F (geschrieben: $V(F)$).*

Es ist klar, daß monotone, beschränkte Funktionen diese Eigenschaft haben. Daher auch jedes F_μ. Umgekehrt gilt:

Satz A.7 *F ist genau dann von beschränkter Variation, wenn F eine Darstellung*

$$F = F_1 - F_2$$

hat, wobei F_1 und F_2 monoton steigend sind.

Beweisskizze. Setze

$$\begin{aligned} G_1(t) &= V(F|_{[0,t[}) \quad (t \geq 0) \\ G_1(t) &= -V(F|_{[t,0[}) \quad (t < 0) \end{aligned}$$

und $F_1 = (G + F)/2$, $F_2 = (G - F)/2$.

∎

Zusammenfassend: Die beschränkte Funktion $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ist genau dann die Verteilung eines signierten Maßes μ auf $\mathbf{R}$, wenn

a) $F(0) = 0$;

b) F linksseitig stetig ist;

c) F von beschränkter Variation ist.

(Dann gilt: $V(F) = |\mu|(\mathbf{R})$.)

Wir bringen jetzt einige Sätze über die Differenzierbarkeit von monotonen Funktionen.

Satz A.8 *Sei $x : [0,1] \to \mathbf{R}$ monoton wachsend. Dann gilt:*

a) $\{t : x \text{ an der Stelle } t \text{ nicht stetig}\}$ ist abzählbar;

b) $\{t : x \text{ an der Stelle } t \text{ nicht differenzierbar}\}$ ist eine Nullmenge.

Satz A.9 *Sei (x_n) eine Folge von monoton wachsenden Funktionen, sodaß $x = \sum x_n$ existiert. Dann gilt: $x' = \sum x'_n$ f.ü.*

Satz A.10 *Sei $A \subset I$ meßbar. Dann gilt: $X_A = t \mapsto \int_0^t \chi_A$ ist fast überall differenzierbar und $\frac{d}{dt} X_A = \chi_A$ f.ü.*

Satz A.11 *Sei $x : [0,1] \to \mathbf{R}$ Lebesgue-integrierbar mit Stammfunktion X. Dann gilt: X ist f.ü. differenzierbar und $X'(t) = x(t)$ fü.*

Definition A.12 *Eine Funktion $x : [0,1] \to \mathbf{R}$ ist* **absolut-stetig***, falls folgendes gilt:*

$$\bigwedge_{\epsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{s_1<t_1\le s_2<t_2\le\cdots\le s_n<t_n} \sum |t_i - s_i| < \delta \Rightarrow \sum |x(t_i) - x(s_i)| < \epsilon.$$

Es folgt aus dieser Bedingung, daß X stetig und von beschränkter Variation ist. Sei μ dann das entsprechende Maß. Die obige Bedingung bedeutet, daß μ absolut-stetig ist bzgl. Lebesgue-Maß. Daher existiert eine integrierbare Funktion x, sodaß

$$X(t) - X(0) = \mu([0,1[) = \int_0^t x dl,$$

d.h. X ist eine Stammfunktion von x. Daher gilt:

Satz A.13 *Eine Funktion $X : [0,1] \to \mathbf{R}$ ist genau dann die Stammfunktion einer L-integrierbaren Funktion x, wenn X absolut-stetig ist. In diesem Fall gilt: $X'(t)$ existiert f.ü. und $x(t) = X'(t)$ f.ü.*

Bemerkung. **Der Zusammenhang zwischen dem Lebesgue- und Riemann-Integral:** Wir bemerken zunächst, daß nicht jede Lebesgue-integrierbare Funktion Riemann-integrierbar ist. Das Standardbeispiel ist die Dirichlet-Funktion $\chi_{[0,1]\cap\mathbf{Q}}$. Allerdings ist jede Riemann-integrierbare Funktion Lebesgue-integrierbar, wie wir jetzt zeigen werden. Sei x :

