Mathematik für Wirtschatsinformatiker II

Konrad Kiener

Institut für Analysis und Numerik, Johannes Kepler Universität, A 4040 Linz, Österreich

KAPITEL 1

Folgen und Reihen

1.1. Folgen, Konvergenz von Folgen. Die Euler'sche Zahl e.

Wenn wir in der Natur die Länge einer Strecke messen, so können wir das immer nur in Bezug auf eine vorgegebene Einheit durchführen, z.B. 1m. Wenn darauf noch eine cm– und mm–Einteilung vorhanden ist, so können wir die Länge der Strecke als ein Vielfaches der Eiheit, des 100–sten und des 1000–sten Teiles davon angeben, letztlich daher als ein *rationales Vielfaches* der Einheit 1 mit der *Genauigkeit* von 1 mm.

Es war eine höchst beunruhignde Entdeckung zur Zeit des PYTHAGORAS die Länge der Diagonale eines Quadrates mit Seitenlänge 1, eine offensichtlich sinnvolle geometrische Größe, nicht durch eine Verhältniszahl beschreibbar ist. In heutiger Sprechweise: $\sqrt{2}$ ist keine *rationale Zahl*, es gibt also keine **ganzen** Zahlen p, q mit $\sqrt{2} = p/q$. Schon die Griechische Mathematik hat den Zahlbegriff erweitert zu dem, was wir heute als *reelle Zahlen* $\mathbf{R}$ bezeichnen. Die endgültige Klärung dieses Zahlbegriffes erfolgte erst gegen Ende des vorigen Jahrhunderts. Ein wesentlicher Schritt dazu war die genaue Fassung der Begriffe von Konvergenz und Grenzwert, um den Körper der rationalen Zahlen $\mathbf{Q}$ in geeigneter Weise zu vervollständigen und abzuschließen. Diese Begriffe gehören zu den fundamentalen der Mathematik und ihrer Anwendungen und wir werden ihnen in vielen Varianten begegnen. Wir gehen hier der Kürze halber bereits von einer intuitiven Vorstellung der reellen Zahlen als Punkte der *Zahlengeraden* (diese enthält dann offenbar auch Längen wie $\sqrt{2}$) aus und machen uns im Folgenden klar, in welchem Sinne diese Menge vollständig ist und die Menge der rationalen Zahlen abschließt.

Definition 1.1. Eine *reelle Zahlenfolge* ist eine Abbildung $F : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$. Anstelle von $F(n)$ schreiben wir meist a_n und symbolisieren die Folge in einer der folgenden Formen

$$(a_1, a_2, a_3, \dots), \quad (a_n)_{n\in\mathbf{N}}, \quad \text{oder kurz} \quad (a_n).$$

Die a_n heißen die Glieder der Folge (a_n). Manchmal ist es zweckmäßig, die Indizierung (=Nummerierung) der Folgenglieder bei 0 beginnen zu lassen: $(a_0, a_1, \dots)$.

Wir können Folgen gliedweise addieren, multiplizieren, mit einer festen Zahl c multiplizieren und durcheinander dividieren und erhalten wieder Folgen: d.h. mit (a_n), (b_n)

sind auch $(a_n + b_n), (a_n \cdot b_n), (c \cdot a_n)$ und (a_n/b_n) Folgen. Letztere natürlich nur, falls alle $b_n \neq 0$.

BEISPIEL 1.1. a) Die Glieder einer Folge müssen nicht notwendig verschieden sein. Daher entspricht etwa der konstanten Funktion $F : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, definiert durch $F(n) = a \quad (n \in \mathbf{N})$, die sg. *konstante* Folge $(a, a, a, \dots)$.

b) Zu $q \in \mathbf{R}$ ist die *geometrische Folge* definiert durch $(q, q^2, q^3, \dots)$

c) Zu $a, d \in \mathbf{R}$ bezeichnet $(a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots)$ eine sg. *arithmetische Folge* mit dem Inkrement (Zuwachs) d.

d) Zahlreiche und wichtige Beispiele von Folgen ergeben sich durch Rekusionsformeln und die Iteration von Funktionen. z.B. (vgl. Math I Erzeugende Funktionen) liefert die Rekursion mit Anfangswerten

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n, \quad a_0 = a_1 = 1 \quad (n \geq 2)$$

die Folge

$$a_n = \frac{7}{9}2^n + (-1)^n(\frac{n}{3} + \frac{2}{9}).$$

Mit einer Funktion $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ (allgemeiner $F : A \to A$) können wir zu gegebenem x_0 die *Folge der Iterierten* definieren durch

$$x_n := F(x_{n-1}) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Die ersten paar Glieder explizit angeschrieben, erhalten wir damit

$$x_0, x_1 = F(x_0), x_2 = F(F(x_0)), x_3 = F(F(F(x_0))), \dots.$$

(vgl. Übung, wo $F(x) = \sin x$ war.)

DEFINITION 1.2. $a \in \mathbf{R}$ heißt Grenzwert (Limes) der Folge $(a_1, a_2, \dots)$, falls gilt

$$\bigwedge_{\epsilon>0} \bigvee_{n_0\in\mathbf{N}} \bigwedge_{n\geq n_0} |a_n - a| < \epsilon \tag{1.1}$$

Schreibweise:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n, \quad \text{oder} \quad a_n \to a, \quad \text{oder kurz} \quad a = \lim a_n.$$

Falls $a = 0$, dann heißt (a_n) *Nullfolge.* (a_n) heißt *konvergent*, falls ein Grenzwert existiert, sonst *divergent.*

Wir können (1.1) so interpretieren: bei beliebig vorgegebener Genauigkeit $\epsilon > 0$ liegen ab einem (von ϵ abhängigen) n_0 alle Folgenglieder a_n innerhalb der Genauigkeitsgrenze nahe bei a. Man sagt auch: sie liegen in der ϵ–Umgebung des Punktes a. Dies ist die Menge $\{x \in \mathbf{R} : 0 \leq |x - a| < \epsilon\}$. Die Bestimmung des kleinsten n_0 mit der in der Definition angegebenen Eigenschaft in Abhängigkeit vom vorgegeben ϵ

bedeutet eine Abschätzung der Geschwindigkeit, mit der die Folge gegen den Grenzwert geht. Dies kann ein schwieriges Problem sein, unter Umständen schwieriger als die Berechnung des Grenzwertes selbst.

Unmittelbar aus der Definition ergibt sich

FOLGERUNG 1.1. *a) Eine Folge (a_n) konvergiert genau dann gegen 0, wenn die Folge der Absolutbeträge gegen 0 konvergiert:*

$$a_n \to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |a_n| \to 0.$$

b) Eine Folge (a_n) konvergiert genau dann gegen a, wenn $(a_n - a)$ eine Nullfolge ist.

c) Falls die Folge (a_n) gegen a konvergiert, dann konvergiert auch die Folge (a_{n+1}) gegen a.

DEFINITION 1.3. (a_n) strebt (geht) gegen ∞ (in Zeichen $a_n \to \infty$ oder $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$), falls

$$\bigwedge_{K>0} \bigvee_{n_0\in\mathbf{N}} \bigwedge_{n\geq n_0} a_n > K \tag{1.2}$$

(a_n) strebt (geht) gegen $-\infty$ (in Zeichen $a_n \to -\infty$ oder $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$), falls

$$\bigwedge_{K<0} \bigvee_{n_0\in\mathbf{N}} \bigwedge_{n\geq n_0} a_n < K \tag{1.3}$$

(a_n) heißt oszillierend, falls (a_n) divergiert, aber weder gegen ∞ noch gegen $-\infty$ geht.

SATZ 1.2. *a) Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.*
b) Jede konvergente Folge (a_n) ist beschränkt, d.h. es existiert ein $K > 0$, sodaß für alle n gilt $|a_n| \leq K$.
c) Das Produkt einer beschränkten Folge mit einer 0–Folge ist eine 0–Folge.

BEWEIS. Zu a): Sei $\lim a_n = a$ und $\lim a_n = b$. Wir wählen $\epsilon > 0$. Dann existiert n_1 , sodaß für alle $n \geq n_1$ gilt $|a_n - a| < \epsilon/2$ und analog existiert n_2, sodaß für alle $n \geq n_2$ gilt $|a_n - b| < \epsilon/2$. Sei $N = \max\{n_1, n_2\}$. Unter Anwendung der Dreiecksungleichung folgt dann für $n \geq N$

$$|a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |b - a_n| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Die nichtnegative Größe $|a-b|$ ist daher kleiner als jede beliebig vorgegebene positive Größe ϵ. Dies ist nur möglich für $|a - b| = 0$. Also gilt $a = b$.

Zu b): Offenbar ist jede 0–Folge beschränkt (ja?). Ist weiter $\lim a_n = a$, dann folgt die Behauptung aus

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a|.$$

Zu c): Sei $\lim a_n = 0$ und für alle $n \in \mathbf{N}$ $|b_n| \leq K$ mit $K > 0$. Sei weiters $\epsilon > 0$. Dann existiert ein n_0, sodaß für alle $n \geq n_0$: $|a_n| < \epsilon/K$ (Beachte: in der Definition der Konvergenz kann das ϵ beliebig sein, also auch ϵ/K!). Dann aber erhalten wir für alle $n \geq n_0$: $|a_n \cdot b_n| \leq |a_n| K < (\epsilon/K)K = \epsilon$. Also gilt auch $a_n \cdot b_n \to 0$. □

Für das Rechnen mit Grenzwerten gilt folgender

Satz 1.3. *Seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen, $c \in \mathbf{R}$. Dann gilt*

a) $\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n$

b) $\lim(ca_n) = c \lim a_n$

c) $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$

d) $\lim(a_n/b_n) = \lim a_n / \lim b_n$, falls alle $b_n \neq 0$ und $\lim b_n \neq 0$.

Beweis. Nur für c): Sei $\lim a_n = a$ und $\lim a_n = b$. Nach dem vorigen Satz ist die Folge (a_n) beschränkt durch ein $K > 0$. Unter Anwendung der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} |ab - a_n b_n| &= |ab - a_n b + a_n b - a_n b_n| \leq |ab - a_n b| + |a_n b - a_n b_n| \\ &\leq |b||a - a_n| + |a_n||b - b_n| \leq |b||a - a_n| + |K||b - b_n| \end{aligned}$$

Die rechte Seite der vorigen Zeile ist wegen Satz 1.2 eine 0–Folge. Daher die Behauptung. □

Der folgende Satz zeigt das Verhalten der Grenzwertbildung gegenüber der Ordnungsstruktur von $\mathbf{R}$.

Satz 1.4. *a) Seien (a_n), (b_n) konvergente Folgen. Für alle n ab einem gewissen n_0 (man sagt dann:* für fast alle *n) gelte $a_n \leq b_n$. Dann gilt auch* $\lim a_n \leq \lim b_n$.

b) Seien (a_n), (b_n), (c_n) konvergente Folgen, sodaß für fast alle n gilt $a_n \leq b_n \leq c_n$. Weiters gelte $\lim a_n = \lim c_n =: d$. *Dann konvergiert auch (b_n) und* $\lim b_n = d$ *(Sandwich–Prinzip)*

Wie kann man entscheiden, ob eine Folge konvergiert, wenn man den Grenzwert nicht kennt? Der folgende Satz ist konzeptuell und praktisch oft zur Fehlerabschaätzung von fundamentaler Bedeutung.

Satz 1.5 (Konvergenzkriterium v. CAUCHY). *Eine Folge (a_n) konvergiert genau dann, wenn gilt*

$$\bigwedge_{\epsilon > 0} \bigvee_{n_0 \in \mathbf{N}} \bigwedge_{n,m \geq n_0} |a_n - a_m| < \epsilon$$

Definition 1.4. Eine Folge (a_n) heißt monoton steigend (genauer monoton nicht fallend), falls $a_n \leq a_{n+1}$. Eine Folge (a_n) heißt monoton fallend (genauer monoton nicht steigend), falls $a_n \geq a_{n+1}$. Bei strenger Monotonie ist dann Gleichheit ausgeschlossen.

In vielen Fällen ist folgendes Konvergenzkriterium nützlich.

Satz 1.6. *Eine beschränkte, monotone (steigend oder fallend) Folge ist konvergent. Genauer: Eine nach unten (oben) beschränkte, monoton fallende (steigende) Folge ist konvergent.*

Beispiel 1.2. a) $(1/n)$ ist eine 0–Folge: Um dies entsprechend der Definition einzusehen, machen wir uns zunutze, wie die ganzen Zahlen auf der Zahlengeraden liegen: jede reelle Zahl liegt zwischen 2 aufeinander folgenden ganzen Zahlen. Sein nun $\epsilon > 0$. Es existiert daher ein (eindeutig bestimmtes) natürliches n_0 mit $n_0 - 1 \leq 1/\epsilon < n_0$. Dann aber gilt für alle $n \geq n_0$

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon.$$

b) Wir untersuchen für ein $q \in \mathbf{R}$ die geometrische Folge q^n. Es gilt

1. $|q| < 1 \Longrightarrow q^n \to 0$
2. $q > 1 \Longrightarrow q^n \to \infty$
3. $q = 1 \Longrightarrow q^n = 1 \to 1$
4. $q \leq -1 \Longrightarrow (q^n)$ oszillierend

Beweis: zu 1. Wegen $|q| < 1$ ist $(|q|^n)$ streng monoton fallend und klarerweise nach unten beschränkt durch 0. Die Folge ist daher konvergent. Sei a der Grenzwert. Nach Folgerung 1.1 ist auch $|q|^{n+1} = |q||q|^n$ gegen a konvergent und daher gilt $a = |q|a$. Dies ist wegen $|q| < 1$ nur möglich für $a = 0$.
2., 3., 4. Übung.

c) Sei $F : [0, \infty[\to [0, \infty[$ definiert durch $F(x) = \sqrt{1+x}$. Die Folge (x_n) sei rekursiv definiert durch

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = F(x_n) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Es läßt sich zeigen (z.B. durch Induktion), daß die Folge durch 2 nach oben beschränkt und monoton wachsend ist. Nach Satz 1.1 ist die Folge daher konvergent. Durch Grenzübergang auf beiden Seiten der Iterationsgleichung erhalten wir $a = \sqrt{1+a}$ und daraus für a die Gleichung $a^2 = 1 + a$ mit den Lösungen $a = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}$. Da alle Folgenglieder positiv sind, scheidet die negative Lösung aus und somit ist der Grenzwert

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Daraus erhalten wir eine Approximation von $\sqrt{5}$ mit irrationalen x_n

$$\sqrt{5} = -1 + \lim_{n\to\infty} 2x_n.$$

Sei nun $F(x) = 1/(1+x)$ und entsprechend sei (x_n) rekursiv definiert durch

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = F(x_n) = 1/(1+x_n) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Zunächst gilt offenbar für alle n $x_n \leq 1$ und daher $x_n \geq \frac{1}{2}$. Diese Folge ist nicht monoton. Mit dem Cauchy–Kriterium läßt sich aber nachweisen, daß die Folge konvergent ist und der Grenzwert erfüllt somit $a = \frac{1}{1+a}$, woraus folgt

$$a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Nun erhalten wir eine andere Approximation von $\sqrt{5}$ mit rationalen x_n

$$\sqrt{5} = 1 + \lim_{n\to\infty} 2x_n.$$

Bemerkung 1.1. Es sei besonders hervorgehoben, daß das Berechnen des Grenzwertes in den vorigen Beispielen durch Lösen der Gleichung $F(a) = a$ i.a. nur möglich ist, wenn man bereits weiß, daß die Folge der Iterierten konvergiert. Die Gleichung $F(a) = a$ besagt dann, daß a ein sg. *Fixpunkt* von F ist.

Beispiel: Ist etwa $F(x) := -x$, dann ist die rekursiv definierte Folge gegeben durch $x_{n+1} = -x_n$. Bei einem Anfangswert $x_0 = 1$ erhalten wir $x_n = (-1)^n$, also eine oszillierende Folge. Das Auflösen der Gleichung $F(x) = -x = x$ liefert aber den “Grenzwert” 0.

d) Sei $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Wir zeigen, daß diese Folge monoton wachsend und nach oben beschränkt ist: aus dem binomischen Lehrsatz erhalten wir

$$\begin{aligned}
x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \\
&= 1 + \frac{n}{1}\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\frac{1}{n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \\
&< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 3.
\end{aligned}$$

Jeder Klammerausdruck der vorletzten Zeile dieser Kette wächst mit n, sodaß die Folge x_n monoton wächst. Weiters ist jeder Klammerazsdruck kleiner 1 und daher gilt die letzte Ungleichung. Die Abschätzung nach oben durch 3 gilt wegen $2^{n-1} < n!$ und der Summenformel für die geometrische Reihe.

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Nach Satz 1.6 hat die Folge (x_n) daher einen Grenzwert. Zusammenfassend und ergänzend gilt

SATZ 1.7. *Die Folge $(1+1/n)^n$ ist konvergent. Ihr Grenzwert ist die sg. Euler'sche Zahl.*

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \tag{1.4}$$

Die Euler'sche Zahl ist irrational und es gilt

$$e = 2,7182818284590\cdots$$

Es läßt sich weiter zeigen, daß für jede gegen ∞ strebende Folge (a_n) gilt

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}. \tag{1.5}$$

Die Folge (1.5) ist zur tatsächlichen Berechnung von e nicht geeignet, da sie sehr langsam konvergiert: man braucht ca. 16.000 Glieder, um e nur auf 4 Dezimalstellen genau zu erhalten. (vgl. Abb.2)

Die Folgen (1.5) für e ergeben sich im Zusammenhang mit Zinseszins–Berechnung. Sei $p\,\%$ der jährliche Zinssatz, so schreiben wir $q = p/100$.

1) Ohne Zinseszins: Wenn ein Kapital K mit einem Zinssatz von $p\,\%$ verzinst wird, so stehen bei 1–jähriger Verzinsung nach 1 Jahr $K + Kq$ zur Verfügung, nach 2 Jahren entsprechend $K + 2Kq$ und nach n Jahren $K(1 + nq)$ zur Verfügung.

2) Mit Zinseszins, jährliche Verzinsung: Nach 1 Jahr (wie vorher) $K(1 + q)$. Nach 2 Jahren $K(1 + q)(1 + q)$ und nach k Jahren $K(1 + q)^k$.

3) Mit Zinseszins, monatliche Verzinsung: Nach 1 Jahr $K(1+q/12)^{12}$, nach 2 Jahren $K(1 + q/12)^{2*12}$ und nach k Jahren $K(1 + q/12)^{k*12}$.

Wird die Verzinsung in immer kürzerem Abstand $1/n$ vorgenommen, so beläuft sich nach 1 Jahr das Gesamtkapital (K plus aufgelaufene Zinsen) auf $K\big(1 + \frac{q}{n}\big)^n$ und wird im Grenzfall die

4) stetige Verzinsung:

$$\lim_{n\to\infty} K\big(1+\frac{q}{n}\big)^n = \lim_{n\to\infty} K\big(1+\frac{1}{n/q}\big)^n = \lim_{n\to\infty} K\left(\big(1+\frac{1}{n/q}\big)^{n/q}\right)^q = K\,e^q.$$

Hier ist klar, daß für festes q die Folge (n/q) mit n gegen ∞ strebt.

Nach k Jahren beträgt somit bei stetiger Verzinsung das Gesamtkapital: Ke^{kq}.

1.2. Reihen

Die oben angegebene Dezimaldarstellung für die Euler'sche Zahl $e = 2,7182\cdots$ ist eine Kurzschreibweise für

$$e = 2 + 7 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-4} + \cdots$$

DEFINITION 1.5. Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. Wir definieren $s_1 = a_1$ und für $n \geq 2$

$$s_n = s_{n-1} + a_n.$$

Also: $s_2 = a_1 + a_2$, $s_3 = s_2 + a_3 = a_1 + a_2 + a_3$ usw. Meist schreibt man
$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

s_n heißt die *n–te Partialsumme* der unendlichen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Man nennt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergent (divergent)*, wenn die Folge der Partialsummen (s_n) im Sinne der Definition 1.1 konvergent (divergent) ist. Oft beginnt der *Summationsindex n* bei 0.

Im Sinne dieser Definition ist die Dezimaldarstellung einer nichtnegativen reellen Zahl $x = b_0, b_1 b_2 b_3 \ldots$ die Abkürzung einer konvergenten (Nachweis vgl. Übungen) Reihe der Form

$$x = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{10^n} \quad (b_0 \in \mathbf{Z}_+, \quad 0 \leq b_n \leq 9).$$

Dies wieder ist ein Ausdruck dafür, daß wir die reelle Zahl x durch eine Folge rationaler Zahlen, nämlich durch die **endlichen Teilsummen** dieser unendliche Reihe approximieren (= annähern) können.

BEISPIEL 1.3. Wir untersuchen die Konvergenz der *geometrische Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$.

LEMMA 1.8. *Für alle $q \neq 1$ gilt*

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}. \tag{1.6}$$

Dies ergibt sich sofort aus

$$(1+q+q^2+\cdots+q^n)(1-q) = 1+q+q^2+\cdots+q^n - q - q^2 - \cdots - q^n - q^{n+1} = 1 - q^{n+1}.$$

Unter Berücksichtigung von Beispiel 1.2 erhalten wir sofort

SATZ 1.9. *Die geometrische Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ *ist konvergent genau dann, wenn* $|q| < 1$, *genauer*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \textit{für} \quad |q| < 1 \\ = \infty & \textit{für} \quad q \geq 1 \\ \textit{oszillierend (also divergent) für} & q \leq -1. \end{cases}$$

Die Frage nach der Konvergenz oder Divergenz einer Reihe läßt sich oft durch Vergleich mit einer bereits bekannten Reihe beantworten. Für Divergenz–Fragen eignet sich das

SATZ 1.10 (Minorantenkriterium). *Seien* (a_n), (b_n) *zwei Folgen. Es gelte (für fast alle n)* $a_n \geq b_n \geq 0$. *Falls* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$, *dann gilt auch* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

BEWEIS. O.B.d.A. gelte für alle n : $a_n \geq b_n \geq 0$. Dann gilt offenbar für die Partialsummen der beiden Reihen

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq t_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n.$$

Da nach Voraussetzung $t_n \to \infty$, folgt daraus auch $s_n \to \infty$. □

Es folgen nun Kriterien für die Konvergenz von Reihen.

SATZ 1.11. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *sei konvergent. Dann gilt* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *Falls daher umgekehrt* (a_n) *keine 0–Folge ist, dann divergiert die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *konvergent, dann ist auch* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergent (aus der absoluten Konvergenz folgt die gewöhnliche) und es gilt*

$$|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

BEWEIS. Dies folgt sofort aus dem Cauchy–Kriterium Satz 1.5 für die Folge der Partialsummen mit dem Spezialfall $k = 1$: $s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \to 0$. Der zweite Teil benützt zusätzlich noch die Dreiecksungleichung: danach ist

$$0 \leq |s_{n+k} - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+k}|.$$

Die rechte Seite geht bei beliebigem n gegen 0 für $k \to \infty$ nach Voraussetzung und daher auch die linke. Die Behauptung folgt wieder aus dem Cauchy–Kriterium. □

BEISPIEL 1.4. Die *harmonische Reihe* ist definiert als $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Es ist zwar $\frac{1}{n} \to 0$, die Reihe ist aber divergent. Das obige Kriterium ist also zwar notwendig, aber nicht hinreichend für die Konvergenz.

SATZ 1.12 (Majorantenkriterium). *Seien* (a_n), (b_n) *zwei Folgen. Es gelte (für fast alle n)* $|a_n| \leq b_n$. *Falls* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergiert, dann kovergiert* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *und daher konvergiert auch* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

SATZ 1.13 (Wurzelkriterium). *Sei (a_n) eine Folge, für die $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} := q$ existiere. Dann gilt*
a) Falls $q < 1$, dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ und damit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

b) Falls $q > 1$, dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

c) Falls $q = 1$, dann läßt sich keine allgemeine Aussage bzgl. Konvergenz (Divergenz) treffen.

SATZ 1.14 (Qotientenkriterium). *Sei (a_n) eine Folge, für die $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| := q$ existiere. Dann gilt*
a) Falls $q < 1$, dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ und damit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

b) Falls $q > 1$, dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

c) Falls $q = 1$, dann läßt sich keine allgemeine Aussage bzgl. Konvergenz (Divergenz) treffen.

Wir benötigen noch einen Satz über die Multiplikation konvergenter Reihen. Wenn wir das Produkt von endlichen Summen bilden, so ergibt sich dieses als die Summe aller möglichen Produkte, etwa

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_m) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} a_k \cdot b_l.$$

Es spielt dabei keine Rolle, in welcher Reihenfolge wir diese Summation vornehmen. Bei unendlichen Summen ist dies, selbst wenn die beteiligten Reihen konvergieren i.a. nur unter zusätzlichen Bedingungen der Fall. Es gilt

SATZ 1.15 (Doppelreihensatz). *$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{l=1}^{\infty} b_l$ seien* **absolut** *konvergente Reihen. Dann ist jede aus allen möglichen Produkten $a_k b_l$ gebildete Summe $\sum_{k,l=1}^{\infty} a_k b_l$ absolut konvergent, ihr Wert ist unabhängig von der Art der Reihenfolge der Summation und es gilt*

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} a_k b_l = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{l=1}^{\infty} b_l.$$

Insbesondere gilt (die Indizierung beginne jetzt bei 0)

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} a_k b_l = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{l=0}^{\infty} b_l.$$

Der mittlere Term heißt das CAUCHY–Produkt der beiden Reihen.

BEISPIEL 1.5. Wir untersuchen die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

und wollen diejenigen $x \in \mathbf{R}$ bestimmen, für die diese Reihe konvergiert. Setzen wir $a_n = \frac{1}{n!}x^n$, so liefert das Quotientenkriterium

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!x^{n+1}}{(n+1)!x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}|x| = q = 0.$$

Die Reihe konvergiert also absolut für beliebiges $x \in \mathbf{R}$. Dies rechtfertigt folgende

Definition 1.6. Die Abbildung

$$x \to \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$$

ist für alle $x \in \mathbf{R}$ definiert und heißt *Exponentialfunktion*, in Zeichen $\exp x$. Man schreibt auch kurz $\exp x =: e^x$.

Dies ist die wichtigste Funktion der Mathematik. Sie hat folgende Eigenschaften:

Satz 1.16. *1)* $\exp 0 = e^0 = 1, \quad \exp 1 = e^1 = e.$
2) Für $\exp$ *gilt folgende Funktionalgleichung: Für alle* $x, y \in \mathbf{R}$

$$\exp(x+y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = \exp x \cdot \exp y$$
$$\exp(-x) = 1/\exp x.$$

3) Für alle $x \in \mathbf{R}$ *gilt* $e^x > 0$, *es gilt also insbesondere* $\exp : \mathbf{R} \to]0,\infty[$ *und* $\exp$ *hat keine 0–Stellen. Für alle* $x > 0$ *gilt* $e^x > 1$.
4) Die Exponentialfunktion ist streng monoton wachsend: für alle $x, y \in \mathbf{R}$ *gilt*

$$x < y \Longrightarrow e^x < e^y.$$

Die Exponentialfunktion ist daher injektiv.
5) $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x\to\infty} e^x = \infty.$
6) Für alle $x \in \mathbf{R}$ *gilt*

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n.$$

7) Für $x = n \in \mathbf{N}$ *gilt* $\exp(n) = e \cdot e \cdots e$ *(n–mal), d.h. exp(n) ist die gewöhnliche n–te Potenz der Euler'schen Zahl.*

Beweis. Zu 1) $\exp(0) = 1$ ergibt sich unmittelbar durch Einsetzen von $x = 0$ in die Reihe. Um $\exp(1) = e$ einzusehen, betrachten wir nochmals

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \\
&= 1 + \frac{n}{1}\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\frac{1}{n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + \cdots \\
&\cdots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \\
&\cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Lassen wir nun n gegen ∞ gehen, so strebt jeder Klammerausdruck der letzten 3 Zeilen gegen 1 und der ganze letzte Ausdruck der Gleichungskette strebt daher gegen $1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots$. Der Grenzwert der linken Seite ist aber definitionsgemäß die Euler'sche Zahl e. Der "Beweis"ist nicht vollständig, da wir bei einem 2–fachen Grenzübergang stillschweigend die Reihenfolge vertauscht haben: $\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\cdots = \lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}\cdots$. Dies müßte man noch rechtfertigen.

Zu 2) Wir wissen bereits, daß die Exponentialreihe absolut konvergiert und verwenden das Cauchy–Produkt, den Doppelreihensatz 1.15 und den binomischen Lehrsatz.

$$\begin{aligned}
\exp x \exp y &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}y^n = \sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\frac{1}{m!}x^m \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{n!}\frac{1}{n-m!}x^m y^{n-m} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{n} n!\frac{1}{m!}\frac{1}{n-m!}x^m y^{n-m} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}x^m y^{n-m} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x+y)^n = \exp(x+y).
\end{aligned}$$

Die 2. Formel folgt nun sofort aus 1) und $1 = \exp(0) = \exp(x-x) = \exp x \exp(-x)$.

Zu 3) Für $x > 0$ sind alle Summanden in $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n = 1 + x + \cdots$ positiv und daher $\exp x > 1$. Aus der 2. Formel in 2) folgt dann sofort $\exp(-x) > 0$, also für alle $x \in \mathbf{R}$ $\exp x > 0$.

Zu 4) Ist $x < y$, dann ist $y = x + t$ mit $t > 0$ und aus 2) und 3) folgt $\exp y = \exp x \exp t > \exp x$. also die strenge Monotonie der Exponentialfunktion.

Zu 5) Aus der Reihendarstellung $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n = 1 + x + \cdots > 1 + x$ für positive x folgt sofort $\exp x \to \infty$ für $x \to \infty$ und aus 2) daher $\exp(x) \to 0$ für $x \to -\infty$. (vgl. Abb.1)

Zu 6) bleibt hier unbewiesen.

Zu 7) Folgt aus der Funktionalgleichung 2). □

Die strenge Monotonie der Exponentialfunktion gewährleistet die Existenz einer inversen Funktion:

DEFINITION 1.7. Die *Logarithmusfunktion* ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.

$$\log :]0, \infty[\to \mathbf{R}.$$

Für alle $y > 0$ gilt also $\exp(\log y) = y$ und für alle $x \in \mathbf{R}$ gilt $\log(\exp x) = x$. Man nennt $\log y$ den *natürlichen Logarithmus* von y

SATZ 1.17. *Die Funktion* log *hat folgende Eigenschaften (vgl. Abb.1)*

1) $\log 1 = 0$.
2) log *ist streng monoton wachsend, also injektiv.*
3) $\lim_{y\to\infty} \log y = \infty$ *und* $\lim_{y\to 0+} \log y = -\infty$.
4) log *erfüllt folgende Funktionalgleichung: Für alle* $x, y > 0$ *gilt*

$$\log(x \cdot y) = \log x + \log y.$$

BEWEIS. Folgt alles aus den entsprechenden Eigenschaften der Exponentialfunktion. Etwa die Funktionalgleichung für log: Es gilt

$$e^{\log x + \log y} = e^{\log x} \cdot e^{\log y} = x \cdot y = e^{\log(x \cdot y)}$$

und wegen der Injektivität von exp daher die Behauptung. □

DEFINITION 1.8. Sei $a > 0$. Die allgemeine Potenzfunktion zur Basis a ist definiert für alle $x \in \mathbf{R}$ durch

$$a^x := e^{x \log a}.$$

Aus der Definition und den Eigenschaften von exp folgt

SATZ 1.18. *Sei* $a > 0$. *Dann gilt 1)* $a^0 = 1$
2) $a^{x+y} = a^x a^y$
3) Die Abbildung $x \to a^x$ *ist in* $\mathbf{R}$ *streng monoton fallend von* ∞ *nach 0 für* $0 < a < 1$, *konstant 1 für* $a = 1$ *und streng monoton steigend von 0 nach* ∞ *für* $a \geq 1$. *Für* $0 < a \neq 1$ *besitzt die Funktion* a^x *daher eine Umkehrfunktion, den sg. Logarithmus zur Basis a, in Zeichen* $\log_a y$ *(vgl. Abb.2). Es gilt auch hier die Funktionalgleichung* $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.
4) Für alle $x, y \in \mathbf{R}$ *gilt*

$$\left(a^x\right)^y = a^{xy}.$$

5) Für $x = \frac{p}{q}$ $\quad p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}$ *ist*

$$a^x = \sqrt[q]{a^p}.$$

ABBILDUNG 1. exp und log

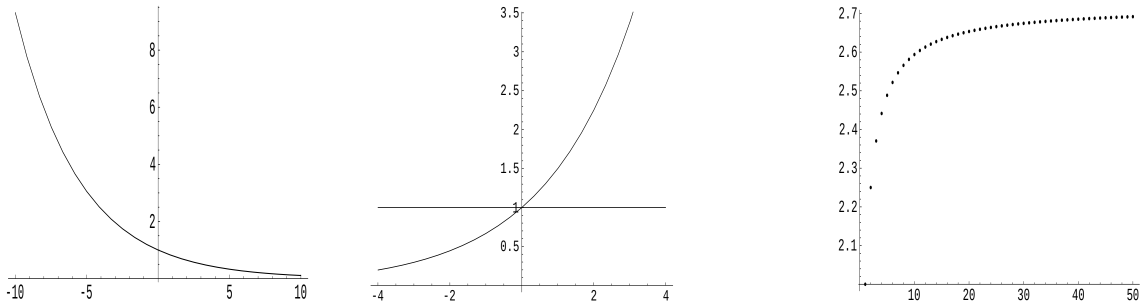


ABBILDUNG 2. 0.8^x und 1.5^x und 50 Glieder von Euler's Folge $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Die allgemeine Potenzfunktion stimmt also für rationale x mit den gewöhnlichen Potenzen (p–faches Produkt und q–te Wurzel) überein, ist also eine Erweiterung dieser Funktionen von rationalen Exponenten auf beliebige reelle.

BEWEIS. Nur Zu 4) Es ist

$$\left(a^x\right)^y = e^{y(\log a^x)} = e^{y(x \log a)} = e^{(xy)\log a} = a^{xy}.$$

$\square$

BEMERKUNG 1.2. Für jedes $x > 0$ gilt definitionsgemäß $x = a^{\log_a x} = e^{\log_a x \log a} = e^{\log x}$ und wir erhalten daraus die Umrechnung zwischen log und $\log_a$:

$$\log_a x = \frac{1}{\log a} \log x.$$

KAPITEL 2

Reelle Funktionen

2.1. Konvergenz von Funktionen–Folgen. Potenzreihen.

Funktionen $f : A \to B \subset \mathbf{R}$, bei denen also der Bildbereich B Teilmenge von $\mathbf{R}$ ist, heißen *reelle Funktionen*. Sehr häufig, aber nicht notwendigerweise ist auch der Defininititonsbereich A Teil von $\mathbf{R}$.

Unter einem *Intervall* versteht man eine Teilstrecke der Zahlengeraden mit oder ohne Endpunkte. Auch ganz $\mathbf{R}$ oder $[a, \infty[$, $]-\infty, a[$ sehen wir als Intervalle an. Der Definitionsbereich A der von uns betrachteten Funktionen wird meist ein Intervall oder eine endliche Vereinigung von Intervallen sein.

Reelle Funktionen bilden die Grundlage der quatitativen Modellierung der Wirklichkeit.

Die Gesamtheit der Funktionen $f : A \to \mathbf{R}$ erbt einen Großteil der Struktur von $\mathbf{R}$, d.h. wir können reelle Funktionen addieren, subtrahieren , miteinander multiplizieren, durcheinander dividieren (sofen der Nenner $\neq 0$ ist) und den Grenzwert konvergenter Funktionen–Folgen betrachen und erhalten wieder reelle Funktionen. Darin liegt ein wichtiges Prinzip zur Erzeugung neuer Funktionen aus schon bekannten.

Definition 2.1. Seien $f, g : A \to \mathbf{R}$ und $c \in \mathbf{R}$. Wir definieren in naheliegender Weise die Funktionen $f + g$, cf, $f \cdot g$, $f/g : A \to \mathbf{R}$ durch folgende Vorschrift: für $x \in A$ sei

$$\begin{aligned}
&(f+g)(x) := f(x) + g(x)\\
&(cf)(x) := cf(x)\\
&(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x) \qquad (2.1)\\
&(\frac{f}{g})(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \quad (\text{sofern} \quad g(x) \neq 0)
\end{aligned}$$

Falls $f : A \to B$, $\quad g : B \to \mathbf{R}$, so erhalten wir durch die Zusammensetzung eine reelle Funktion $g \circ f : A \to \mathbf{R}$, definiert durch $g \circ f(x) := g(f(x))$.

Ein $x_0 \in A$, für das $f(x_0) = 0$, heißt *Null–Stelle* (kurz 0–Stelle) von f.

Unter Umständen können wir Funktionen in folgender Weise miteinader vergleichen: wir definieren

$$f \leq g :\Longleftrightarrow \quad \bigwedge_{x \in A} f(x) \leq g(x).$$

Eine Funktion $f : A \to \mathbf{R}$ heißt *monoton*, falls für alle $x, y \in A$ gilt

$$\begin{array}{ll} x \leq y \Rightarrow f(x) \leq g(y) & \text{monoton nicht fallend} \\ x \leq y \Rightarrow f(x) \geq g(y) & \text{monoton nicht wachsend} \\ x < y \Rightarrow f(x) < g(y) & \text{streng monoton wachsend} \\ x < y \Rightarrow f(x) > g(y) & \text{streng monoton fallend} \end{array}$$

Sei (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n : A \to \mathbf{R}$ und
$D = \{x \in A : \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{existiert}\}$. Dann erhalten wir eine Grenzfunktion
$f : D \subset A \to \mathbf{R}$, definiert durch

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

D heißt der *Konvergenzbereich* der Folge (f_n) und f heißt der *punktweise Limes* der Funktionen f_n.

Beispiel 2.1. a) Einfachste reelle Funktionen sind die konstanten Abbildungen $f(x) = c$ und die identische Abbildung $Id_{\mathbf{R}}(x) = x$. Durch wiederholte Multiplikation der *identischen* Abbildung mit sich selbst erhalten wir die Abbildungen $x \mapsto x^k$, der Multiplikation dieser Funktionen mit Konstanten und der Addition erhalten wir schließlich die *Polynom–Funktionen* $p : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Falls $a_n \neq 0$, dann heißt p ein Polynom vom Grade n.
Sei $q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + a_m x^m$ ein weiteres Polynom. Durch Qotientenbildung erhält man eine sg. *rationale* Funktion

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + a_m x^m}.$$

Der (maximale) Definitionsbereich von r ist offenbar $\mathbf{R} \setminus N_q$. Dabei ist N_q die Menge der 0–Stellen von q. Für die rationalen Funktionen gibt es die Möglichkeit der Darstellung durch *Partialbruch–Zerlegung* (vgl. Math I, WS).

Als eine direkte Verallgemeinerung der Bildung von Polynomen erhalten wir durch Grenzübergang im Sinne der vorigen Definition die sg. Potenzreihen.

Definition 2.2. Sei (a_n), $n = 0, 1, 2, \ldots$ eine Folge reeller Zahlen und $x_0 \in \mathbf{R}$ fest gewählt. Ein Ausdruck der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

heißt *Potenzreihe* mit den Koeffizienten a_n und dem *Entwicklungspunkt* x_0.

Eine Potenzreihe konvergiert offenbar immer für $x = x_0$ und hat hier den Wert a_0. Falls eine Potenzreihe noch für andere Punkte konvergiert, so läßt sich zeigen, daß sie gleich für ein ganzes, symmetrisch um x_0 gelegenes Intervall konvergiert (vgl. weiter unten). Das größte solche Intervall heißt das *Konvergenzintervall* der Potenzreihe. Dieses Intervall ist dann der größtmögliche Bereich, in dem die Potenzreihe eine reelle Funktion darstellt. Man spricht von der *Potenzreihendarstellung* oder *Potenzreihenentwicklung* dieser Funktion um den Entwicklungspunkt x_0.

Beispiel 2.2. a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ist eine Potenzreihe mit $x_0 = 0$ als Entwicklungspunkt. Wir wissen bereits, daß diese Potenzreihe für alle $x \in \mathbf{R}$ konvergiert, das Konvergenzintervall ist also ganz $\mathbf{R}$ und die dadurch dargestellte Funktion ist die Exponentialfunktion. Wir wissen auch, daß wir diese Funktion als Grenzwert einer andereren konvergenten Funktionen–Folge darstellen können:

$$\exp(x) = e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{2.2}$$

Die Potenzreihen–Entwicklungen um den 0–Punkt (d.h. Entwicklungspunkt =0) für die aus Mittelschule bekannten Funktionen sin, cos lauten

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{2.3}$$

b) Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ hat den Entwicklungspunkt 0 und konvergiert für $0 \le |x| < 1$, das Konvergenzintervall ist also $]-1,1[$. Die Reihe divergiert in den Endpunkten ± 1. Im Intervall $]-1,1[$ gilt

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n. \tag{2.4}$$

Man beachte: Die Funktion $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ist auf $\mathbf{R} \setminus \{1\}$ definiert, wird durch die geometrische Reihe aber nur im Intervall $]-1,1[$ dargestellt.

c) Die Potenzreihenentwicklung von $\frac{1}{3-x}$ um den Punkt 2 ist

$$\frac{1}{3-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n.$$

Wie lautet die Potenzreihenentwicklung dieser Funktion um den Punkt $x_0 = 1$:

$$\frac{1}{3-x} = \frac{1}{2-(x-1)} = \frac{1}{2(1-\frac{x-1}{2})} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}(x-1)^n.$$

Durch Potenzreihen darstellbare Funktionen nennt man *(reell–) analytische Funktionen.* Sie haben viele schöne Eigenschaften (vgl. z.B. Satz 3.15 unten).