$[0,1] \to \mathbf{R}$ eine beschränkte Funktion und definiere für jedes $n \in \mathbf{N}$ Treppenfunktionen h_n und H_n wie folgt:

$$\begin{aligned} H_n &= \sum_{k=0}^{2^n-2} M_k \chi_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[} + M_{2^n-1} \chi_{[\frac{2^n-1}{2^n}, 1]} \\ h_n &= \sum_{k=0}^{2^n-2} m_k \chi_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[} + m_{2^n-1} \chi_{[\frac{2^n-1}{2^n}, 1]}, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} M_k &= \sup\{x(t) : t \in [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[\} \\ m_k &= \inf\{x(t) : t \in [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[\}. \end{aligned}$$

Es gilt: $h_n \leq x \leq H_n$ und $h_n \uparrow$, $H_n \downarrow$. Sei $h = \lim h_n$, $H = \lim H_n$. Dann gilt: $h \leq x \leq H$, wobei h und H L-integrierbar sind. Außerdem gilt:

$$\int h = \lim_n \int h_n, \qquad \int H = \lim_n \int H_n.$$

Aber $\int h_n$ (bzw. $\int H_n$) ist eine untere Riemann-Summe (bzw. eine obere Summe) für das Integral von x. Es folgt aus der Definition, daß x genau dann Riemann integrierbar ist, wenn $\int h = \int H$, d.h. $h = H$ f.ü. Weiters gilt für $t \in [0,1]$ $h(t) = H(t)$ genau dann, wenn x an der Stelle t stetig ist (bzw. rechtsseitig stetig ist, wenn t von der Form $\frac{k}{2^n}$). Daraus erhalten wir folgendes Ergebnis:

Satz A.14 *Sei $x : [0,1] \to \mathbf{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann ist x genau dann Riemann integrierbar, wenn*

$$l\{t : x \text{ an der Stelle } t \text{ nicht stetig}\} = 0.$$

Falls x Riemann integrierbar ist, dann ist x auch L-integrierbar und $R - \int x = L - \int x$.

A.3 Integraloperatoren auf L^2

Sei $\Omega\colon = [0,1], \mathcal{A}$ die σ-Algebra der Borel-Mengen in $[0,1], l$ das Lebesgue-Maß auf $\mathcal{A}$. Für $[0,1] \times [0,1]$ schreiben wir $[0,1]^2$, für $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, $\mathcal{A}^2$, für $l \otimes l$, l^2. Wir betrachten einen Kern $k\colon [0,1]^2 \to \mathbf{R}$ und verlangen $k \in L^2(l^2)$. Ist dann $x\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ eine Funktion in $L^2(l)$, existiert das Integral

$$(Kx)(s)\colon = \int_0^1 k(s,t)x(t)dt$$

für fast alle $s \in [0,1]$. Wegen $k \in L^2(l^2)$ existiert nämlich für fast alle $s \in [0,1]$ das Integral $\int_0^1 \left|k(s,t)\right|^2 dt$. Für diese s ist dann wegen der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung

$$\int_0^1 \left|k(s,t)x(t)\right|dt \le \left[\int_0^1 \left|k(s,t)\right|^2 dt\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^1 \left|x(t)\right|^2 dt\right]^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Wir können daher jeder Funktion $x \in L^2(l)$ die Funktion

$$K\,x\colon [0,1] \to \mathbf{R}, s \mapsto \int_0^1 k(s,t)x(t)dt$$

zuordnen, und es entsteht ein linearer Operator K auf $L^2(l)$. Über diesen Operator K beweisen wir:

Satz A.15 *Satz (Eigenschaften eines Integraloperators mit L^2-Kern)*

(a) K bildet $L^2(l)$ in sich ab.

(b) K ist beschränkt mit Norm $\le \|k\|_2$.

(c) K ist kompakt.

(d) Gilt $k(s,t) = k(t,s)$ für fast alle $(s,t) \in [0,1]^2$, dann ist K selbstadjungiert.

Beweis. Zu (a): Sei $x \in L^2(l)$. Wir haben zu zeigen, daß $\int_0^1 \left|(Kx)(s)\right|^2 ds < \infty$ ist. Es ist

$$\begin{aligned}\int_0^1 \big|(Kx)(s)\big|^2 ds &= \int_0^1 \left|\int_0^1 k(s,t)x(t)dt\right|^2 ds \\ &\le \int_0^1 \big\|k(s_1.)\big\|_2^2 \|x\|_2^2 ds \\ &= \|x\|_2^2 \int_0^1 \int_0^1 \big|k(s,t)\big|^2 dt\, ds \\ &= \|x\|_2^2 \int_{[0,1]^2} \big|k(s,t)\big|^2 d(s,t) < \infty.\end{aligned}$$

Hieraus folgt (a).