Der folgende Satz ergibt sich leicht aus dem Quotienten– und Wurzel–Kriterium für gewöhnliche Reihen. Er ermöglicht in vielen Fällen die Bestimmung des Konvergenzintervalles einer Potenzreihe.

SATZ 2.1. *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0. Falls einer der beiden folgenden Grenzwerte*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho \qquad \lim_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} = \rho$$

existiert, dann heißt $R = 1/\rho$ der Konvergenzradius der Potenzreihe und die Reihe konvergiert absolut für $0 \leq |x-x_0| < R$. Für die Randpunkte $x_0 \pm R$ des (sg. Konvergenz–)Intervalles $]x_0 - R, x_0 + R[$ läßt sich i.a. bezüglich Konvergenz keine Aussage treffen.
Falls $\rho = 0$ bzw. $\rho = \infty$, so setzt man $R = \infty$ bzw. $R = 0$.

BEISPIEL 2.3. a) Die Potenzreihen für $\exp, \sin, \cos$ haben alle den Konvegenz–Radius $R = \infty$

b) Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ konvergiert für kein $x \neq 0$. Ihr Konvergenz–Radius ist 0.

c) Wir werden später sehen, daß sich die Logarithmus–Funktion durch eine Potenzreihe darstellen läßt:

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Aus der ersten Formel des letzten Satzes ergibt sich unmittelbar, daß diese Reihe jedenfalls für $|x| < 1$ konvergiert. Tatsächlich läßt sich zeigen, daß diese Reihe auch noch für $x = 1$ konvergiert. Dies liefert (LEIBNIZ)

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots .$$

Die Reihe konvergiert nur sehr langsam und wäre zur tatsächlichen Berechnung von $\log 2$ gänzlich ungeeignet.

Neben den Potenzreihen gibt es noch viele andere Möglichkeiten, Funktionen als punktweisen Limes einer Folge von Funktionen darzustellen. Eine besonders wichtige bilden die *Fourier–Reihen.* Dabei geht es um die Frage, ob, wie gut und für welche x eine Funktion f sich folgendermaßen darstellen läßt:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad (a_n, b_n \in \mathbf{R}). \tag{2.5}$$

Die Anwendungen dieser Darstellungen reichen von der Wahrscheinlichkeitsthorie, Nachrichtentechnik, Bild– und Sprachanalyse, Wärmeleitung (von da her stammen sie) usw. bis hin zur Quantentheorie.

Manchmal ist es nützlich, eine möglichst einfache Funktion zu finden, die an vorgegebenen Punkten vorgegebene Werte Werte annimmt: man sucht also z.B. bei einer Meßreihe eine sg. *Interpolation* der Meßpunkte durch den Graphen eines Polynoms.

SATZ 2.2 (Interpolationsformel von LAGRANGE). *Seien $x_1, x_2, \dots, x_n$ paarweise verschiedene reelle Zahlen und $y_1, y_2, \dots, y_n$ vorgegebene reelle Zaheln (Werte). Dann existiert genau eine Polynomfunktion p der Gestalt $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$ mit $p(x_1) = y_1, p(x_2) = y_2, \dots, p(x_n) = y_n$. p kann folgendermaßen bestimmt werden: Seien*

$$p_1(x) := \frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)}, \dots$$
$$p_n(x) := \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})},$$

dann gilt $p(x) = y_1 p_1(x) + \cdots y_n p_n(x)$.

BEWEIS. Nur für die Existenz:

$$p(x_1) = y_1 p_1(x_1) + y_2 p_2(x_1) + \cdots y_n p_n(x_1) = y_1 \cdot 1 + y_0 \cdot 0 + \cdots y_n \cdot 0 = y_1.$$

Analog ergibt sich $p(x_i) = y_i$. □

2.2. Grenzwerte von Funktionen. Stetigkeit.

Wir untersuchen im Folgenden die Wirkung von Funktionen auf konvergente Folgen. Historisch sind diese Fragestellung und die dabei entstandenen Begriffe aufgetaucht beim Versuch, dynamisches Geschehen mathematisch zu beschreiben: wie kann man quantitativ fassen, daß sich ein auf einer Bahn, beschrieben durch eine odere mehrere reelle Funktionen $x(t)$, befindlicher Körper mit der Zeit t einer bestimmten Lage x_0 nähert. Intuitiv, aber noch ungenau: x kommt x_0 *beliebig nahe*, wenn t *hinreichend nahe* bei t_0 ist. Dies ist die ursprüngliche Bezeichnung der Ortskoordinate durch x und der Zeitvariablen durch t (t für *tempus*). Wir verwenden jetzt wieder die bisherige Bezeichnung für abhängige und unabhängige Variable . Die präzise Formulierung lautet in Analogie zur Definition des Grenzwertes einer Folge und in einer für uns ausreichenden Form:

Definition 2.3. Sei$f$: $A \to \mathbf{R}$ und $y_0 \in \mathbf{R}$,. Man sagt: f besitzt in x_0 den Grenzwert y_0, wenn

$$\bigwedge_{\epsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x\in A} \big(0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - y_0| < \epsilon\big). \tag{2.6}$$

Andere Sprechweise: f strebt (konvergiert) gegen y_0, wenn x gegen x_0 strebt.

Schreibweisen:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \quad \text{oder} \quad f(x) \to y_0 \quad \text{für} \quad x \to x_0.$$

Analog zu den Folgen haben wir die Notwendigkeit zu erklären, was es heißt, eine Funktion wird bei Annäherung an eine bestimmte Stelle beliebig groß.

Definition 2.4. Sei $f : A \to \mathbf{R}$ Man sagt: f strebt gegen ∞ für x gegen x_0, wenn

$$\bigwedge_{K>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x\in A} \big(0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) > K\big). \tag{2.7}$$

Schreibweisen:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \quad \text{oder} \quad f(x) \to \infty \quad \text{für} \quad x \to x_0.$$

Man sagt: f strebt gegen $-\infty$ für x gegen x_0, wenn $\lim_{x\to x_0}(-f(x)) = \infty$.

Ist $x_0 = \infty\,(-\infty)$, dann tritt in den obigen Definitionen anstelle der Bedingung

$$\ldots \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x\in A} \big(0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow \ldots\big).$$

die Bedingung

$$\ldots \bigvee_{\Delta>0} \bigwedge_{x>\Delta} \quad \Longrightarrow \ldots).$$

bzw.

$$\ldots \bigvee_{\Delta>0} \bigwedge_{x<-\Delta} \quad \Longrightarrow \ldots).$$

Ähnlich zum Satz 1.2 gilt

Satz 2.3. *Ein reelle Funktion besitzt an einer Stelle höchstens einen Grenzwert.*

Bemerkung 2.1. 1. y_0 in Definitition 2.3 hat nichts zu tun mit dem Wert der Funktion f an der Stelle x_0, ja f muß in x_0 nicht einmal definiert sein. Es wird nur vorausgesetzt, daß wir uns dem Punkt x_0 *von A heraus* beliebig annähern können.

2. Das Prüfen der Bedingung $\bigwedge_{\epsilon>0}$ in Definitition 2.3 ist natürlich nur für **kleine** ϵ interessant, jenes der Bedingung $\bigwedge_{K>0}$ in Definitition 2.4 dagegen für die **großen** K.

3. In der obigen Definition bedeutet die Bedingung $0 < |x - x_0| < \delta$, daß x **links und rechts** von x_0 liegen kann, die Annäherung an x_0 kann also in beliebiger Weise von links und, oder rechts erfolgen. Läßt man die Annäherung nur von **einer** Seite her zu, so kommt man zum Begriff des *Links–* bzw. *Rechts–seitigen Limes* und man schreibt dafür

$$\begin{array}{llll} \lim\limits_{x\uparrow x_0} f(x) & \text{oder} & \lim\limits_{x\to x_0-} f(x) & \text{Linksseitiger Limes} \\ \lim\limits_{x\downarrow x_0} f(x) & \text{oder} & \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) & \text{Rechtsseitiger Limes} \end{array}$$

FOLGERUNG 2.4. *Eine Funktion besitzt an einer Stelle einen Grenzwert genau dann, wenn sie dort sowohl einen linksseitigen wie einen rechtsseitigen Grenzwert besitzt und diese beiden gleich sind. Sind diese beiden Limiten andererseits ungleich, die Funktion macht dort also einen Sprung, dann besitzt sie dort keinen Grenzwert.*

BEISPIEL 2.4. 1. Für die konstante Funktion $f(x) = c$ können wir $A =]-\infty, \infty[= \mathbf{R}$ wählen und und sehen aus der Definition unmittelbar, daß für alle $x_0 \in A$ gilt

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = c.$$

2. Ebenso gilt für die Identische Abbildung $f(x) = x$ und für alle $x_0 \in \mathbf{R}$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} x = x_0.$$

Analog zu Satz 1.3 über das Rechnen mit Folgen gelten für das Rechnen mit Grenzwerten von Funktionen folgende Regeln

SATZ 2.5. *Seien $f, g : A \to \mathbf{R}$ mit $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ und $\lim_{x\to x_0} g(x) = z_0$ und $c \in \mathbf{R}$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} &a) \lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = y_0 \pm z_0 \\ &b) \lim_{x\to x_0} c\, f(x) = c\, y_0 \\ &c) \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = y_0 \cdot z_0 \\ &d) \lim_{x\to x_0} 1/f(x) = 1/y_0\,, \quad \text{falls} \quad y_0 \neq 0. \end{aligned}$$

BEWEIS. Beispielhaft nur für b): Falls $c = 0$, dann ist natürlich $\lim_{x\to x_0} 0 = 0$. Sei also $c \neq 0$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Nach Voraussetzung gibt es $\delta > 0$, sodaß für alle $x \in I$

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - y_0| < \epsilon/|c|.$$

Dann gilt aber auch

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |c\, f(x) - c\, y_0| = |c||f(x) - y_0| < \epsilon.$$

Bei d) läßt sich zeigen, daß aus $y_0 \neq 0$ folgt: $f(x) \neq 0$ für *hinreichend nahe* bei x_0 gelegene $x \in A$. $\square$

Folgerung 2.6. *Sei* $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ *eine Polynomfunktion* $p : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *und* $x_0 \in \mathbf{R}$. *Dann gilt*

$$\lim_{x \to x_0} p(x) = a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n = p(x_0).$$

Einprägsam können wir dafür auch schreiben

$$\lim_{x \to x_0} p(x) = p(\lim_{x \to x_0} x).$$

Funktion und Limes sind hier miteinander vertauschbar (vgl. Stetigkeit weiter unten).

Natürlich gibt es auch Funktionen, die keine oder nur einseitige (links–, rechtsseitige) Grenzwerte besitzen. Es gibt sogar Funktionen, die in keinem einzigen Punkt ihres Definitionsbereiches einen Grenzwert besitzen. In gewissem Sinne ist dies sogar meistens der Fall.

Beispiel 2.5. 1. Die HEAVISIDE–Funktion $H : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definiert durch

$$H(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 & (x \geq 0) \end{cases}$$

gilt offenbar

$$\lim_{x \to 0-} H(x) = 0 \qquad \lim_{x \to 0+} H(x) = 1.$$

Nach Folgerung 2.4 besitzt H also in 0 keinen Grenzwert. Die Funktion hat (macht) dort eine Sprung der Höhe 1.

2. Der Ausdruck $\sin 1/x$ definiert eine Abbildung $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to [-1, 1]$. Diese Abbildung besitzt in $x_0 = 0$ keinen Grenzwert. (vgl. Abb.1

3. Für $x \sin 1/x$ (definiert auf $\mathbf{R} \setminus \{0\}$) gilt $\lim_{x \to 0} x \sin 1/x = 0$.

4. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \text{ rational} \\ 1 & \text{für} \quad x \text{ irrational} \end{cases}$$

besitzt nirgends einen Grenzwert, auch keinen einseitigen.

Dies sieht man am besten mit Hilfe des folgenden Satzes. Dieser Satz bringt die Existenz des Grenzwertes einer Funktion in Verbindung mit ihrer Wikung auf konvergente Folgen.

Satz 2.7. *Eine Funktion* $f : A \to B \subset \mathbf{R}$ *besitzt genau dann in* x_0 *einen Grenzwert* y_0, *also* $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$, *wenn für alle Folgen* (x_n) *in* A *mit* $x_n \neq x_0$ *gilt*

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = y_0.$$

DEFINITION 2.5. $f : A \to B \subset \mathbf{R}$ heißt **stetig** in $x_0 \in A$, falls gilt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

anderenfalls heißt f **unstetig** in x_0.

Merkregel: f stetig genau dann, wenn lim und f miteinander vertauschbar sind.

f heißt *stetig in* A, falls f stetig ist in **allen** Punkten von A, anderenfalls unstetig in A.

BEMERKUNG 2.2. a) Im Gegensatz zur Definitition des Grenzwertes muß für die Stetigkeit die Funktion an der Stelle x_0 definiert sein.

b) Aus Folgerung 2.4 sehen wir: Eine stetige Funktion macht keine Sprünge. Zumindest der aristotelischen Vorstellung nach (*Die Natur macht keine Sprünge*) sollten also stetige Funktionen gut zur Beschreibung realer Vorgänge geeignet sein.

SATZ 2.8. *Sei* $f : A \to B \subset \mathbf{R}$, $x_0 \in A$. *Folgende Aussagen sind äquivalent*
1) f *ist in* x_0 *stetig.*
2) $\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$.
3) Zu jedem $\epsilon > 0$ *existiert ein* $\delta > 0$*, sodaß für alle* $x \in A$ *mit* $|x - x_0| < \delta$ *(wofür wir auch schreiben können* $x = x_0 + h$, $0 \le |h| < \delta$*) gilt*

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x_0 + h) - f(x_0| < \epsilon$$

Formal in Zeichen:

$$\bigwedge_{\epsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x \in U_\delta(x_0)} f(x) \in U_\epsilon(f(x_0)).$$

Hier ist $U_\alpha(a) = \{u : |u - a| < \alpha\}$.
4) $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$ *für alle Folgen* (x_n) *in* A *mit* $x_n \to x_0$.

BEISPIEL 2.6. 1. Polynome sind auf ganz $\mathbf{R}$ stetig.

2. Durch Potenzreihen darstellbare Funktionen sind im Konvergenzbereich der Reihe stetig.

2. Rationale Funktionen sind auf $\mathbf{R} \setminus N$ stetig, wobei N die Nullstellen–Menge des Nennerplynoms ist. Falls Zähler und Nenner teilerfremd sind, dann streben sie in den 0–Stellen des Nenners gegen $\pm\infty$.

3. Die Funktion 4. in Beispiel 2.5 ist überall unstetig.

4. Die Ausdrücke $f(x) = \sin 1/x$, $\quad g(x) = x \sin 1/x$ sind beide nicht für $x_0 = 0$ definiert. Da f in $x_0 = 0$ keinen Grenzwert besitzt, kann diese Funktion bei keiner Erklärung von $f(0)$ stetig gemacht werden. Wegen $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$, ist es sinnvoll, die Funktion g zu erweitern durch die Definition $g(0) := 0$. Dann ist g überall stetig (vgl. Abb.1). Man spricht von *stetiger Ergänzung.*

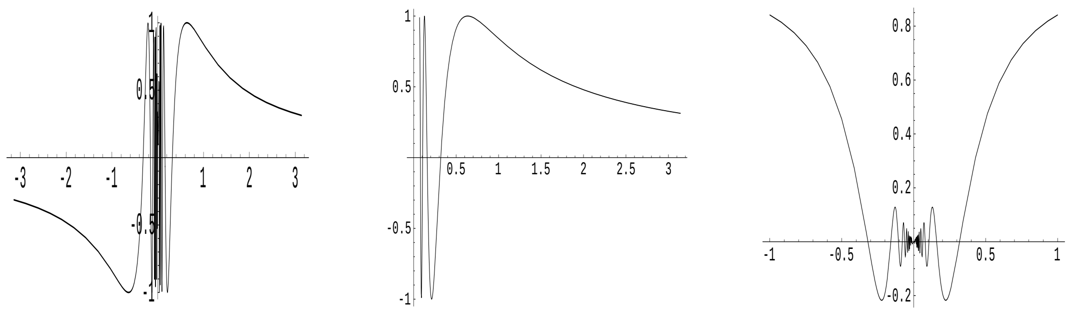


ABBILDUNG 1. $\sin\frac{1}{x}$ und $x\sin\frac{1}{x}$

ABBILDUNG 2. sin und arcsin

Für stetige Funktionen gelten folgende wichtige Sätze.

SATZ 2.9 (Zwischenwertsatz). *Eine auf einem abgeschlossenen und endlichen Intervall definierte stetige Funktion nimmt jeden Wert zwischen ihrem Maximum und Minimum mindestens einmal an.*

SATZ 2.10. *Sei* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *stetig auf dem abgeschlossenen und endlichen Intervall* $[a, b]$. *Aus* $f(a) \cdot f(b) < 0$ *(d.h.* $f(a)$, $f(b)$ *haben entgegengesetztes Vorzeichen), dann hat* f *in* $]a, b[$ *mindestens eine 0–Stelle: Es existiert ein* x_0 *mit* $a < x_0 < b$, *sodaß* $f(x_0) = 0$.

SATZ 2.11. *Eine auf einem Intervall stetige Funktion ist genau dann umkehrbar, wenn sie streng monoton ist. Genauer: Sei* $f : I \to B \subset \mathbf{R}$ *stetig im Intervall* I. *Dann gilt:*
$f : I \to f(I)$ *ist genau dann bijektiv, wenn* f *streng monoton ist. Auch die Umkehrfunktion ist dann streng monoton und stetig.*

Auf diesem Satz beruht die Tatsache, daß bei vielen klassischen Funktionen eine Umkehrfunktion existiert, zumindest wenn wir uns auf solche Teile des Definitionsbereiches einschränken, wo die betrachtete Funktion streng monoton ist. Der Nachweis der strengen Monotonie gelingt oft durch Betrachtung der Ableitung (vgl. weiter unten Satz 3.11)

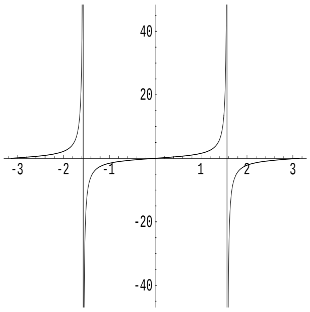
ABBILDUNG 3. Fixpunktbestimmung: $f(x)$ und $f(x) - x$.

ABBILDUNG 4. cos und arccos

ABBILDUNG 5. $f(x) = x^3$ und $f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$

BEISPIEL 2.7. a) Die Sinus–Funktion ist auf ganz $\mathbf{R}$ definiert und stetig. Dem Schaubild (Abb. 2) entnehmen wir, daß sin im Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$ streng monoton wächst und besitzt daher nach Satz 2.11 eine stetige und streng monotone Umkehrfunktion $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$. Analoges gilt für cos und seine Umkehrabbildung $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ (vgl. Abb.4)

b) Die Tangens–Funktion ist gegeben durch $\tan x = \sin x / \cos x$. Dies ist definiert für alle $x \in \mathbf{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbf{Z}$ (in den ungeradzahligen Vielfachen von $\pi/2$



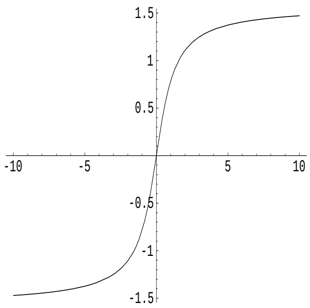


ABBILDUNG 6. $\tan x$ und $\arctan x$

liegen die 0–Stellen des Nenners $\cos x$) und ist dort stetig. Dem Schaubild entnehmen wir die strenge Monotonie in Intervallen der Länge π. Die Umkehrfunktion wird üblicherweise für das Intervall $]-\pi/2, \pi/2[$ bestimmt und heißt Arcustangens: $\arctan : \mathbf{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ (vgl. Abb.6).

c) Untersuchen wir bezüglich Umkehrbarkeit die Funktion $f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$ (vgl. Abbildung 5). Der maximale Definitionsbereich der Funktion ist $\mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$. Wir entnehmen dem Schaubild, daß die Funktion in 4 Teilen ihres Definitionsbereiches streng monoton ist: $]-\infty, 0[$, $]0, 1/2]$, $[1/2, 1[$, $]1, \infty[$. Man rechnet leicht nach, daß $f^{-1} :]-\infty, -4] \to]0, 1/2]$ gegeben ist durch

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{y}}.$$

In den meisten Fällen ist die Umkehrfunktion allerdings nicht durch eine Formel angebbar. Graphisch läßt sich die Umkehrfunktion von f durch Spiegelung des Graphen von f am Graphen von $y = x$ gewinnen.

d) Aus Satz 2.10 folgt ein einfacher Fixpunkt–Satz (vgl. Bemerkung zu $x_{n+1} = f(x_n)$ am Ende von Kap. 1)

SATZ 2.12. *Jede stetige Abbildung $f : [0, 1] \to [0, 1]$ besitzt (mindestens) einen Fixpunkt, d.h. es existiert ein $x \in [0, 1]$ mit $f(x) = x$.*

BEWEIS. Wir betrachten die Funktion $g(x) := f(x) - x$. Falls $f(0) = 0$ oder $f(1) = 1$, dann ist nichts zu beweisen. Wegen $0 \le f(x) \le 1$ können wir daher o.B.d.A. annehmen $f(0) > 0, f(1) < 1$. Daher gilt $g(0) > 0$ und $g(1) < 0$. Nach Satz 2.10 existiert daher ein $x \in]0, 1[$ mit $g(x) = 0$. Daraus folgt die Behauptung. Geometrisch ist die Sache klar: Der Graph von $x \to x$ schneidet mindestens einmal den Graphen von $x \to f(x)$ im Intervall $[0, 1]$. (vgl. Abbildung 3)

$\square$

KAPITEL 3

Differentialrechnung

3.1. Differentiation reeller Funktionen in einer reellen Variablen

DEFINITION 3.1. Sei $f : A \to \mathbf{R}$ eine reelle Funktion, wobei A ein **offenes** Intervall oder eine endliche Vereinigung von disjunkten offenen Intervallen ist. Falls der Grenzwert

$$f'(x_0) := \frac{df(x_0)}{dx} := \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{3.1}$$

existiert und endlich ist, so heißt dieser Grenzwert die Ableitung von f an der Stelle x_0 und f heißt an der Stelle x_0 differenzierbar mit der Ableitung $f'(x_0)$. Auf Grund unserer Voraussetzung über A liegt für hinreichend kleine h mit x_0 auch noch $x_0 + h$ im Definitionsbereich von f.

Wenn $f'(x)$ für alle inneren Punkte $x \in A$ existiert, dann heißt f in A differenzierbar.

Der sg. *Differenzenquotient*

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

ist die Steigung der *Sekante* durch die benachbarten Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0+h, f(x_0+h))$ auf dem Graphen der Funktion f. Ihre Grenzlage ist die *Tangente* mit der Steigung $f'(x_0)$. Die Tangente ist der Graph der *linearen* Funktion

$$x \to y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{3.2}$$

$f'(x_0)$ ist die NEWTON'sche und $\frac{df(x_0)}{dx}$ ist die LEIBNITZ'sche Schreibweise für die Ableitung von f an der Stelle x_0. Die Schreibweise $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0}$ ist eine moderne Variante der letzteren. Ihre Zweckmäßigkeit wird sich ergeben.

Setzt man $\Delta f = f(x_0+h) - f(x_0)$ und $\Delta x = (x_0+h) - h = h$, so erhält man die sehr suggestive Gleichung

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Das heißt also: der Differenzenquotient wird im Grenzwert zum *Differentialquotienten*.

$f'(x_0)$ können wir als die *Änderungsrate* der Funktion f in der Umgebung (Nähe) des Punktes x_0 interpretieren und die lineare Abbildung $x \to y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ist eine *lineare Approximation* der i.a. nichtlinearen Abbildung f oder geometrisch ausgedrückt: den Graphen der Funktion f approximieren wir an der Stelle x_0 durch eine sich anschmiegende Gerade, die Tangente.

BEISPIEL 3.1. 1) Der Graph der konstanten Abbildung $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definiert durch $f(x) = c$, hat offenbar in allen Punkten $x \in \mathbf{R}$ die Steigung 0 und ist zugleich seine eigene Tangente. Wir sehen also rein geometrisch und ohne Rechnung, daß eine konstante Funktion in allen Punkten ihres Definitionsbereiches differenzierbar ist und die Ableitung 0 hat $f'(x) = 0$.

Die formale Rechnung:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

2) Wir betrachten die identische Abbildung $f(x) = x$. Wieder sehen wir rein geometrisch, daß der Graph in allen Punkten $x \in \mathbf{R}$ die Steigung 1 und zugleich seine eigene Tangente ist. Die Funktion $f(x) = x$ ist also in allen Punkten differenzierbar und hat die Ableitung $1 : f'(x) = 1$.

Die formale Rechnung bestätigt dies: Sei $x_0 \in \mathbf{R}$:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x_0 + h - x_0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1.$$

Mit diesen trivialen Beispielen und den folgenden allgemeinen *Differentiations–Regeln* werden wir dann kompliziertere Ausdrücke differenzieren. Zuvor noch der Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit.

SATZ 3.1. *Wenn f in $x_0 \in A$ differenzierbar ist, dann ist f in x_0 stetig.*

BEWEIS. Aus der vorausgesetzten Existenz des Grenzwertes (3.1) folgt die Existenz einer Schranke

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq M$$

für hinreichend nahe bei x_0 gelegene $x \neq x_0$ und daher

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0|.$$

Für $x \to x_0$ geht die rechte Seite gegen 0 und daher auch die linke. $\square$

Die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht: $x \mapsto |x|$ ist überall stetig, aber nicht differenzierbar in $x = 0$.

SATZ 3.2 (Differentiationsregeln). *f, $g : A \to \mathbf{R}$ seien beide in $x \in A$ differenzierbar. α, β seine Konstante $\in \mathbf{R}$. Dann gilt*

$$(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x) \quad \textit{Summenregel. Linearität der Ableitung}$$

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \textit{Produktregel}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad \textit{Quotientenregel}$$

Dabei wird bei der Quotientenregel natürlich $g(x) \neq 0$ angenommen.

BEWEIS. Der Beweis für die Summenregel ist trivial.
Zur Produktregel; Es ist

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Aus dem vorigen Satz folgt $g(x) \to g(x_0)$ und daher die Behauptung.

Zur Qutientenregel berechnen wir zuerst die Ableitung von $1/g$:

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = -\frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \to -\frac{1}{(g(x_0))^2} g'(x_0).$$

Daraus und der schon gezeigten Produktregel egibt sich Quotientenregel. □

SATZ 3.3 (Kettenregel). *Sei $f : A \to B$ und $g : B \to \mathbf{R}$ mit offenen Intervallen A, B. f sei in $x_0 \in A$ differenzierbar und g sei in $f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist auch die zusammengesetzte Funktion $g \circ f : A \to \mathbf{R}$ in x_0 differenzierbar und es gilt*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

SATZ 3.4 (Ableitung der Inversen). *Sei $f : A \to \mathbf{R}$ in A stetig, streng monoton in A, differenzierbar in x_0 und $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist auch die inverse Funktion $f^{-1} : f(A) \to A$ in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar und es gilt*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

BEWEIS. Wenn wir die Differenzierbarkeit der inversen Funktion als bewiesen annehmen, dann wird die Behauptung leicht plausibel mit der Kettenregel: Aus $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x$ folgt ja

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \left(f^{-1}\right)'(f(x))f'(x) = 1.$$

□

In der LEIBNITZ–Notation lassen sich die Differentiationregeln suggestiv zusammenfassen: Dabei verwenden wir die klassische Schreibweise $y = y(x) = f(x)$ und $z = z(x) = g(x)$, bzw. bei der Kettenregel $z = z(y) = g(y)$, sodaß also $z(x) = g \circ f(x)$.

Satz 3.5.

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}(y+z) = \frac{d}{dx}y + \frac{d}{dx}z = \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} \quad \textit{Summenregel}\\
&\frac{d}{dx}(\alpha y) = \alpha \frac{dy}{dx} \quad \textit{Multiplikation mit Konstanter}\\
&\frac{d}{dx}(yz) = \frac{dy}{dx}z + y\frac{dz}{dx} \quad \textit{Produktregel}\\
&\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{z}\right) = \frac{\frac{dy}{dx}z - y\frac{dz}{dx}}{z^2} \quad \textit{Quotientenregel}\\
&\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} \quad \textit{Kettenregel}\\
&\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \quad \textit{Ableitung der Inversen}
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Beispiel 3.2. a) Die Ableitung von e^x:

$$
\begin{aligned}
\left(e^x\right)' &= \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = e^x \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\left(1+h+\frac{1}{2!}h^2+\cdots-1\right)\right)\\
&= e^x \lim_{h\to 0}\frac{h}{h}\left(1+\frac{1}{2!}h+\frac{1}{3!}h^2+\cdots\right)\\
&= e^x \lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{2!}h+\frac{1}{3!}h^2+\cdots\right) = e^x.
\end{aligned}
$$

Wir werden später sehen, daß jede Funktion f mit $f'(x) = f(x)$ ein konstantes Vielfaches der Exponentialfunktion ist: $f(x) = c \cdot e^x$.

b) Die Ableitung von $\log x$:
log ist invers zu exp. Daher folgt aus Regel über die Ableitung der Inversen mit $y = e^x$ also für $x = \log y$

$$
\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y},
$$

also $(\log)'(y) = 1/y$.

c) $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$.
Beweis durch Induktion bei Anwendung der Produktregel: Die Formel ist offenbar richtig für $n = 1$. Sie gelte also bis n. Dann ist

$$
\left(x^{n+1}\right)' = \left(x^n \cdot x\right)' = \left(x^n\right)' \cdot x + x^n \cdot x' = nx^{n-1}x + x^n = x^n(n+1).
$$

Daraus und aus der Summenregel folgt für die Ableitung von Plynomen

$$
\frac{d}{dx}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}.
$$

d) Die Summenregel gilt i.a. nur für endliche Summen. Unter gewissen Umständen läßt sie sich formal auch auf unendliche Summen erweitern, insbesondere gilt bei Potenzreihen im Inneren des Konvergenzintervalles:

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}. \tag{3.4}$$

Man beachte: die *abgeleitete Reihe* hat denselben Konvergenzradius wie die ursprüngliche (Übung).

e) Ableitung von $x(t) = t/(1-t^2)$: Quotienten– und Kettenregel liefern

$$\dot{x}(t) = \frac{1(1-t^2)-t(-2t)}{(1-t^2)^2} = \frac{1-t^2+2t^2}{(1-t^2)^2} = \frac{1+t^2}{(1-t^2)^2}.$$

Definition 3.2. Sei $f : A \to \mathbf{R}$ in A differenzierbar. Dann ist also $f' : A \to \mathbf{R}$ definiert. Falls f' differenzierbar ist, so definiert man die 2. Ableitung von f an der Stelle $x \in A$ durch $f''(x) := (f')'(x)$ und entsprechend definiert man die *höheren Ableitungen* von f durch

$$f''' := (f'')', \ldots, f^{(n)} := \left(f^{(n-1)}\right)' = \frac{d^n f}{dx^n},$$

vorausgesetzt, daß die jeweils vorhergehende Ableitung differenzierbar ist. Man sagt dann auch, daß f in x Ableitungen 1., 2., …, n–ter Ordnung besitzt.

Beispiel 3.3. a) Für $f(x) = e^x$ gilt
$e^x = f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n)}(x)$.

b) Für $f(x) = \sin x$ folgt durch Ableiten der definierenden Potenzreihe
$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x, \quad f^{(4)}(x) = \sin x$ usw.

3.2. Mittelwertsatz, Taylor–Reihe.

Definition 3.3. $f : A \to \mathbf{R}$ besitzt in $x_0 \in A$ eine *lokales (relatives) Maximum (Minimum)*, wenn für alle Punkte einer Umgebung $x \in U_r(x_0)$ gilt $f(x) \leq f(x_0)$ (bzw. $f(x) \geq f(x_0)$.

$f : A \to \mathbf{R}$ besitzt in $x_0 \in A$ eine *globales (absolutes) Maximum (Minimum)*, wenn für alle Punkte $x \in A$ gilt $f(x) \leq f(x_0)$ (bzw. $f(x) \geq f(x_0)$. $f(x_0)$ heißt dann *globaler (absoluter) Extremalwert* von f, bzw. f besitzt in x_0 ein globales (absolutes) Extremum.

Natürlich ist jedes globale Extremum ein lokales.

Beispiel 3.4. Die auf ganz $\mathbf{R}$ definierte Abbildung $x \mapsto 1-|x|$ hat in x_0 ein globales Maximum.

SATZ 3.6. *Falls* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *in* $a < x_0 < b$ *(*x_0 *ist also ein innerer Punkt von* $[a,b]$*) eine lokales Extremum besitzt und* $f'(x_0)$ *existiert, dann gilt* $f'(x_0) = 0$.

BEWEIS. Da x_0 innerer Punkt des Definitions–Intervalles $[a,b]$ ist, existiert ein $\delta > 0$, sodaß $]x_0-\delta, x_0+\delta[\subset [a,b]$. f habe in x_0 ein lokales Maximum. Dann erhalten wir

$$x_0 < x < x_0 + \delta \Longrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0\,, \quad \text{also für} \quad x \downarrow x_0 \quad f'(x_0) \leq 0$$
$$x_0 - \delta < x < x_0 \Longrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0\,, \quad \text{also für} \quad x \uparrow x_0 \quad f'(x_0) \geq 0.$$

Da nach Voraussetzung $f'(x_0)$ existiert, ist beides nur möglich, wenn $f'(x_0) = 0$.
Für ein lokales Minimum ist der Beweis analog. □

SATZ 3.7. $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$ *seien stetig in* $[a,b]$ *und in* $]a,b[$ *differenzierbar. Dann existiert ein* $x \in]a,b[$ *mit*

$$\big(f(b) - f(a)\big)g'(x) = \big(g(b) - g(a)\big)f'(x). \tag{3.5}$$

BEWEIS. Wir betrachten folgende Hilfsfunktion $h : [a,b] \to \mathbf{R}$, defniert durch

$$h(x) := \big(f(b) - f(a)\big)g(x) - \big(g(b) - g(a)\big)f(x).$$

Dann gilt:

h ist stetig in $[a,b]$.
h ist differenzierbar in $]a,b[$.
$h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) = h(b)$.

Wir zeigen nun, daß daraus die behauptete Existenz von $x \in]a,b[$ folgt:
1. Falls h konstant ist, dann gilt (3.5) für alle $x \in]a,b[$ und es ist nichts mehr zu beweisen.
2. Sei also o.B.d.A. $h(x_0) > h(a)$ für ein $x_0 \in]a,b[$. Dann besitzt h nach Satz 2.9 ein Maximum für ein $x \in]a,b[$. Für dieses x gilt nach dem vorigen Satz $h'(x) = 0$. □

FOLGERUNG 3.8 (Mittelwertsatz). $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *sei stetig in* $[a,b]$ *und in* $]a,b[$ *differenzierbar. Dann existiert ein* $x \in]a,b[$ *mit*

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(x). \tag{3.6}$$

Geometrisch bedeutet dies die Existenz eines Punktes x*, wo die Steigung der Tangente gleich der Steigung der Geraden durch* $(a, f(a))$ *und* $(b, f(b))$ *ist.*

BEWEIS. Setze im vorigen Satz $g(x) = x$. □

FOLGERUNG 3.9. *a) $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ sei stetig in $[a,b]$ und in $]a,b[$ differenzierbar und $f'(x) = 0$ in $]a,b[$. Dann ist f konstant.*

b) f, $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ seien stetig in $[a,b]$ und in $]a,b[$ differenzierbar. Sei weiters $f'(x) = g'(x)$ in $]a,b[$. Dann unterscheiden sich f und g nur um eine Konstante: $f = g + c$.

BEWEIS. zu a) Seien x_1, $x_2 \in [a,b]$. Wegen $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0$ folgt $f(x_2) = f(x_1)$.

b) folgt sofort aus a), da auf Grund der Voraussetzung $f - g$ konstant ist. □

Eine oft zitierte Form des Zwischenwertsatzes ist folgende

FOLGERUNG 3.10. *$f : [a,b] \to \mathbf{R}$ sei stetig in $[a,b]$ und in $]a,b[$ differenzierbar. Seien x_0, $x_0 + h \in [a,b]$. Dann existiert ein $0 < \theta < 1$ mit*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0 + \theta h). \tag{3.7}$$

SATZ 3.11. *Eine in einem Intervall I differenzierbare Funktion f ist genau dann dort monoton steigend bzw. fallend, wenn für alle $x \in I$ gilt $f'(x) \geq 0$ bzw. $f(x) \leq 0$.*

BEWEIS. Nur für steigende Monotonie: Ist f monoton steigend, dann dann für $x_0 \in I$ und h so klein, daß auch noch $x_0 + h \in I$:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \begin{cases} \geq 0, & \text{falls} \quad h > 0 \\ \leq 0, & \text{falls} \quad h < 0. \end{cases}$$

In jedem Fall gilt also

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

und daher auch durch Grenzübergang $h \to 0$: $f'(x_0) \geq 0$.
Sei nun umgekehrt für alle $x \in I$ $f'(x) \geq 0$. Wäre nun für $x_0 < x_1$ im Gegensatz zur Behauptung $f(x_1) < f(x_0)$ so egibt sich aus dem Mittelwert–Satz für ein zwischen x_0 und x_1 gelegenes ξ der Widerspruch

$$f'(\xi) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} < 0.$$

□

Für die *strenge Monotonie* gilt:

SATZ 3.12. *Eine in einem Intervall I differenzierbare Funktion f ist dort streng monoton steigend bzw. fallend, wenn für alle $x \in I$ gilt $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$.*

BEWEIS. Analog zum zweiten Teil des Beweises im vorigen Satz (Übung). □

Die Bedingung ist lediglich hinreichend, aber nicht notwendig: Die Abbildung $x \mapsto x^3$ ist streng monoton steigend auf ganz $I = \mathbf{R}$, jedoch $\frac{d}{dx}x^3\big|_0 = 3x^2\big|_0 = 0$.

Unter der Annahme, daß f höhere Ableitungen besitzt, werden wir nun den Mittelwertsatz erweitern. Damit werden wir imstande sein, f **lokal** in eine Potenzreihe zu entwickeln.

SATZ 3.13. *f, $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ seien stetig in $[a,b]$ und in $]a,b[$ differenzierbar. In $]a,b[$ existiere noch $f^{(n)}$ (d.h. es existieren die Ableitungen bis einschließlich n–ter Ordnung). Es seien $x_0, x_0+h \in [a,b]$ und $h \neq 0$. Dann gilt: Es existiert ein $0 < \theta < 1$ mit*

$$\begin{aligned}\Big\{f(x_0+h) - \big(f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)\big)\Big\}g'(x_0+\theta h) \\ = \big(g(x_0+h) - g(x_0)\big)\frac{(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}h^{n-1}f^{(n)}(x_0+\theta h).\end{aligned}$$

BEWEIS. Wir setzen für $x \in]a,b[$

$$F(x) = f(x_0+h) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x_0+h-x)^k$$

und wenden Satz 3.8 auf F und g an: Es existiert also ein $0 < \theta < 1$, sodaß

$$\big(F(x_0+h) - F(x_0)\big)g'(x_0+\theta h) = \big(g(x_0+h) - g(x_0)\big)F'(x_0+\theta h).$$

Nun ist

$$\begin{aligned}F'(x) &= -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(x_0+h-x)^k + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(x_0+h-x)^{k-1} \\ &= -\frac{f^{(n)}(x)}{(n+1)!}(x_0+h-x)^{n-1}.\end{aligned}$$

□

Setzen wir im vorigen Satz $g(x) = (x_0+h-x)^n$, so erhalten wir

SATZ 3.14 (Formel vo TAYLOR mit LAGRANGE–Restglied).

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + \frac{f^{(n)}(x_0+\theta h)}{n!}h^n. \tag{3.8}$$

Hier wird die 0–te Ableitung von f mit f gleichgesetzt: $f^{(0)} := f$.

Wir haben bereits Funktionen kennen gelernt, die *beliebig oft* (man sagt auch *unendlich oft*) differenzierbar sind: exp, sin, cos. Die Formel von Taylor legt nahe, in diesem Falle zu einer unendliche Reihe überzugehen:

DEFINITION 3.4. $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ sei in $x_0 \in]a,b[$ unendlich oft differenzierbar. Für $x \in]a,b[$ heißt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n := T_f(x,x_0)$$

die Taylor–Reihe von f um x_0 (= mit Entwicklungspunkt x_0).

BEMERKUNG 3.1. Die Taylor–Reihe ist offenbar eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0. Es stellen sich sofort folgende Fragen:
1. Konvergiert die Taylor–Reihe überhaupt für ein $x \neq x_0$? (i.a. nein) M.a.W.: unter welchen Bedingungen für f hat diese Reihe einen positiven Konvergenzradius?
2. Wenn die Taylor–Reihe konvergiert, stellt sie dann die Funktion f dar?(i.a. nein)
3. Ist eine formale Potenzreihe immer die Taylorreihe einer unendlich oft differenzierbaren Funktion? (Ja. Satz v. E. Borel)

Positive Antworten für 1.,2, gibt es unter geeigneten Voraussetzungen.