Zu (b): Aus der eben durchgeführten Abschätzung ergibt sich für jedes $x \in L_2(l)$

$$\|Kx\|_2 \le \|k\|_2 \, \|x\|_2.$$

Hiernach ist K beschränkt mit Norm $\le \|k\|_2$.

Für den Beweis von (c) brauchen wir das folgende leicht zu beweisende Resultat:

■

Lemma A.16 *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein W-Raum, $\mathcal{A}_0$ eine Boole'sche Halbalgebra, die $\mathcal{A}$ erzeugt. Mit T bezeichen wir den Raum aller $\mathcal{A}_0$-Treppenfunktionen auf Ω, also den Raum aller Funktionen der Form $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$, $\alpha_i \in \mathbf{R}$, $A_i \in \mathcal{A}_0$ für $1 \le i \le n$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \ne j$. Dann liegt T dicht in $L^2(\mu)$.*

Wir führen den Beweis des Satzes zu Ende. Wir wenden das Lemma auf den W-Raum $\big([0,1]^2, \mathcal{A}^2, l^2\big)$ und auf die Boole'sche Halbalgebra der meßbaren Rechtecken $A \times B$, $A, B \in \mathcal{A}$, an. Es liefert eine Folge (k_n) von Treppenfunktionen der Form

$$k_n(s,t) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j} \chi_{A_i}(s) \chi_{B_j}(t),$$

derart, daß gilt $\lim_n \|k_n - k\|_2 = 0$. Bezeichnen wir mit K_n den durch den Kern k_n definierten Integraloperator auf $L^2(l)$, dann folgt aus Teil (b), daß die Operatoren K_n in der Operatornorm gegen K konvergieren. K_n ist aber von endlichem Rang. Denn wählen wir $x \in L^2(l)$ und ist $s \in A_i$, dann ist

$$(K_n x)(s) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} \int_{B_i} x(t) dt_i$$

und hieraus folgt, daß der Bildbereich von K_n von den Funktionen $\chi_{A_i}, 1 \le i \le n$, erzeugt wird. Hiermit sind die K_n von endlichem Rang, und K ist kompakt.

Zu (d): Für $x, y \in L^2(l)$ ist

$$\begin{aligned}(Kx|y) &= \int_0^1 \left(\int_0^1 k(s,t)x(t)dt \right) y(s)ds \\ &= \int_0^1 \int_0^1 k(s,t)x(t)y(s)dt\,ds\end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned}(x|Ky) &= \int_0^1 x(t) \left(\int_0^1 k(t,s)y(s)ds \right) dt \\ &= \int_0^1 \int_0^1 k(s,t)x(t)y(s)ds\,dt.\end{aligned}$$

Wir sind daher am Ziel, wenn wir zeigen können, daß der Satz von Fubini anwendbar ist. Dazu ist es notwendig, zu zeigen, daß das Integral

$$\int_{[0,1]^2} k(s,t)x(t)y(s)d(s,t)$$

existiert. Da aber wegen der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung das Produkt zweier L^2-Funktionen eine L^1-Funktion ist, folgt die Existenz unseres Integrals aus der Tatsache, daß die Funktionen $k(s,t)$ und $x(t)y(s)$ beide im Raum $L^2(l)$ liegen.

A.4 Begriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie

a) WÖRTERBUCH

Wahrscheinlichkeitstheorie	Analysis
W-Raum	positiver, normierter Maßraum
Elementarereignis (Ausgang)	Punkt
Ereignis	meßbare Menge
das sichere Ereignis	Ω
Das unmögliche Ereignis	$\emptyset$ (bzw. eine Nullmenge)
fast sicher	fast überall
Erwartungswert	Integral

b) STATISTISCHE GRÖSSEN

In der Praxis gibt es drei wichtige Sorten von W-maßen auf $\mathbf{R}$:

A. **Diskret und endlich.** Ω ist endlich, etwa $\Omega = \{0, 1, \ldots, n\}$, μ ist eine Summe von δ-Maßen. Dann sind meßbare Funktionen x endliche Vektoren und das Integral ist

$$\int x \, d\mu = \sum_{r=0}^{n} \xi_r a_r,$$

wobei $\mu = \sum_{r=0}^{n} a_r \delta_r$ und $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Beispiel. Die Bernoulli Verteilung: $\Omega = \{0, \ldots, n\}$, $\mu = \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{2^n} \binom{n}{r} \delta_r$.