BEISPIEL 3.5. a) Wir wissen bereits $\frac{d^n}{dx^n}e^x = e^x$, sodaß also für $x_0 = 0$ und alle n $\frac{d^n}{dx^n}e^x\big|_0 = 1$. Die Taylor–Reihe der Exponentialfunktion ist daher

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}e^x\big|_0 x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n.$$

Dies ist ein Sonderfall des folgenden allgemeinen

SATZ 3.15. *Bei einer durch eine Potenzreihe dargestellten Funktion stimmt innerhalb des Konvergenzintervalles die Taylor–Reihe mit der Potenzreihe überein.*

BEWEIS. Nur formal: Sei etwa $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ die Potenzreihenentwicklung der Funktion f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Dann folgt durch formales Differenzieren

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots \\ f''(x) &= 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + \cdots \\ f'''(x) &= 3 \cdot 2a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4x + \cdots \\ &\text{usw.} \end{aligned}$$

und daher für $x = 0$

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = f'(0), \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2}, \quad a_3 = \frac{f'''(0)}{2 \cdot 3}, \quad \ldots$$

Daraus folgt

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{2 \cdot 3}x^3 + \cdots$$

$\square$

In der Praxis bedeutet dies, daß man bei vielen Funktionen die Taylor–Reihe meist leichter durch Auffinden den Potenzreihenentwicklung gewinnt als durch direktes Berechnen der höheren Ableitungen. Dies gilt insbesondere bei rationalen Funktionen. Betrachten wir etwa Beispiel (2.2), wo wir durch formales Umformen der geometrischen Reihe erhalten haben

$$f(x) = \frac{1}{3-x} = \frac{1}{2-(x-1)} = \frac{1}{2(1-\frac{x-1}{2})} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}(x-1)^n.$$

Daher gilt

$$T_f(x,1) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}(x-1)^n.$$

Die vorangegangenen Sätze bilden die Grundlage für die Analyse von Funktionen.

Beispiel 3.6. a) In Beispiel 3.2 sahen wir: $\exp' x = \exp x$. Wenn nun für eine Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ gilt $f'(x) = f(x)$, dann folgt durch Weiterdifferenzieren dieser Gleichung $f^{(n)}(x) = f(x)$ und daher für die Taylor–Entwicklung dieser Funktion mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(0)}{n!}x^n = f(0)\exp x.$$

f stimmt daher bis auf einen konstanten Faktor mit der Exponentialfunktion überein.

b) In Formel (2.3) haben wir $\sin x$ und $\cos x$ formal als Potenzreihen in x mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ eingeführt. Es folgt nun die geometrische Interpretation:

Eine Kurve in der Ebene können wir beschreiben durch die sg. *Parameterdarstellung*: es ist eine Abbildung eines Parameter–Intervalles I (physikalisch meist als Zeit interpretiert) in die Ebene

$$I \ni t \mapsto \mathbf{x}(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbf{R}^2$$

mit den Komponentenfunktionen x, $y : I \to \mathbf{R}$.

Der *Tangentialvektor* ist die Ableitung des Ortsvektors nach dem Parameter t. Wenn wir t als die Zeit interpretieren, dann heißt die *zeitliche Ableitung* des Ortsvektors der *Geschwindigkeitsvektor*.

$$\mathbf{v}(t) := \frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) := \big(\dot{x}(t), \dot{y}(t)\big) = \lim_{\tau\to 0}\frac{\mathbf{x}(t+\tau)-\mathbf{x}(t)}{\tau}.$$

Wir suchen nun die mathematische Beschreibung der Bewegung einer Punktmasse auf dem Einheitskreis $\{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$, wobei die Bewegung mit betragsmäßig konstanter Geschwindigkeit 1 und im Gegenuhrzeigersinn erfolgen soll. Wir wählen die *Anfangsbedingungen* so, daß $\mathbf{x}(0) = (1,0)$ und $\dot{\mathbf{x}}(0) = (0,1)$.

Zum Zeitpunkt t befinde sich die Masse im Punkt $(x(t), y(t))$. Aus der Bedingung

$$x^2(t) + y^2(t) = 1$$

folgt durch Ableiten (Ableitung der 2. Potenz + Kettenregel!)

$$2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0.$$

Das innere Produkt zwischen Orts– und Geschwindigkeitsvektor ist also 0. Geometrisch bedeutet dies, daß der Geschwindigkeitsvektor (seine Länge ist nach Voraussetzung 1) senkrecht auf den Ortsvektor (der Länge 1) steht. Weil wir uns im Gegenuhrzeigersinn auf dem Kreis bewegen, geht also der Geschwindigkeits– (= Tangential–)vektor aus dem Ortsvektor durch eine (im mathematischen Sinne) positive Drehung um $\pi/2 = 90^\circ$ hervor:

$$\dot{x}(t) = -y(t) \quad \dot{y}(t) = x(t).$$

Durch Weiterdifferenzieren beider Gleichungen erhalten wir

$$\ddot{x} = -\dot{y} = -x \qquad \ddot{y} = \dot{x} = -y$$

Allgemein erhalten wir (durch Induktion)

$$\begin{aligned} x^{(2n)}(t) &= (-1)^n x(t) & y^{(2n)}(t) &= (-1)^n y(t) \\ x^{(2n+1)}(t) &= -(-1)^n \dot{x}(t) & y^{(2n+1)}(t) &= (-1)^n \dot{y}(t). \end{aligned}$$

Aus den Anfangsbedingungen folgt

$$\begin{aligned} x^{(2n)}(0) &= (-1)^n x(0) = (-1)^n & y^{(2n)}(0) &= (-1)^n y(0) = 0 \\ x^{(2n+1)}(0) &= -(-1)^n \dot{x}(0) = 0 & y^{(2n+1)}(0) &= (-1)^n \dot{y}(0) = (-1)^n. \end{aligned}$$

Die Taylorreihen für x bzw. y lauten somit

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n} \qquad y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1},$$

d.h. also $x(t) = \cos t$ und $y(t) = \sin t$. Da wir uns mit Geschwindigkeit 1 auf dem Kreis bewegen, ist t die pro Zeiteinheit zurückgelgte Bogenlänge, entspricht also dem im Bogenmaß gemessenen Winkel zwischen dem Ortsvektor $\mathbf{x}(t)$ und der x–Achse. Aus dem Strahlensatz folgt damit die übliche Interpretation: Bei vorgegenem Winkel t (im Bogenmaß gemessen) ist in einem rechtwinkeligen Dreieck $\sin t$ $(\cos t)$ das Verhältnis von Gegen–(An–)kathete zur Hypothenuse.

Aus der vorangegengen geometrischen Interpretation sehen wir auch sofort, daß cos gerade und sin ungerade Funktionen und beide periodisch sind:

$$\begin{aligned} \cos(-t) &= \cos t & \sin(-t) &= -\sin t \\ \cos(t \pm 2\pi) &= \cos t & \sin(t \pm 2\pi) &= \sin t. \end{aligned} \tag{3.9}$$

c) Wir bestimmen die Taylor–Entwicklung von $f(x) = \log(1+x)$ mit Entwicklungspunkt 0. Es ist

$$\begin{aligned} f(x) &= \log(1+x) & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{1+x} & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} & f''(0) &= -1 \quad \text{usw.} \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^n \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} & f^{(n)}(0) &= (-1)^{n-1}(n-1)!. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots$$

Wir wissen bereits (vgl. Beispiel (2.3)), daß diese Reihe für $|x| < 1$ absolut konvergent ist. Zur numerischen Berechnung von log verwendet man seine Funktionalgleichung:

Indem wir x durch $-x$ ersetzen, erhalten wir

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots$$

und daraus

$$\log(1+x) - \log(1-x) = \log \frac{1+x}{1-x} = 2\big(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\big).$$

Diese Reihe konvergiert für kleine x sehr gut und ist zur effektiven Berechnung geeignet: dazu setzt man $\xi = (1+x)/(1-x)$ und erhält umgekehrt $x = (\xi-1)/(\xi+1)$. z.B. ist für $\xi = 2$ $x = 1/3$ und daher

$$\log 2 = 2\big(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{7\cdot 3^7} + \cdots\big) = 0,69314\ldots$$

Um sukzessive weiter Werte zu berechen, verwendet man noch die Beziehung

$$\log(a+1) = \log a\big(1 + \frac{1}{a}\big).$$

Übung: Berechnen Sie (ohne Taschenrechner) $\log 3$ auf 4 Stellen genau.

d) Die *Binomische Reihe*. Wir bestimmen die Taylor–Entwicklung von $f(x) = (1+x)^\alpha$ mit Entwicklungspunkt 0 und $\alpha \in \mathbf{R}$. Es ist

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^\alpha & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1} & f'(0) &= \alpha \\ f''(x) &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} & f''(0) &= \alpha(\alpha-1) \quad \text{usw.} \\ f^{(n)}(x) &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} & f''(0) &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1). \end{aligned}$$

Wir setzen

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{k!}$$

und erhalten die binomische Reihe

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{k}x^k + \cdots \tag{3.10}$$

Die binomische Reihe konvergiert absolut für $|x| < 1$ (Quotientenkriterium).

Spezialfälle:
1) Falls $\alpha = m \in \mathbf{Z}_+$, dann ist offenbar $\binom{\alpha}{k} = 0$ für $k > m$ und die binomische Reihe reduziert sich auf auf den binomischen Lehrsatz:

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \cdots + \binom{m}{m}x^m.$$

2) $\alpha = -1$ $\binom{-1}{n} = (-1)^n$: Geometrische Reihe

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + - \cdots$$

3) $\alpha = -2$ $\binom{-2}{n} = (-1)^n(n+1)$: Damit oder durch Differenzieren der geometrischen Reihe erhalten wir

$$(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + - \cdots$$

4) $\alpha = 1/2$ liefert

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + - \cdots$$

Für kleine x ergibt sich in *erster Näherung*

$$\sqrt{1+x} \sim 1 + \frac{x}{2}.$$

3.2.1. Die Formel von EULER und Folgerungen. Für die trigonometrischen Funktionen gelten ebenfalls wichtige Funktionalgleichungen, hier *Additionstheoreme* genannt. Man gewinnt sie am besten mit der folgenden Formel von Euler. $i = \sqrt{-1}$ ist darin die imaginäre Einheit. Man beachte $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $1^4 = 1$, $i^5 = i$ usw.

SATZ 3.16. *Für alle $t \in \mathbf{R}$ gilt* $e^{\pm it} = \cos t \pm i \sin t$. *Insbesondere ist* $e^{i\pi} = -1$.

Beweis. Wir verwenden die vorher erwähnte Periodizität der Potenzen von i. In der definierenden Summe für die Exponentialfunktion fassen wir alle Terme zusammen, die i nicht enthalten und alle, die i enthalten:

$$\begin{aligned} e^{it} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} t^n = 1 + (it) + \frac{(it)^2}{2!} + \frac{(it)^3}{3!} + \cdots \\ &= 1 + it - \frac{t^2}{2!} - i\frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} - + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - + \cdots\right) + i\left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - + \cdots\right) \\ &= \cos t + i \sin t. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich sofort auch die Aussage für $-t$. □

Aus der Euler'schen Formel folgt sofort

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \qquad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}. \tag{3.11}$$

Daraus und aus $e^{x+y} = e^x e^y$ (gültig auch im Komplexen) folgen die Additionstheoreme für Sinus– und Kosinusfunktion und damit für den Tangens:

$$\begin{aligned} \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\ \sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \\ \tan(x + y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Bezüglich der zahlreichen sonstigen Formeln für die trigonometrischen Funktionen cos, sin, tan, cot und ihre auf geeigneten Definitionsbereichen existierenden Umkehrabbildungen arccos, arcsin, arctan, arccot sei verwiesen auf beliebige Formelsammlungen z.B. Teubner–Taschenbuch der Mathematik. Hier findet man auch Reihen– und Produkt–Entwicklungen dieser Funktionen.

Beispielhaft betrachten wir noch die Reihenentwicklungen für $\tan x$ und die Umkehrfunktion $\arctan y$ (vgl. Abb.6) Es ist

$$\begin{aligned} f(x) &= \tan x = \sin x / \cos x & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= 1/\cos^2 x = \cos^{-2} x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= 2\cos^{-3} x \sin x & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= 6\cos^{-4} x - 4\cos^{-2} x & f'''(0) &= 2 \\ f^{(4)}(x) &= 24\cos^{-5} \sin x - 8\cos -3 \sin x & f^{(4)}(0) &= 0 \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Noch einige Terme weitergerechnet ergibt sich die Taylor–Entwicklung

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots$$

Für die Umkehrfunktion arctan : $\mathbf{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ setzen wir $y(x) = \arctan x$ und erhalten nach Formel (3.3)

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} \\ &= \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + - \cdots \end{aligned}$$

und daraus $y(x) = c_0 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \cdots$ Wegen $y(0) = 0$ folgt $c_0 = 0$ und daher

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \cdots \tag{3.13}$$

Berechnung von π

ARCHIMEDES (ca. 210 v.Chr.) 3 Stellen $\pi \sim 22/7$.

VIETE (1579) 10 Stellen.

LEIBNITZ (1646–1716)

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}.$$

Diese berühmte Reihe ist allerdings zur *numerischen* Berechnung von π ungeeignet: es sind ca. 10^{50} Glieder der Reihe nötig für 100–stellige Genauigkeit (wieso?). Die klassische Methode zur numerischen Berechnung von π beruht auf obiger Reihenentwicklung für arctan und auf folgender Hilfsformel

$$\arctan \xi + \arctan \eta = \arctan \frac{\xi + \eta}{1 - \xi\eta}. \tag{3.14}$$

Dies folgt aus dem Additionstheorem für tan. Dazu setzen wir $\arctan \xi = \alpha$ und $\arctan \eta = \beta$, sodaß $\xi = \tan \alpha$ und $\eta = \tan \beta$. Dann folgt die Behauptung aus

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\xi + \eta}{1 - \xi\eta}.$$

Die Idee besteht darin, ξ und η möglichst klein zu wählen, daß gleichzeitig $\frac{\xi+\eta}{1-\xi\eta} = 1$, sodaß in Formel (3.14) die Reihenentwicklung der linken Seite schnell konvergiert und die rechte Seite $\pi/4$ liefert.

MACHIN (1706–1751): 100 Stellen.

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}.$$

Nach Formel (3.14) ist

$$2\arctan\frac{1}{5} = \arctan\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \arctan\frac{5}{12}$$

$$2\arctan\frac{5}{12} = \arctan\frac{\frac{5}{12}+\frac{5}{12}}{1-\frac{25}{144}} = \arctan\frac{120}{119} \quad \text{und daher}$$

$$\arctan\frac{120}{119} - \arctan\frac{1}{239} = \arctan\frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119}\cdot\frac{1}{239}} = \arctan\frac{119\cdot 239+120}{119\cdot 239+120} = \frac{\pi}{4}.$$

Schon mit 5 Summanden für $\arctan\frac{1}{5}$ und 2 Summanden für $\arctan\frac{1}{239}$ genau auf 7 Nachkommastellen für π.

GILLOUD–DICHAMP (1967) 500.000 Dezimalstellen:

$$\frac{\pi}{4} = 6\arctan\frac{1}{8} + 2\arctan\frac{1}{57} + \arctan\frac{1}{239}.$$

MIOSHI–KAZUHIKA (1981) 2.000.000 Dezimalstellen:

$$\frac{\pi}{4} = 8\arctan\frac{1}{10} - \arctan\frac{1}{239} - 4\arctan\frac{1}{515}.$$

KANADA–TAKAHASHI: HEUTE mehr als $50\cdot 10^9$ Stellen mit anderen Algorithmen.

Abschließend noch eine Fehlerabschätzung: wir betrachten

$$R_n(x) := \arctan x - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}$$

und wenden darauf den Mittelwertsatz in der Form von Satz 3.5 mit $g(x) = x^{2n+1}$ an. Es ist

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}R_n(x) &= \frac{1}{1+x^2} - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^{2k} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1-(-x^2)^n}{1+x^2}\\ &= (-1)^n\frac{x^{2n}}{1+x^2}.\end{aligned}$$

Wegen $R_n(0) = g(0) = 0$ ergibt sich mit einem geeigneten $0 < \theta < 1$

$$\begin{aligned}R_n(x) &= \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(\theta x)^{2n}}\cdot(-1)^n\frac{(\theta x)^{2n}}{1+(\theta x)^2}\\ &= \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(1+(\theta x)^2)}.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir nicht nur das Vorzeichen von $R_n(x)$, sondern auch eine Abschätzung für den Absolutbetrag

$$\left|R_n(x)\right| < \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Der Fehler bei der Berechnung von arctan durch die unendliche Reihe (3.13) ist also kleiner als das erste nicht berücksichtigte Glied der Reihe.

Bemerkung 3.2. π ist irrational (LAMBERT 1761).
π ist *transzendent* (LINDEMANN 1882).
Das bedeutet: Es gibt kein Polynom mit *ganzzahligen* Koeffizienten, das π als 0–Stelle hat. Daraus und aus der Theorie von GALOIS (1811–1832) folgte nach 2000 Jahren Suche die

Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises.

3.2.2. Unbestimmte Formen. Regel von de l'HOSPITAL. Man definiert

$$\begin{aligned}
-\infty < x \leq \infty &\implies x + \infty = \infty \\
-\infty \leq x < \infty &\implies x - \infty = -\infty \\
-\infty < x < \infty &\implies \frac{x}{\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0 \\
0 < x \leq \infty &\implies x \cdot \infty = \infty, \quad x \cdot (-\infty) = -\infty \\
-\infty \leq x < 0 &\implies x \cdot \infty = -\infty, \quad x \cdot (-\infty) = \infty.
\end{aligned}$$

Dies ist motiviert durch Grenzübergänge bei Folgen, etwa

$$x_n \to x, \ y_n \to \pm\infty \quad \implies \quad \frac{x_n}{y_n} \to 0.$$

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$ bleiben undefiniert, da hier für verschiedene Folgen die Grenzwerte verschieden sein können.
Bezeichne $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$. Sei nun $\xi \in I \subset \overline{\mathbf{R}}$ mit einem nichtentarteten Intervall I. f, g seien, mindestens auf $I \setminus \{\xi\}$ definierte Abbildungen, für die $\lim_{x\to\xi} f(x)$ und $\lim_{x\to\xi} g(x)$ existieren.

Definition 3.5. Falls $\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi} g(x) = 0 \ (\infty)$, dann heißt $\frac{f}{g}$ eine *unbestimmte Form* vom Typ $\frac{0}{0}$ bzw. $\frac{\infty}{\infty}$ im Punkt ξ. Analog für $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$.

Satz 3.17 (Regel von de l'HOSPITAL). *f, g seien reellwertige Abbildungen, die für $-\infty \leq \xi < \eta \leq \infty$ differenzierbar sind. Für alle $x \in]\xi, \eta[$ gelte $g'(x) \neq 0$ und es existiere*

$$\lim_{x\downarrow\xi} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbf{R}}.$$

Falls nun weiters $f(x) \to 0$ und $g(x) \to 0$ für $x \downarrow \xi$, oder $g(x) \to \infty$ für $x \downarrow \xi$, dann gilt

$$\lim_{x\downarrow\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Eine analoge Behauptung gilt für $x \uparrow \eta$ oder $g(x) \to -\infty$.

Eine einfache, aber oft nützliche Version dieses Satzes zur Berechnung unbestimmter Formen ist der folgende

SATZ 3.18. *f, g seien in ξ differenzierbar, dh. $f'(\xi)$ und $g'(\xi)$ existieren. Weiters sei $f(\xi) = g(\xi) = 0$ und $g'(\xi) \neq 0$. Dann gilt*

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

BEWEIS. Aus $g'(\xi) \neq 0$ folgt, daß für hinreichend nahe bei ξ gelegene x auch $\frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi} \neq 0$. Wegen $f(\xi) = g(\xi) = 0$ erhalten wir

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\xi} \frac{\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}}{\frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

□

BEMERKUNG 3.3. a) Ist auch f'/g' eine unbestimmte Form, so kann man bei 2–maliger Differenzierbarkeit von f, g zu $\lim \frac{f''(x)}{g''(x)}$ übergehen, usw.

b) Die unbestimmten Formen $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$ lassen sich durch $f(x)/(1/g(x))$ in die Form $\frac{0}{0}$ bzw. durch

$$f(x) - g(x) = \log\bigl(e^{f(x)-g(x)}\bigr) = \log \frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}}$$

auf die Form $\frac{\infty}{\infty}$ transformieren.

Beispiele:

1. $\frac{0}{0}$: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - e^{-x})'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{1} = 2.$
2. $\frac{0}{0}$: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$

3. $\frac{\infty}{\infty}$: Wir zeigen, daß e^x stärker gegen ∞ geht als jede (positive) Potenz x^α. Falls $\alpha \in \mathbf{N}$, dann gilt $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^\alpha = \alpha(\alpha-1)\cdots 1$ und daher

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}{e^x} = \cdots \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots 1}{e^x} = 0.\end{aligned}$$

Falls $0 < \alpha \notin \mathbf{N}$, dann ist $0 \leq [\alpha] < \alpha < [\alpha]+1$ und daher folgt die Behauptung aus

$$0 < \frac{x^\alpha}{e^x} < \frac{x^{[\alpha]+1}}{e^x}$$

und dem bereits gezeigten.

Allgemeiner gilt, daß jede Exponentialfunktion a^x, $(a > 0)$ stärker gegen ∞ geht als jede Potenzfunktion x^α, $(\alpha > 0)$.

$$4.\quad \frac{\infty}{\infty}: \quad \text{Sei} \quad \alpha > 0 \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{\log x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \alpha x^\alpha = \infty.$$

Jede Potenzfunktion geht also stärker gegen ∞ als der Logarithmus.

3.2.3. Lokales Verhalten von f. Kurvendiskussion. Die Taylor–Entwicklung einer Funktion f mit Entwicklungspunkt x_0 ist das Standardwerkzeug, um das *lokale Verhalten* von f in der Umgebung von x_0 zu untersuchen. Näherungsweise können wir anstelle von f das Taylor–Polynom 1., 2., 3. und höheren Grades untersuchen. Geometrisch betrachtet ersetzen wir also den Graphen von f durch eine Gerade (=Tangente) bzw. durch eine Parabel 2., 3., usw. Ordnung.

Wir untersuchen nun f durch Betrachtung des **ersten nicht verschwindenden Terms** der Taylor–Entwicklung. Zur Vereinfachung der Situation können wir $x_0 = 0$ annehmen. (Sonst betrachten wir die Funktion $g(x) := f(x + x_0)$ in der Umgebung des Punktes $x = 0$. Dies bedeutet eine Parallelverschiebung des Graphen von f so, daß $(x_0, f(x_0))$ in $(0, g(0))$ übergeht.) Sei also

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

1.) In 1. Näherung f verhält sich f wie eine *lineare Funktion* $f(0)+f'(0)x$, dargestellt durch eine Gerade durch $(0, f(0))$ mit der Steigung $f'(0)$.

2.) Sei $f'(0) = 0$ und $f''(0) \neq 0$. Dann verhält sich f wie $f(0)+\frac{f''(0)}{2}x^2$. Je nach dem Vorzeichen von $f''(0)$ hat f ein lokales Minimum ($f''(0) > 0$) oder lokales Maximum ($f''(0) < 0$).

3.) Sei $f'(0) = f''(0) = 0$ und $f'''(0) \neq 0$. Dann verhält sich f wie die *kubische Parabel* $f(0) + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$. Es liegt also in $x = 0$ ein Wendepunkt mit horinzontaler Wendetangente vor.

Allgemein gilt:

Satz 3.19. *Falls die erste nichtverschwindende Ableitung $f^{(n)}(x_0)$ von f in x_0 gerade Ordnung hat (d.h. n ist gerade), dann besitzt f dort ein lokales Extremum. Es ist ein lokales Minimum, falls $f^{(n)}(x_0) > 0$, es ist ein lokales Maximum, falls $f^{(n)}(x_0) < 0$. Falls n ungerade ist, dann liegt eine horizontale Wendetangente vor.*

Untersucht man die relative Lage des Graphen von f zur Tangente in einem bestimmten Punkt, so erhält man Information über das Krümmungsverhalten der

Funktion: Der Graph von f kann **lokal** oberhalb oder unterhalb der Tangente liegen oder diese durchsetzen. Dies führt zum wichtigen Begriff der Konvexität einer Funktion.

DEFINITION 3.6. $f : I \to \mathbf{R}$ heißt *konvex* im Intervall I, falls für alle $x, y \in I$ und alle $0 < \lambda < 1$

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Geometrisch: der Graph von f liegt immer unterhalb der Sekante zwichen $(x, f(x))$ und $(y, f(y))$. f heißt *konkav*, falls $-f$ konvex ist.

Geometrisch klar ist

FOLGERUNG 3.20. *$f : I \to \mathbf{R}$ ist konvex im Intervall I genau dann, wenn für alle $r < s < t$ aus I gilt*

$$\frac{f(s) - f(r)}{s - r} \leq \frac{f(t) - f(s)}{t - s}.$$

Daraus und aus dem Mittelwertsatz (Satz 3.8) folgt sofort

FOLGERUNG 3.21. *$f : I \to \mathbf{R}$ sei differenzierbar. Dann gilt: f ist genau dann konvex, wenn f' monoton nicht fallend ist. Das gilt also insbesondere dann, wenn $f'' \geq 0$ in I.*

Als **Kurvendiskussion** bezeichnet man die Untersuchung einer Funktion f bezüglich:

1. Definitionsbereich, Bildbereich
2. Bestimmung der Stetigkeits–, Unstetigkeitsstellen
3. Verhalten in den Unstetigkeitsstellen und Randpunkten des Def.Bereiches (Grenzwertebestimmung)
4. Bestimmung der 0–Stellen samt zugehöriger Tangentensteigung
5. Bestimmung der *kritischen Punkte* (d.h. Lösen der Gleichung $f'(x) = 0$)
6. Bestimmung der Extrema
7. Monotonie (Vorzeichen von f')
8. Konvexität (Vorzeichen von f'')
9. Wendepunkte samt zugehöriger Tangentensteigung

um damit einen Überblick über die Form des Graphen zu erhalten.

KAPITEL 4

Integralrechnung

4.1. Stammfunktion. Inhaltsmessung

Die Integralrechnung hat 2 wesentliche Verbindungen: Im Ramen der Differentialrechnung kann man sie *formal* als Umkehroperation der Differentiation aufassen. *Geometrisch* betrachtet erscheint sie als das Mittel zur Bestimmung von Flächen– und Volumsinhalten. Schon von den Erfindern (NEWTON und LEIBNITZ) stammt die Erkenntnis, daß beides aufs engste zusammenhängt.

Im Folgenden sei wieder I ein Intervall in $\mathbf{R}$ mit den Endpunkten a, b und D sei eine endliche Teilmenge von I, also $D = \{\rho_1, \ldots, \rho_n\} \subset I$.

DEFINITION 4.1. a) $F : I \to \mathbf{R}$ heißt *Stammfunktion* von $f : I \to \mathbf{R}$ in I, wenn

- F stetig ist auf I und differenzierbar auf $I \setminus D$
- $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I \setminus D$ (D heißt i.f. *Ausnahmemenge*).

b) Ist F Stammfunktion von f und $\alpha, \beta \in I$, dann heißt $F(\beta) - F(\alpha)$ das *bestimmte Integral von* f zwischen α und β und f heißt der *Integrand*. Man schreibt

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx = F(\beta) - F(\alpha).$$

c) Besitzt $f : I \to \mathbf{R}$ eine Stammfunktion in I, dann heißt f *integrierbar* über (in) I. Eine Stammfunktion bezeichnet man oft auch als *unbestimmtes Integral* von f, geschrieben $\int f(x)\, dx$.

BEISPIEL 4.1. a) Im Intervall $]0, \infty[$ ist $\log x$ eine Stammfunktion von $1/x$, also

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx = \log x \Big|_1^2 = \log 2.$$

b) Auf ganz $\mathbf{R}$ ist $\exp(x^2)$ eine Stammfunktion von $2x \exp(x^2)$, also

$$\int_0^2 2xe^{x^2}\, dx = e^{x^2} \Big|_1^2 = e - 1.$$

Was die Eindeutigkeit der Stammfunktion betrifft, gilt

Satz 4.1. *2 Stammfunktionen von f unterscheiden sich höchstens um eine Konstante, d.h.: Sind F_1, F_2 Stammfunktionen von f in I, dann ist $F_2 - F_1$ konstant auf I.*

Beweis. Mit Ausnahme von höchstens endlich vielen Punkten gilt für alle $x \in I$

$$\frac{d}{dx}(F_2 - F_1) = F_2' - F_1' = f(x) - f(x) = 0.$$

Nach Folgerung 3.9 nimmt $F_2 - F_1$ in den endlich vielen Teilintervallen von I, die durch Weglassen der höchtens endlich vielen Ausnahmepunkte von F_2, F_1 aus I enstehen, konstante Werte an. Nun ist nach Voraussetzung $F_2 - F_1$ stetig, macht also keine Sprünge. Die konstanten Werte müssen also alle gleich sein. □

Daraus folgt sofort, daß die obige Definition des Integrals sinnvoll, d.h. unabhängig von der Wahl der Stammfunktion ist: Ist nämlich $F_2(x) - F_1(x) = \text{konst}$, dann ist $F_2(\beta) - F_2(\alpha) = F_1(\beta) - F_1(\alpha)$.

Bemerkung 4.1. a) Die Bezeichnung der *Integrationsvariablen* ist unwesentlich: $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$, $\int_\alpha^\beta f(y)\,dy$, $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ bedeuten alle dasselbe. **Nicht gut** ist etwa die Schreibweise $\int_\alpha^x f(x)dx$.

b) Das Integral hängt von f *und* vom Integrationsintervall (bestimmt durch die Endpunkte α, β) ab. Dabei gilt nicht notwendig $\alpha \le \beta$.

Satz 4.2. *a) Ist f integrierbar über I, dann auch über jedem Teilintervall von I.*
b) Ist f integrierbar über I, dann gilt für beliebige α, β, $\gamma \in I$

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^\gamma f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx$$

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = -\int_\beta^\alpha f(x)\,dx.$$

c) Sind f_1, f_2 über I integrierbar und c_1, $c_2 \in \mathbf{R}$, dann ist auch $c_1 f_1 + c_2 f_2$ über I integrierbar und es gilt

$$\int_\alpha^\beta \big(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\big)\,dx = c_1 \int_\alpha^\beta f_1(x)\,dx + c_2 \int_\alpha^\beta f_2(x)\,dx.$$

Beweis. a) ist klar.
b) Sei F Stammfunktion von f. Dann ist

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^\gamma f(x)\,dx = F(\beta) - F(\alpha) + F(\gamma) - F(\beta) = F(\gamma) - F(\alpha) = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx.$$

c) Sei F_1 Stammfunktion von f_1 mit Ausnahmemenge D_1 und F_2, D_2 analog für f_2. Dann ist $c_1F_1 + c_2F_2$ stetig und es gilt für alle $x \in I \setminus (D_1 \cup D_2)$ $\frac{d}{dx}\big(c_1F_1(x) + c_2F_2(x)\big) =$

$\big(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\big)$, d.h. $c_1 F_1 + c_2 F_2$ ist Stammfunktion von $c_1 f_1 + c_2 f_2$. Also

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta \big(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\big)\,dx &= c_1 F_1(\beta) + c_2 F_2(\beta) - c_1 F_1(\alpha) + c_2 F_2(\alpha) \\ &= c_1\big(F_1(\beta) - F_1(\alpha)\big) + c_2\big(F_2(\beta) - F_2(\alpha)\big) \\ &= c_1 \int_\alpha^\beta f_1(x)\,dx + c_2 \int_\alpha^\beta f_2(x)\,dx.\end{aligned}$$

$\square$

Der folgende Satz zeigt das Verhalten des Integrals gegenüber der Ordnungsstruktur zwischen Funktionen und gibt ein kontinuierliches Analogon zur Dreiecksungleichung.

SATZ 4.3. *α, $\beta \in I$ und $\alpha \le \beta$.*
a) f sei integrierbar und nichtnegativ auf I, d.h. für alle $x \in I$: $\quad f(x) \ge 0$. Dann gilt

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \ge 0.$$

Das Integral ist ein sg. nichtnegatives Funktional.

b) f_1, f_2 seien integrierbar, $f_1 \le f_2$ in I (d.h. für alle $x \in I$ ist $f_1(x) \le f_2(x)$). Dann gilt

$$\int_\alpha^\beta f_1(x)\,dx \le \int_\alpha^\beta f_2(x)\,dx.$$

c) f, $|f|$ seien integrierbar in I. Dann gilt

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\right| \le \int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx.$$

BEWEIS. Sei F Stammfunktion von f und $\rho_1 < \cdots < \rho_n$ seien die Ausnahmestellen in $[\alpha, \beta]$. Dann ist $[\alpha, \beta] = [\alpha, \rho_1] \cup [\rho_1, \rho_2] \cup \cdots \cup [\rho_n, \beta]$ und nach dem vorigen Satz gilt

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(x)\,dx =& \big(F(\rho_1) - F(\alpha)\big) + \big(F(\rho_2) - F(\rho_1)\big) + \cdots \\ &+ \big(F(\rho_k) - F(\rho_{k-1})\big) + \cdots + \big(F(\beta) - F(\rho_n)\big) = F(\beta) - F(\alpha).\end{aligned}$$

Da F in den einzelnen Teilintervallen differenzierbar ist, gilt nach dem Mittelwertsatz

$$F(\rho_k) - F(\rho_{k-1}) = (\rho_k - \rho_{k-1})F'(x) = (\rho_k - \rho_{k-1})f(x) \ge 0 \quad (\rho_{k-1} < x < \rho_k).$$

Daher gilt auch $F\beta) - F(a) \ge 0$.

b) folgt aus a), da nach Voraussetzung $f_2 - f_1 \geq 0$, sodaß nach Satz 4.2 c)

$$\int_\alpha^\beta \big(f_2(x) - f_1(x)\big)\,dx = \int_\alpha^\beta f_2(x)\,dx - \int_\alpha^\beta f_1(x)\,dx \geq 0.$$

c) Es ist $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ und daher nach b)

$$-\int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx \leq \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \leq \int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx.$$

woraus die Behauptung $\left|\int_\alpha^\beta f\right| \leq \int_\alpha^\beta |f|$. folgt. □

Bemerkung 4.2. Falls eine Folge von integrierbaren Funktionen auf I punktweise gegen eine integrierbare Funktion konvergiert konvergiert, etwa $f_n \to f$, dann ist unter gewissen zusätzlichen Bedingungen über die Art der Konvergenz auch die Grenzfunktion f integrierbar und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta f_n(x)\,dx = \int_\alpha^\beta \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx. \tag{4.1}$$

Insbesondere kann man konvergente Potenzreihen gliedweise integrieren. Die entstehende Potenzreihe hat denselben Konvergenzradius wie die ursprüngliche (Ü).

Satz 4.4 (Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung). *Sei f in I integrierbar mit (der Stammfunktion F und) der Ausnahmemenge D und sei $\alpha \in I$. Für alle $x \in I \setminus D$ gilt*

$$\frac{d}{dx} \int_\alpha^x f(y)\,dy = f(x). \tag{4.2}$$

Beweis. Für alle $x \in I \setminus D$ gilt $F'(x) = f(x)$ und daher

$$\frac{d}{dx} \int_\alpha^x f(y)\,dy = \frac{d}{dx}\big(F(x) - F(\alpha)\big) = \frac{d\,F(x)}{dx} = f(x).$$

□

Welche Funktionen sind nun integrierbar, besitzen also Stammfunktionen?

Satz 4.5. *Folgende Arten von Funktionen sind integrierbar:*

1) Polynome
2) Stetige Funktionen
3) Funktionen, die in $I \setminus D$ stetig sind und in $x \in D$ links– und rechtsseitige (bzw. in den Endpunkten von I einseitige) Grenzwerte besitzen
4) Treppenfunktionen
5) Der Absolutbetrag von Funktionen der vorgenannten Art.

Beweis. Zu 1) $a_0x + a_1/2x^2 + \cdots + a_n/(n+1)x^{n+1} + C$ ist Stammfunktion von $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$.
Zu 2) Benötigt die Approximierbarkeit stetiger Funktionen durch Polynome (Approximationssatz von WEIERSTRASS) und die (hier nicht bewiesene) Vertauschbarkeit von Limes und Integral (vgl. vorige Bemerkung).
Zu 3) ohne Beweis.
Zu 4) Sei $\rho_0 = a < \rho_1 < \rho_2 < \cdots < \rho_k < \rho_{k+1} < \cdots < \rho_n < b = \rho_{n+1}$ und $f(x) = c_k$ im Intervall $I_k =]\rho_k, \rho_{k+1}[$ (Skizze). In den Endpunkten von I_k kann f einen der einseitigen Grenzwerte annehmen. Eine Stammfunktion läßt sich sofort angeben: zu $x \in I_k$ definieren wir

$$F(x) = c_0(\rho_1 - \rho_0) + c_1(\rho_2 - \rho_1) + \cdots + c_{k-1}(\rho_k - \rho_{k-1}) + c_k(x - \rho_k). \tag{4.3}$$

F ist stetig: jedenfalls in jedem Intervall I_k als lineare Funktion und außerdem gilt

$$\lim_{x \downarrow \rho_k} F(x) = c_0(\rho_1 - \rho_0) + c_1(\rho_2 - \rho_1) + \cdots + c_{k-1}(\rho_k - \rho_{k-1}) = \lim_{x \uparrow \rho_k} F(x).$$

F ist somit stetig auf ganz I. Außerdem gilt (eventuell mit Ausnahme der Punkte ρ_k) für $x \in I_k: \quad F'(x) = c_k = f(x)$. Zu 5) Dies folgt aus dem Vorangegangenen. □

Bemerkung 4.3. Die Formel (4.3) liefert

$$F(b) - F(a) = c_0(\rho_1 - a) + c_1(\rho_2 - \rho_1) + \cdots + c_n(b - \rho_n).$$

Sind die $c_k \geq 0$, so ist dies die Summe der Rechteckflächen, somit die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x–Achse. Dies und der folgende (hier nicht bewiesene) Satz liefert die Interpretation des Integrales als Fläche unter dem Graphen.

Satz 4.6. *Sei $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ stetig und $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, sodaß für jede wachsende Folge $x_0 = a \leq t_0 \leq x_1 \leq t_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_k \leq t_k \leq x_{k+1} \leq \cdots \leq x_n = b$ mit $x_{k+1} - x_k < \delta$ gilt*

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)(x_{k+1} - x_k) \right| \leq \epsilon.$$

Bemerkung 4.4. Wählt man im vorigen Satz t_k so, daß $f(t_k) = m_k := \min\{f(t) : x_k \leq t \leq x_{k+1}\}$, dann heißt

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k)$$

eine RIEMANN'sche **Unter**–Summe für das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$. Analog heißt für $f(t_k) = M_k := \max\{f(t) : x_k \leq t \leq x_{k+1}\}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k)$$

eine RIEMANN'sche **Ober**–Summe für das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$. Der Satz besagt, daß beide mit zunehmender Feinheit (d.h. $\delta \downarrow 0$) gegen $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergieren.

Satz 4.7 (Partielle Integration). *Seien f, g stetig (also integrierbar) mit Stammfunktionen F, G, so gilt*

$$\int_\alpha^x Fg = FG\Big|_\alpha^x - \int_\alpha^x fG.$$

Das heißt: $F \cdot G$ ist Stammfunktion von $F \cdot g + f \cdot G$.

Beweis. Nach Voraussetzung sind $F \cdot G' = F \cdot g$ und $F' \cdot G = f \cdot G$ stetig und daher integrierbar. Aus der Produktregel $(F \cdot G)' = F' \cdot G + F \cdot G'$ (Satz 3.2) folgt durch Integration

$$(F \cdot G))\Big|_\alpha^x = F(x)G(x) - F(\alpha)G(\alpha) = \int_\alpha^x (F'G + FG') = \int_\alpha^x (fG + Fg).$$

□

Beispiel 4.2.

$$\int \log x \, dx = \int 1 \; \log x \, dx = x \log x - \int 1 \, dx = x \log x - x$$

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - \big(2xe^x - 2\int e^x \, dx\big) = e^x\big(x^2 - 2x - 2\big).$$

Satz 4.8 (Substitutionsregel). *Sei f stetig und g stetig differenzierbar, so gilt*

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x) \, dx = \int_\alpha^\beta f\big(g(t)\big) \frac{dg}{dt} \, dt.$$

Dabei sollen die Einsetzungen sinnvoll sein. Schreibt man $g(t) = x(t)$, so ergibt sich suggestiv mit $a = x(\alpha)$, $b = x(\beta)$ und $dx = \dot{x}(t) \, dt$

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_\alpha^\beta f\big(x(t)\big)\dot{x}(t) \, dt.$$

Beweis. Seien F die Stammfunktion von f. Aus der Kettenregel

$$\frac{d}{dt} F(g(t)) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$$

folgt durch Integration

$$\int_\alpha^\beta f\big(g(t)\big) \frac{dg}{dt} \, dt = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x) \, dx.$$

□

Beispiel 4.3. Wir berechnen die Fläche des halben Einheitskreises, also die Fläche unter dem Graphen von $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ für $-1 \leq x \leq 1$. Wir setzen $x(t) = \sin t$, sodaß $dx = -\sin t\,dt$ und erhalten durch Anwendung der Substitutionsregel und anschließend durch partielle Integration

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = -\int_{\pi}^{0} \sin^2 t\,dt = \int_{0}^{\pi} \sin^2 t\,dt = \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Falls eine Kurve in $\mathbf{R}^2$ in Parameterdarstellung gegeben ist, etwa $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ mit $t \in I = [a, b]$, dann läßt sich die Bogenlänge zwischen 2 Kurvenpunkten durch Integation berechnen: Falls $x(t), y(t)$ stetig differenzierbar sind, dann ist die die Länge des Kurvenbogens zwischen den Kurvenpunkten $\mathbf{a} = \mathbf{x}(\alpha)$, $\mathbf{b} = \mathbf{x}(\beta)$ gegeben durch

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt. \tag{4.4}$$

Beispiel 4.4. a) Ein Kreis mit Mittelpunkt (x_0, y_0) und Radius r hat eine Parameterdarstellung der Form

$$(x(t), y(t)) = (x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t) \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Die vorige Formel ergibt wegen $\dot{x}(t) = -r\sin t$ und $\dot{y}(t) = r\cos t$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(\sin^2(t) + \cos^2(t)}\,dt = \int_0^{2\pi} r\,dt = 2r\pi.$$

b) Wir berechnen die Länge des Parabelbogens $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ zwischen den Punkten $(0, 0)$ und $(1, 2/3)$.