B. **Diskret und unendlich.** Ω ist abzählbar, etwa $\Omega = \mathbf{N}_0$, μ ist eine Kombination von δ-Maßen, etwa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta_n$. Dann sind meßbare Funktionen (unendliche) Folgen, und das Integral einer solchen Folge ist

$$\int x \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n a_n.$$

C. **Kontinuierlich.** Ω ist ein Intervall, μ hat eine Dichte ϕ bezgl. des Lebesgue-Maßes, d.h., $\mu(A) = \int_A \phi(x) d\lambda(x)$.

Das Integral ist in diesem Fall das Lebesgue Integral

$$\int f(x)\phi(x) \, dl(x).$$

Beispiel. Normalverteilung auf $\mathbf{R}$. $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Für ein W-Maß μ auf $\mathbf{R}$ definiert man:

die **r-ten Momente:** $m'_r = \int_{\mathbf{R}} x^r d\mu(x)$ (falls x^r bezgl. μ integriebar ist);

insbesonders den **Mittelwert** $m'_1 = \int x d\mu(x)$;

die **r-ten zentrierten Momente** $m_r = \int (x - m'_1)^r d\mu(x)$;.

insbesonders die **Varianz** $V = m_2$ und die **Streuung** oder **Standardabweichung** σ, wobei $\sigma = \sqrt{m_2}$;

die **momenterzeugende Funktion** $\phi : h \mapsto \int_{\mathbf{R}} e^{hx} d\mu(x)$;

die **charakteristische Funktion** $\psi : t \mapsto \phi(it) = \int e^{itx} d\mu(x)$;

die **erzeugende Funktion** $t \mapsto \int t^x d\mu(x)$;

die **Verteilungsfunktion** $F : x \mapsto \mu\big\{] - \infty, x[\big\}$.

c) ZUFALLSVARIABLEN. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein W-Raum, $X\colon \Omega \to \mathbf{R}$ eine Zufallsvariable. Dann ist

$$\bar{\mu}\colon A \mapsto \mu\big(x^{-1}(A)\big)$$

ein W-Maß auf **R**—die **Verteilung** oder das **Gesetz** vom X.
Damit kann man die Begriffe aus b) auf X übertragen—etwa

die r-ten Momente $m'_r = \int\limits_{\Omega} X^r(\omega) d\mu(\omega)$;

die zentrierten Momente $m_r = \int\limits_{\Omega} (X(\omega) - m'_1)^r d\mu(\omega)$;

die momenterzeugende Funktion $\phi : h \mapsto \int\limits_{\Omega} e^{hX(\omega)} d\mu(\omega)$;

die charakteristische Funktion $\psi : t \mapsto \int e^{itX(\omega)} d\mu$;

die Verteilungsfunktion $F \,:\, x \mapsto \mu\big\{X^{-1}(] - \infty, x[\big\}$.

A.5 Die Fourier-Reihe und die schwingende Saite

Betrachte die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$$

auf $[0,\pi] \times \mathbf{R}^+$, mit Randbedingungen

$$\begin{aligned} u(0,t) &= u(\pi,t) = 0 \quad (t \in \mathbf{R}^+) \\ u(s,0) &= g(s) \quad \big(s \in [0,\pi]\big) \end{aligned}$$

Trennung der Variablen. Der Ansatz $u(s,t) = v(s)w(t)$ führt zu den Gleichungen

$$v'' + lv = 0 \quad (*) \quad \ddot{w} + lw = 0 \quad (**)$$

(l ein Parameter). Damit $(*)$ periodische Lösungen hat, muß $l = n^2 \quad (n \in \mathbf{N})$ sein. Das führt zu Lösungen der Gestalt

$$u_n(s,t) = \sin ns \cos nt.$$

Man bekommt allgemeinere Lösungen $u(s,t) = \sum b_n \sin ns \cos nt$ durch Superposition. Die Koeffizienten (b_n) werden durch die Randbedingung $u(s,0) = g(s)$ bestimmt, d.h. die (b_n) sind die Koeffizienten $b_n = \dfrac{2}{\pi} \int_0^\pi g(x) \sin nx \, dx$ der Fourier-Sinusreihe von g (siehe unten).