Der Graph jeder Funktion $y = f(x)$, definiert auf dem Intervall $[a, b]$, besitzt mit $t = x$ die Paramterdarstellung $(x, f(x))$, sodaß die Formel (4.4) übergeht in

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Im konkreten Fall erhalten wir daher

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{3}(1+x)\sqrt{1+x}\Big|_0^1 = -\frac{2}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{2}.$$

KAPITEL 5

Funktionen in mehreren Variablen

5.1. Flächen in $\mathbf{R}^3$. Grenzwert und Stetigkeit.

Wir werden nun die Differentialrechnung auf $\mathbf{R}^2$ und $\mathbf{R}^3$ erweitern. Grundsätzlich lassen sich alle folgenden Konzepte und Sätze auf den m–dimensionalen euklidischen Raum $\mathbf{R}^m$ erweitern. Wir beschränken uns aber hier auf die Fälle $m = 2, 3$. Punkte (Vektoren) in $\mathbf{R}^2$ bzw. $\mathbf{R}^3$ beschreiben wir durch große lateinische Buchstaben, etwa $X = (x, y) \in \mathbf{R}^2$ oder $Y = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ oder $Z = (x_1, x_2, x_3)$. Wir können Vektoren addieren und subtrahieren und mit Skalaren multiplizieren, indem wir dies komponentenweise tun. Geometrisch entspricht dies der Bildung der Resultante im Kräfteparallelogramm bzw. der Streckung (Verkürzung) von Vektoren. $O = (0, \dots, 0)$ bezeichne den 0–Vektor (= Koordinatenursprung) in $\mathbf{R}^m$.

Der Grenzwertbegriff in $\mathbf{R}$ hängt an der Abstandsmessung in $\mathbf{R}$. Dies ist auch in höheren Dimensionen möglich. Der Abstand zwischen 2 Punkten X, Y ist definiert durch

$$|X - Y| = ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Insbesondere ist $|X| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ der Abstand des Punktes X vom Koordinatenursprung oder, anders ausgedrückt, die *Länge* des Vektors X. Oft wird auch $||X||$ anstelle von $|X|$ geschrieben. Der Abstandsbegriff hängt aufs engste mit der Möglichkeit zusammen, das *innere Produkt (Skalarprodukt)* von Vektoren $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3)$ bilden zu können: es ist definiert durch

$$\langle X, Y \rangle = X \cdot Y =: x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

Aus dem Additionstheorem für die Cosinus–Funktion erhält man die geometrische Interpretation

$$X \cdot Y = |X||Y| \cos\gamma.$$

Dabei ist γ der Winkel zwischen X und Y. Insbesondere gilt also $X \cdot Y = 0$ genau dann, wenn X und Y aufeinander senkrecht stehen ($\cos 90° = 0$). Man nennt sie dann auch *zueinander orthogonal.*
Aus den Definitionen für das Skalarprodukt und den Abstand folgen unmittelbar

die Beziehungen

$$
(5.1)\qquad
\begin{aligned}
&X \cdot Y = Y \cdot X\,, \qquad |X|^2 = X \cdot X\,, \qquad |X - Y| = \big((X-Y)\cdot(X-Y)\big)^{\frac{1}{2}}\\
&\alpha(X \cdot Y) = (\alpha X)\cdot Y\,, \quad (\alpha \in \mathbf{R}) \qquad X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z\\
&|X - Y| = |Y - X| \quad \text{Symmetrie}\\
&|X - Z| \leq |X - Y| + |Y - Z| \quad \text{Dreiecksungleichung}\\
&|X - Y| = 0 \Longleftrightarrow X = Y\\
&|X \cdot Y| \leq |X||Y| \quad \text{Cauchy–Schwarz–Ungleichung.}
\end{aligned}
$$

Bei der Cauchy–Schwarz–Ungleichung beachte man, daß $|X \cdot Y|$ der Absolutbetrag der reellen Zahl $X \cdot Y$ ist.

In völliger Analogie zu Konvergenz von Zahlenfolgen definieren wir

Definition 5.1. Eine Folge von Punkten $X_n \in \mathbf{R}^m$ heißt konvergent gegen $X_0 \in \mathbf{R}^m$, falls gilt

$$
(5.2)\qquad \bigwedge_{\epsilon>0} \bigvee_{n_0 \in \mathbf{N}} \bigwedge_{n \geq n_0} |X_n - X_0| < \epsilon
$$

Schreibweise:

$$
X_0 = \lim_{n\to\infty} X_n, \quad \text{oder} \quad X_n \to X_0, \quad \text{oder kurz} \quad X_0 = \lim X_n.
$$

Sei $B(r, X_0) = \{X \in \mathbf{R}^{2(3)} : |X - X_0| < r\}$ der (die) *offene* Kreis (Kugel) mit Mittelpunkt X_0 und Radius r. Die vorige Definition ist dann gleichbedeutend mit der Aussage, daß bei vorgegebenem $\epsilon > 0$ höchstens endlich viele Punkte X_k der Folge (X_n) außerhalb von $B(\epsilon, X_0)$ liegen. Die Konvergenz einer Folge in $\mathbf{R}^m$ ist gleichbedeutend mit der Konvergenz der Komponenten der Folgenglieder in $\mathbf{R}$:

Satz 5.1. *Seien $X_n = (x_n, y_n, z_n)$ und $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Dann gilt*

$$
X_0 = \lim_{n\to\infty} X_n \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n, y_n, z_n = x_0, y_0, z_0.
$$

Auf Grund dieses Satzes können wir die Konvergenz in $\mathbf{R}^m$ zurückführen auf jene in $\mathbf{R}$.

Definition 5.2. Eine Abbildung $f : A \subset \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ mit $X = (x_1, \ldots, x_m) \mapsto f(X) = f(x_1, \ldots, x_m)$ heißt *reelle Funktion* in m reellen Variablen. Wir werden nur den Fall $m = 2$ und $m = 3$ betrachten.

Bemerkung 5.1. Der Graph einer reellen Funktion $f(x, y)$ in 2 Variablen x, y läßt sich als ein *Flächenstück* im $\mathbf{R}^3$ über dem Definitionsbereich A veranschaulichen: Es ist dies $\{(x, y, z) : (x, y) \in A,\ z = f(x, y)\} = \{(x, y, z) : (x, y) \in A,\ z - f(x, y) = 0\}$. Dies ist ein Spezialfall der sehr viel allgemeineren Darstellung einer Fläche im $\mathbf{R}^3$: Ausgehend von einer Funktion $G : B \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ in 3 Variablen ist unter nicht sehr einschränkenden Voraussetzungen über G die Nullstellenmenge der Funktion G eine Fläche $\mathcal{F}$ in $\mathbf{R}^3$

$$\{(x, y, z) \in B : G(x, y, z) = 0\}$$

Man nennt dies die *implizite Darstellung* der Fläche $\mathcal{F}$.

Die Bilder der Parallelen zu den Koordinatenachsen in der x, y–Ebene auf dem Graphen einer Funktion $z = f(x, y)$ heißen *Koordinatenlinien.* Dabei sind die sg. x–Linien der geometrische Ort der Punkte $\big(x, y_0, f(x, y_0)\big)$ und entsprechend die y–Linien jener der Punkte $\big(x_0, y, f(x_0, y)\big)$ mit jeweils festen y_0 bzw. x_0. x und y durchlaufen die für den vorgegebenen Definitionsbereich von f möglichen Werte.

BEISPIEL 5.1. a) Für feste Zahlen $a, b \in \mathbf{R}$ ist $z = f(x, y) = ax + by$ eine sg. *lineare Funktion* in den 2 Variablen x, y. Entsprechend ist für vorgegeben reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_m$, die wir zu einem Vektor $A = (a_1, \ldots, a_m)$ zusammenfassen können

$$f(x_1, \ldots, x_m) = a_1 x_1 + \cdots + a_m x_m = \big\langle A, X \big\rangle$$

eine lineare Funktion in m Variablen. Die lineare Funktion $f(x, y)$ ist auf ganz $\mathbf{R}^2$ definiert und ihr Graph ist eine Ebene in $\mathbf{R}^3$.

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 0 = ax + by - z =< (a, b, 1), (x, y, z) >\},$$

also die Menge aller Vektoren im $\mathbf{R}^3$, die orthogonal zu dem festen Vektor $N = (a, b, 1)$ sind. Dies ist eine Ebene durch den 0–Punkt $O = (0, 0, 0)$ *mit der Stellung* N, d.h. mit einer Normalen in Richtung N. Allgemeiner ist

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \big\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0\big\} \\ &= \big\{X = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \big\langle (a, b, c), (x - x_0, y - y_0, z - z_0)\big\rangle = 0\big\} \\ &= \big\{X \in \mathbf{R}^3 : \big\langle N, X - X_0 \big\rangle = 0\big\} \end{aligned}$$

eine Ebene durch den Punkt $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ mit der Stellung $N = (a, b, c)$.
Wichtige Spezialfälle sind:
$x = 0$: die y, z–Ebene
$y = 0$: die x, z–Ebene
$z = 0$: die x, y–Ebene.

b) Der Graph von $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ ist das *Drehparaboloid.*
c) $z = f(x, y) = x^2 - y^2$:*Sattelfläche.*
d) $z = f(x, y) = x^3 - 3xy^2$: *Affensattel*

e) Sei $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Die Nullstellenmenge ist
$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$, also die *1–Sphäre*

f) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$: *einschaliges Hyperboloid* (Kühlturm)
g) $x^2 + y^2 - z^2 = -1$: *zweischaliges Hyperboloid*
e) Was stellt $z^2 = x^2 + y^2$ dar?

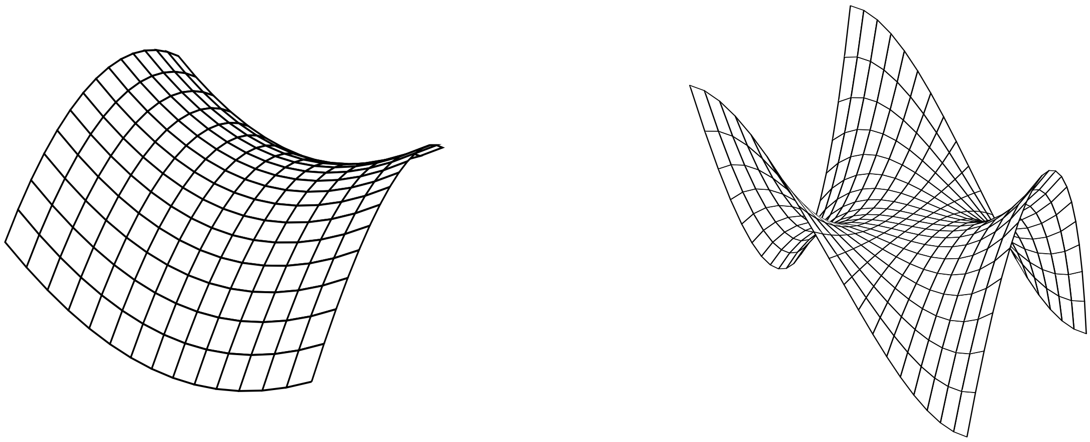


Abbildung 1. Sattel und Affensattel

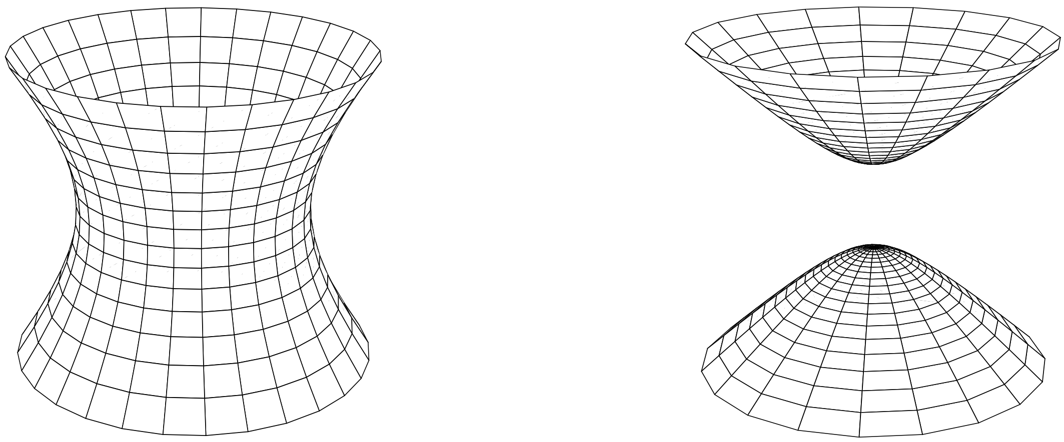


Abbildung 2. 1– und 2–schaliges Hyperboloid

Die folgenden Definitionen und Sätze sind völlig analog zu 1–dimensionalen Fall (vgl. Kapitel 2).

Definition 5.3. Sei $f : A \subset \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ und $y_0 \in \mathbf{R}$. Man sagt: f besitzt in X_0 den Grenzwert y_0, wenn

$$\bigwedge_{\epsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{X \in A} \big(0 < |X - X_0| < \delta \Longrightarrow |f(X) - y_0| < \epsilon\big). \tag{5.3}$$

Andere Sprechweise: f strebt (konvergiert) gegen y_0, wenn X gegen X_0 strebt.

Schreibweisen:

$$\lim_{X \to X_0} f(X) = y_0 \quad \text{oder} \quad f(X) \to y_0 \quad \text{für} \quad X \to X_0.$$

SATZ 5.2. *Eine Funktion $f : A \subset \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ besitzt genau dann in X_0 einen Grenzwert y_0, also $\lim_{X\to X_0} f(x) = y_0$, wenn für alle Folgen (X_n) in A mit $X_n \neq X_0$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X_0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(X_n) = y_0.$$

Der wesentliche (und verkomplizierende) Unterschied beim Grenzwert zum 1–dimensionalen Fall ist, daß in höheren Dimensionen die Annäherung an X_0 aus allen Richtungen und nicht einmal längs Geraden (wie in $\mathbf{R}$) erfolgen kann.

BEISPIEL 5.2. Betrachten wir dazu die auf $\mathbf{R}^2$ definierte Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Das ist eine rationale Funktion auf $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0\}$. Im 0–Punkt erhalten wir je nach Annäherung verschiedene Grenzwerte: wenn wir uns längs einer Geraden durch den Ursprung $X(t) = (at, bt) \quad (a^2 + b^2 > 0)$ bewegen, dann wird

$$\lim_{t\to 0} f(X(t)) = \frac{ab}{a^2+b^2}.$$

Auf den Achsen ($a = 0$ oder $b = 0$) wird dieser Grenzwert 0, auf allen anderen Geraden ist er $\neq 0$. Nach dem vorigen Satz hat f in $(0,0)$ also keinen Grenzwert.

DEFINITION 5.4. $f : A \subset \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ heißt **stetig** in $X_0 \in A$, falls gilt

$$\lim_{X\to X_0} f(X) = f(X_0),$$

anderenfalls heißt f **unstetig** in X_0.

f heißt *stetig in A*, falls f stetig ist in **allen** Punkten von A, anderenfalls unstetig in A.

SATZ 5.3. *Sei $f : A \to \mathbf{R}$, $X_0 \in A$. Folgende Aussagen sind äquivalent*
1) f ist in X_0 stetig.
2) $\lim_{H\to 0} f(X_0 + H) = f(X_0) \qquad H = (h_1, \ldots, h_m),\ 0 = (0, \ldots, 0).$
3) Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodaß für alle $X \in A$ mit $|X - X_0| < \delta$ (wofür wir auch schreiben können $X = X_0 + H$, $0 \leq |H| < \delta$) gilt

$$|f(X) - f(X_0)| = |f(X_0 + H) - f(X_0| < \epsilon$$

Formal in Zeichen:

$$\bigwedge_{\epsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{X\in B_\delta(X_0)} \big|f(X) - f(X_0)\big| < \epsilon.$$

4) $\lim_{n\to\infty} f(X_n) = f(X_0)$ *für alle Folgen (X_n) in A mit $X_n \to X_0$.*

SATZ 5.4. *Endliche Summen, Differenzen und Produkte stetiger Funktionen sind stetig. Der Quotient stetiger Funktionen ist dort stetig, wo der Nenner keine Nullstellen hat.*

BEISPIEL 5.3. Polynome in n Variablen sind auf ganz $\mathbf{R}^m$ stetig, insbesondere also *quadratische Formen* in 2 Variablen:
$q(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$, $(a, b, \ldots, f \in \mathbf{R})$.
Die Funktion aus Beispiel 5.2 ist mit Ausnahme des Punktes $(0,0)$ überall stetig.

5.1.1. Differentiation in mehreren Variablen. Die Koordinatenlinien auf dem Graphen einer Funktion $f(x,y)$ sind der Schnitt dieses Graphen mit den Ebenen $y = y_0$ bzw. $x = x_0$. Es handelt sich also um ebene Kurven und die Berechnung ihrer Tangentensteigungen führt zu folgender

DEFINITION 5.5. Sei $f : A \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ eine auf einer (offenen) Menge A definierte Funktion und sei $X_0 = (x_0, y_0) \in A$.

$$f_x(X_0) = f_x(x_0, y_0) := \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

heißt *partielle Ableitung* von f nach x an der Stelle X_0. Analog heißt

$$f_y(X_0) = f_y(x_0, y_0) := \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

partielle Ableitung von f nach y an der Stelle X_0. Die partiellen Ableitungen sind wieder Funktionen in 2 Variablen.

Der Punkt X_0 heißt *kritischer Punkt*, wenn gilt

$$f_x(X_0) = f_y(X_0) = 0.$$

Die partielle Ableitung wird also berechnet wie die Ableitung nach *einer* Variablen bei jeweils konstant gehaltenen restlichen Variablen. Setzen wir für die Einheitsvektoren in Richtung der beiden Koordinatenachsen $E_1 = (1,0)$, $E_2 = (0,1)$, so können wir auch schreiben

$$\begin{aligned} f_x(X_0) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(X_0 + tE_1) - f(X_0)}{t} \\ f_y(X_0) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(X_0 + tE_2) - f(X_0)}{t}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Allgemeiner heißt für einen beliebigen Vektor $H = (h,k)$

$$D_H f(X_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(X_0 + tH) - f(X_0)}{t}$$

die *Richtungsableitung* von f an der Stelle X_0 in Richtung H.

Höhere partielle Ableitungen ergeben sich in analoger Weise und man schreibt bei einer Funktion $f(x,y)$ für die partiellen Ableitungen 2. Ordnung

$$f_{xx}(x_0,y_0) := \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)}, \quad f_{xy}(x_0,y_0) := \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(x_0,y_0)},$$
$$f_{yx}(x_0,y_0) := \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(x_0,y_0)}, \quad f_{yy}(x_0,y_0) := \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)}.$$

Wenn alle partiellen Ableitungen 2. Ordnung stetig sind, dann läßt sich zeigen, daß die für die praktische Berechnung wichtigen Vertauschungsrelationen $f_{xy} = f_{yx}$ gelten (Satz v. SCHWARZ). Das gilt auch für Funktionen in mehr Variablen.

BEISPIEL 5.4. a) Sei $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definiert durch $f(x,y) = x \sin y + y \cos x$. Dann ist

$$\begin{aligned}
&f_x(x,y) = \sin y - y \cos x, \quad f_y(x,y) = x \cos y + \cos x \\
&f_{xy} = \cos y - \cos x = f_{yx} \\
&f_{xx} = -y \cos x \quad f_{yy} = -x \sin y.
\end{aligned}$$

b) Sei $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definiert durch $f(x,y) = x^3 y - e^{xy}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
&f_x = 3x^2 y - e^{xy} y, \quad f_y = x^3 - e^{xy} x, \\
&f_{xy} = 3x^2 - e^{xy} y^2 = f_{yx}, \quad f_{xy}\big|_{(1,1)} = 3 - e = f_{yx}\big|_{(1,1)} \\
&f_{xx} = 6x - y^2 e^{xy}, \quad f_{yy} = -x^2 e^{xy}.
\end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen $f_x(X_0)$, $f_y(X_0)$ beschreiben die Änderungsrate von f lediglich entlang (in Richtung) der Koordinatenlinien, die durch einen bestimmten Flächenpunkt X_0 gehen. Um ein vollständigeres Bild über das Verhalten von f zu bekommen, gehen wir geometrisch vor. Im ein–dimensionalen Fall haben wir eine Funktion $f(x)$ in der Umgebung von x_0 durch eine lineare Funktion $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ approximiert; genauer gesagt handelt es sich um die lineare Abbildung $x \mapsto f'(x_0)(x - x_0)$ mit anschließender Verschiebung $(+f(x_0))$. Geometrisch interpretiert: der Graph einer solchen Funktion ist eine Linie im $\mathbf{R}^2$, die wir in der Nähe des Punktes $(x_0, f(x_0))$ durch eine Gerade, also den verschobenen Graphen einer linearen Funktion approximieren. Im 2–dimensionalen Fall hat eine lineare Funktion die Form

$$X = (x,y) \mapsto z = ax + by =< (a,b),(x,y) >= A \cdot X,$$

wobei $A \in \mathbf{R}^2$ ein fester Vektor ist und der Graph einer solchen Funktion ist eine Ebene (vgl. voriger Abschnitt).