Bemerkung. **Fourier-Reihen:** Sei $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbf{R}$ eine geeignete Funktion. Wir suchen eine Darstellung von f als Summe einer Reihe von trigonometrischen Polynomen. Aus den Orthogonalitätsbeziehungen

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx &= 0 \quad (m \neq n) \\ \int_{-\pi}^{\pi} (\cos mx)^2 dx &= \pi \quad (n > 0) \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx &= 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx &= 0 \quad (m \neq n) \\ \int_{-\pi}^{\pi} (\sin nx)^2 \, dx &= \pi \end{aligned}$$

und einigen formalen Manipulationen folgt, daß die einzige Möglichkeit die Reihe

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \, dx$$

ist, wobei $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$ und $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$. Dies ist die **Fourier-Reihe** von f, und die a_n und b_n sind die **Fourier-Koeffizienten**. Falls f genügend glatt ist, dann konvergiert diese Reihe auf $[-\pi,\pi]$ gegen f. Falls f gerade (bzw. ungerade) ist, dann gilt: $b_n = 0 \quad (n \in \mathbf{N})$ bzw. $a_n = 0 \quad (n \in \mathbf{N})$.

Bemerkung. **Fourier Sinus- und Cosinusreihen:** Sei $g\colon [0,\pi] \to \mathbf{R}$ geeignet und sei g_e die gerade (bzw. g_o die ungerade) Fortsetzung von g (d.h., $g_e(x) = g(-x)$, bzw. $g_o(x) = -g(-x)$ $(x \in [-\pi, 0[))$. Die Fourierreihen von g_e bzw. g_o haben die Gestalt:

$$\frac{12}{a\ _n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad \text{wobei} \quad a_n = \frac{2\pi}{\int}{}^{\pi}_{0} g(x) \cos nx \, dx$$

bzw.

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad \text{wobei} \quad b_n = \frac{2\pi}{\int}{}^{\pi}_{0} g(x) \sin nx \, dx$$

Sie konvergieren gegen g auf $[0,\pi]$ (g glatt) und heißen die **Fourier-Cosinusreihe** bzw. die **Fourier-Sinusreihe** von g.

Literaturhinweise zur zur Maß- und Integrationstheorie

Preisgünstige deutschsprachige Bücher:

* Goffmann: Reelle Funktionen, B.I.-Wissenschaftsverlag 1976 (Originalausgabe: 1953).

* Henze: Einführung in die Maßtheorie, BI-Hochschultaschenbücher 1970.

* Michel: Maß- und Integrationstheorie I, VEB, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1978.

* Floret: Maß- und Integrationstheorie, Teubner Studienbücher, Stuttgart 1981.

Klassische Bücher:

* Halmos: Measure Theory, van Nostrand, Princeton 1968.

* Bauer: Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundlagen der Maßtheorie, de Gruyter 1968.

* Asplund/Bungart: A first course in integration, Holt Rinehart and Winston, Chicago 1966.

* Mangold-Knopp: Einführung in die höhere Mathematik, Vol. 4, Hirzel, Stuttgart 1973.

Besonders anregende, weiterführende Bücher:

* Oxtoby: Measure and Category, Springer, New York 1970.

* Neveu: Mathematische Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie, Oldenburg Verlag, München 1969.

Literaturhinweise zur Funktionalanalysis

* Hirzebruch/Scharlau: Einführung in die Funktionalanalysis, BI-Taschenbuch 1968.

* Goffman/Pedrick: A first course in functional analysis, Prentice-Hall N.J. 1965.

* Ljusternik/Sobolew: Elemente der Funktionalanalysis, Akademie-Verlag-Berlin 1968.