Wenn wir eine Funktion von 2 Variablen $f(x,y)$ in der Nähe von $X_0 = (x_0,y_0)$ durch eine lineare Funktion approximieren möchten, so suchen wir also einen Vektor $A = (a,b)$ (natürlich abhängig von X_0), sodaß für alle $X = (x,y)$ nahe bei X_0 gilt

$$f(X) = f(x,y) \sim f(X_0) + A \cdot (X - X_0) = f(x_0,y_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0).$$

Die geometrische Betrachtung liefert uns sofort den Hinweis, welche Zahlen a, b hier in Betracht kommen:
Im Flächenpunkt $(x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0))$ ist der Tangentialvektor der x– bzw. y–Linie auf dem Graphen $(x, y, f(x, y))$ gegeben durch

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big\{\big(x_0+t, y_0, f(x_0+t, y_0)\big) - \big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)\big\} = \big(1, 0, f_x(X_0)\big)$$
$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big\{\big(x_0, y_0+t, f(x_0, y_0+t)\big) - \big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)\big\} = \big(0, 1, f_y(X_0)\big).$$

Diese beiden Vektoren spannen eine Ebene in $\mathbf{R}^3$ auf, als deren „Ursprung“ wir $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ nehmen, sodaß ein allgemeiner Punkt (x, y, z) dieser Ebene die Darstellung hat

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= \big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big) + (1, 0, f_x(X_0))(x - x_0) + (0, 1, f_y(X_0))(y - y_0)\big)\\ &= \big(x, y, f(x_0, y_0)\big) + f_x(X_0)(x - x_0) + f_y(X_0)(y - y_0)\big).\end{aligned}$$

Es ist also die Menge der Punkte

$$\{(x, y, z) : \big\langle (f_x, f_y, 1), (x - x_0, y - y_0, z - z_0)\big\rangle = 0\}.$$

Für die z–Komponente folgt daher die Gleichung

$$z = z(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0). \tag{5.5}$$

Dies ist die Gleichung der sg. *Tangentialebene* an den Graphen der Funktion f im Punkt X_0. Offenbar hat es aber nur dann Sinn, diese Ebene als Tangentialebene zu bezeichnen, wenn jeder andere Tangentialvektor, der sich längs einer beliebigen Richtung $H = (h, k) \neq (0, 0)$ ergibt, in dieser Ebene liegt, also

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big\{\big(x_0+th, y_0+tk, f(x_0+th, y_0+tk)\big) - \big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)\big\}\\ &= \Big(h, k, \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(f(X_0+tH) - f(X_0)\big)\\ &= \lambda\big(1, 0, f_x^0\big) + \mu\big(0, 1, f_y^0\big).\end{aligned}$$

Das ist also nur möglich, wenn $\lambda = h$ und $\mu = k$. Es muß daher gelten

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(f(X_0+tH) - f(X_0)\big) = hf_x^0 + kf_y^0. \tag{5.6}$$

Dies können wir auch so ausdrücken

$$f(X_0+tH) - f(X_0) - thf_x^0 + tkf_y^0 = r(tH)$$

mit $r(O) = 0$ und $\lim_{t\to 0} \frac{r(tH)}{|tH|} = 0$. Der Grenzübergang zum Koordinatenursprung erfolgt also entlang der Geraden tH. Da der Grenzübergang in höheren Dimensionen aber aus allen Richtungen und nicht nur längs Geraden erfolgen kann, gelangen wir schließlich zu folgender

Definition 5.6. Eine Funktion $f : A \subset \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ heißt *(total) differenzierbar* in $X_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0) \in A$, falls

$$\lim_{H\to 0} \frac{1}{|H|}\left(f(X_0 + H) - f(X_0) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)\, h_i \right) = 0. \tag{5.7}$$

Hier ist $H = (h_1, \ldots, h_m) \in \mathbf{R}^m$. Setzen wir $H = X - X_0$, so ist dies gleichbedeutend mit der Existenz einer Funktion $r(X)$, sodaß

$$\begin{aligned} f(X) &= f(X_0) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)\,(x_i - x_i^0)) + r(X) \\ &= f(X_0) + \big\langle \operatorname{grad} f(X_0), (X - X_0)\big\rangle + r(X), \end{aligned}$$

wobei $r(X)$ stetig ist in X_0 mit

$$r(X_0) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{X\to X_0} \frac{r(X)}{|X - X_0|} = 0.$$

Wir schreiben $f'(X_0) = \operatorname{grad} f(X_0) = \big(f_x^0, f_y^0\big)$ und nennen $f' = \operatorname{grad} f$ die Totalableitung von f.

In diesem Sinne stellt also bei einer in X_0 differenzierbaren Funktion f die durch Gleichung (5.5) definierte Funktion $z(x, y)$ in der Nähe von (x_0, y_0) die „beste“ lineare Approximation der i.a. nichtlinearen Funktion f dar und geometrisch ist die Tangentialebene die sich am besten an die Fläche (d.h. Graph von f) anschmiegende Ebene im Flächenpunkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Man kann zeigen, daß es keine andere lineare Funktion mit diesen Eigenschaften gibt. Die Definition ist so gewählt, daß (erwartungsgemäß) aus der Differenzierbarkeit die Stetigkeit folgt.

Natürlich wird eine Tangentialebene nicht immer existieren (man denke an Falten, Kanten, Spitzen udgl.), auch wenn die partiellen Ableitungen existieren. Totale Differenzierbarkeit von f bedeutet auch noch mehr als die bloße Existenz einer Tangentialebene, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 5.5. Betrachten wir die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4}{y} & \text{für } x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & \text{für } y = 0. \end{cases}$$

Man verifiziert leicht $D_H f(0, 0) = 0$ für jede Richtung $H = (h, k)$ ($f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ folgt unmittelbar aus der Definition von f). f ist also nicht nur partiell differenzierbar im Ursprung, f hat sogar eine Tangentialebene, die x,y-Ebene. f ist aber nicht differenzierbar in $(0, 0)$. Dazu nähere man sich dem Ursprung längs der Parabel $k = h^4$. Der Grenzwert (5.7) wird unendlich (Übung). In Übereinstimmung mit Satz 5.5 zeigt man auch leicht, daß f unstetig ist in $(0, 0)$.

Folgende Sätze ergeben sich unmittelbar aus der Definition:

SATZ 5.5. *Falls f (total) differenzierbar ist in $X_0 \in A$, dann ist f stetig in X_0.*

SATZ 5.6. *Falls f (total) differenzierbar ist in $X_0 \in A$, dann gilt für eine beliebige (aber feste) Richtung H*

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(f(X_0+tH) - f(X_0)\Big) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)\, h_i. \tag{5.8}$$

SATZ 5.7. *$f : A \subset \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ sei partiell differenzierbar und alle partiellen Ableitungen seien stetig in A. Dann ist f differenzierbar in A.*

5.2. Taylor–Formel

Sei $f : A \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ eine reelle Funktion in $m = 2$ Veränderlichen, $X_0 \in A$ und $H = (h, k) \in \mathbf{R}^2$. Dann ist durch $t \mapsto X(t) := X_0 + tH$ eine Gerade in $\mathbf{R}^2$ definiert, die für kleine t jedenfalls in A bleibt, sodaß ihr Bild $(X(t), f(X(t))$ auf dem Graphen von f eine für $t = 0$ durch den Flächenpunkt $(X_0, f(X_0))$ gehende Kurve beschreibt. Die Richtungsableitung in Richtung H können wir als Berechnung der Änderungsrate von f entlang dieser Kurve auffassen. Falls f_x, f_y ebenfalls differenzierbar sind, können wir aus deren Ableitungen weitere Information über f gewinnen. Wir betrachten dazu die Funktion $F(t) = f(X(t)) = f(X_0 + tH)$ in der *einen* Variablen t. Aus der gewöhnlichen Taylor–Formel erhalten wir

$$f(X_0 + tH) = F(\tau) = F(0) + \dot{F}(0)t + \frac{1}{2}\ddot{F}(0)t^2 + R(tH)$$

Die gewöhnliche Ableitung von F nach τ, symbolisiert durch den Punkt, bedeutet nun die Richtungsableitung von f in Richtung H an der Stelle X_0. Nach Formel 5.8 ist $\dot{F}(0) = f_x(X_0)\cdot h + f_y(X_0)\cdot k$. Wenden wir zur Berechnung von $\ddot{F}(0)$ diese Formel nochmals an, jetzt auf die Komponenten $f_x,\ f_y$, so erhalten wir wegen $f_{xy} = f_{yx}$ (Satz v. SCHWARZ) und

$$\dot{f}_x(X_0) = f^0_{xx}h^2 + f^0_{xy}hk \quad \text{und} \quad \dot{f}_y(X_0) = f^0_{yx}hk + f^0_{yy}k^2$$

daraus für $t = 1$ die sg. TAYLOR–Entwicklung der Funktion f bis zu Gliedern 2. Ordnung.

$$f(X_0 + H) = f^0 + f^0_x \cdot h + f^0_y \cdot k + \frac{1}{2}\big(f^0_{xx}h^2 + 2f^0_{xy}hk + f^0_{yy}k^2\big) + \mathcal{R}(H)\,. \tag{5.9}$$

Dabei bedeutet das Superskript ^{0} immer die Auswertung der betreffenden Funktion an der Stelle X_0 und für das Restglied $\mathcal{R}$ gilt

$$\lim_{H\to O} \frac{\mathcal{R}(H)}{|H|^2} = 0.$$

f wird also durch ein Polynom 2. Grades in den Komponenten des Vektors H (so weit entfernen wir uns von X_0) approximiert.

Setzen wir Differenzierbarkeit beliebiger Ordnung von f voraus, so läßt sich diese Entwicklung weiter fortsetzen und man erhält eine (unter Umständen konvergente) Potenzreihe in den Variablen h, k. Wenn $f(x,y)$ aus elementaren Funktionen in *einer* Variablen aufgebaut ist, deren Potenzreihenentwicklung bekannt ist, läßt sich der Anfang der TAYLOR–Entwicklung von f meist einfacher durch formale Manipulation dieser Reihen gewinnen.

BEISPIEL 5.6. Wir suchen die TAYLOR–Entwicklung von $f(x,y) = \sin x \cos y$ mit Entwicklungspunkt $X_0 = (0,0)$ bis zu Gliedern 5. Ordnung. Die Berechnung mittels TAYLOR–Formel würde die (langweilige) Berechnung der partiellen Ableitungen von f bis einschließlich 5. Ordnung erfordern. Ein Ausmultiplizieren der Potenzreihen liefert uns sofort

$$\begin{aligned}\sin x \cos y &= \big(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\big)\big(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \dots\big)\\ &= x - \frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{2!}xy^2 + \frac{1}{4!}xy^4 + \frac{1}{2!3!}x^3y^2\\ &\quad + \text{Glieder der ungeraden Ordnung} \quad \geq 7.\end{aligned}$$

5.3. Extrema von Funktionen $f(x,y)$.

Die Begriffe *relatives (absolutes) Extremum, Maximum, Minimum* lassen sich praktisch wörtlich aus dem 1–dimensionalen auf den mehrdimensionalen Fall übertragen. Sei also $f : A \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Falls f in $X_0 \in A$ ein relatives Extremum besitzt, so gilt dies auch für die Einschränkung von f auf eine von X_0 ausgehende Gerade, insbesondere also auch für die durch X_0 gehenden Parallelen zu den Koordinatenachsen. Die Anwendung der 1–dimensionalen Überlegungen liefert sofort die notwendige Bedingung

SATZ 5.8. *$f : A \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ sei in $X_0 \in A$ partiell differenzierbar und besitze in X_0 ein relatives Extremum. Dann gilt*

$$\text{(5.10)} \qquad \mathit{grad}\, f\big|_{X_0} = (f_x, f_y)\big|_{X_0} = (0,0) \quad \text{d.h.} \quad f_x(X_0) = f_y(X_0) = 0.$$

Ob tatsächlich ein Extremum vorliegt und wenn ja, welcher Art, hängt vom Verhalten des quadratischen Terms

$$q(h,k) := \frac{1}{2}\big(f_{xx}^{(0)}h^2 + 2f_{xy}^{(0)}hk + f_{yy}^{(0)}k^2\big)$$

in der TAYLOR–Formel (5.9) ab. Das Restglied fällt in diesem Zusammenhang nicht mehr ins Gewicht. Dabei nehmen wir an, daß mindestens eine dieser 2. Ableitungen von 0 verschieden ist (sonst muß man höhere Ableitungen untersuchen). Schreiben wir $q(X) = q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ mit den Konstanten $a = f_{xx}^{(0)}, b = f_{xy}^{(0)}, c = f_{yy}^{(0)}$ und verschieben wir alles in den Koordinatenursprung, d.h. $X_0 = O = (0,0)$ und $f(X_0) = 0$, so verhält sich f in der Nähe von O wie die quadratische Form q

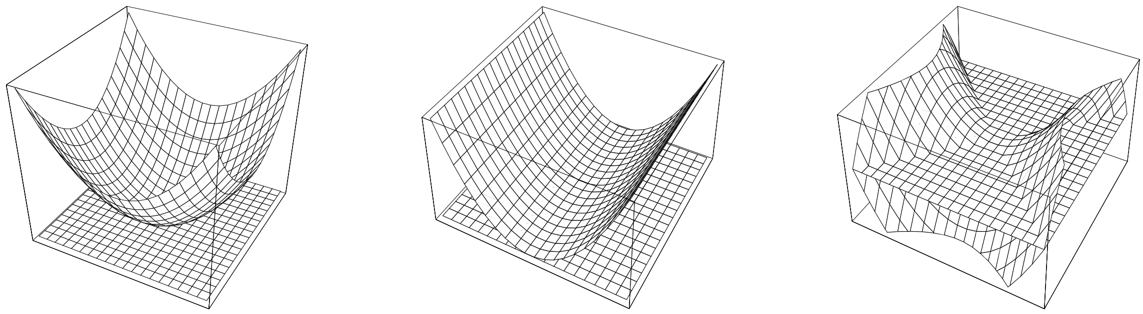


Abbildung 3. Extremal und Nicht Extremal

und dies ist abhängig von a, b, c. Mit Hilfe der Koeffizientenmatrix A läßt sich q folgendermaßen schreiben

$$q(X) = \langle X, AX \rangle = \langle X, \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} X \rangle$$

Für die durch q beschriebene Fläche $\mathcal{G}$ gilt (vgl. Abb.3)

1. Falls $ac - b^2 > 0, \quad a > 0 \quad (a < 0)$, dann ist $\mathcal{G}$ ein nach *unten (oben)* gewölbtes *Paraboloid* mit einem Maximum (Minimum) im Ursprung und dem Maximal(Minimal)wert 0.

2. Falls $ac - b^2 = 0, \quad a < 0 \quad (a < 0)$, dann ist $\mathcal{G}$ eine nach *unten (oben)* gewölbte *Halbschale* mit einem Maximum (Minimum) im Ursprung und dem Maximal(Minimal)wert 0.

3. Falls $ac - b^2 < 0$, dann ist $\mathcal{G}$ eine *Sattelfläche*, die im Ursprung offenbar kein Extremum besitzt. Übertragen auf unser Extremalproblem erhalten wir

Satz 5.9. *$f : A \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ sei in $X_0 \in A$ partiell differenzierbar und es gelte $f_x(X_0) = f_y(X_0) = 0$. Falls in X_0 wenigstens eine der partiellen Ableitungen 2. Ordnung ungleich 0 ist, dann gibt es folgende Möglichkeiten:*

1. $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$, dann hat f in X_0 ein strenges relatives Extremum, und zwar:
ein Minimum, falls $f_{xx} > 0$
ein Maximum, falls $f_{xx} < 0$.
Der Graph $\mathcal{F}$ von f ähnelt in der Nähe von X_0 einem Paraboloid.

2. $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$, dann sind f_{xx}, f_{yy} Vorzeichen–gleich und bei
f_{xx}, $f_{yy} \geq 0$ hat f ein Minimum
f_{xx}, $f_{yy} \leq 0$ hat f ein Maximum.
Der Graph $\mathcal{F}$ von f ähnelt in der Nähe von X_0 einer Halbschale.

3. $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$, dann hat f in X_0 kein relatives Extremum. Der Graph $\mathcal{F}$ von f ähnelt in der Nähe von X_0 einer Sattelfläche.

BEISPIEL 5.7. $f(x, y) = (x + y)^2 - 12xy$. Es ist

$$f_x(x, y) = 3(x + y)^2 - 12y, \quad f_y(x, y) = 3(x + y)^2 - 12x.$$

Aus $f_x = f_y = 0$ folgt zunächst $x = y$ und daraus leicht die beiden kritischen Punkte $x = y = 0$ und $x = y = 1$. Weiters ist

$$f_{xx} = 6(x + y), \quad f_{xy} = 6(x + y) - 12, \quad f_{yy} = 6(x + y),$$
$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 144(x + y - 1)$$

und daher

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = \begin{cases} -144 < 0 & \text{für} \quad x = y = 0 \\ +144 > 0 & \text{für} \quad x = y = 1. \end{cases}$$

Im Punkt $X_0 = (0, 0)$ liegt also kein Extremwert vor; der Graph von f ist in der Umgebung von X_0 Sattel-förmig. Wegen $f_{xx}(1, 1) = 12 > 0$ ist $X_1 = (1, 1)$ ein Extremalpunkt von f und zwar ein Minimum.

5.3.1. Extrema mit Nebenbedingungen. Sei $f : A \subset \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$. Wir suchen Extremalpunkte und Extremalwerte von $f(X) = f(x_1, \ldots, x_m)$ unter gewissen sg. Nebenbedingungen, die in Form von k Gleichungen $g_1(X) = 0, \ldots g_k(X) = 0 \quad (k < m)$ gegeben seien. Das bedeutet, daß wir die Punkte für Extremalität auf einer durch diese Gleichungen eingeschränkten Teilmenge von A suchen. Es geht also um die Bestimmung von Punkten $X = (x_1, \ldots, x_m)$, sodaß

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \text{Extremum!}$$
$$g_1(x_1, \ldots, x_m) = 0$$
$$\ldots\ldots$$
$$g_k(x_1, \ldots, x_m) = 0.$$

Es gibt 2 Lösungsmethoden, deren Zweckmäßigkeit vom konkreten Fall abhängt. (Die Frage, ob die gefundenen Lösungen tatsächlich extremal sind, wird hier nicht diskutiert)

1. Aus den k Gleichungen lassen sich (unter gewissen Bedingungen) k der m Variablen eliminieren, d.h. durch die restlichen ausdrücken. Man untersucht dann die Extremalität von f in Abhängigkeit von diesen restlichen als *freies Optimierungsproblem*, d.h. ohne Nebenbedingungen.

BEISPIEL 5.8.

$$f(x, y, z) = e^x + e^y + e^z = \text{Extremum!}$$
$$g_1(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0.$$

Aus der Nebenbedingung folgt $z = 1 - x - y$ und es geht nun um die Bestimmung der Extremalpunkte und Werte von $h(x, y) = e^x + e^y + e^{1-x-y}$: Aus $h_x = h_y = 0$ folgt

$$e^x - e^{1-x-y} = 0, \quad e^y - e^{1-x-y} = 0.$$

Daraus folgt zunächst $x = y$ und dann $x = y = 1/3$. Eingesetzt in die Nebenbedingung erhalten wir auch noch $z = 1/3$.

2. Man führt k neue Variable $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ein, die sg. LAGRANGE–Multiplikatoren, und versucht das Extremalproblem

$$f(x_1, \dots, x_m) + \lambda_1 g_1(x_1, \dots, x_m) + \dots + \lambda_k g_k(x_1, \dots, x_m) = \text{Extremum!}$$

in den $m + k$ Variablen $x_1, \dots, x_m, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ zu lösen.

Beispiel 5.9. Wir suchen das absolute Minimum und Maximum der Funktion $f(X) = f(x, y, z) = xyz$ im Bereich $|X| \le 1$.

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= xyz = \text{Extremum!} \\ g(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 \le 1. \end{aligned}$$

Zunächst folgt aus der Bedingung $f_x = f_y = f_z = 0$, daß ein Extremalwert von f, der für $|X| < 1$ angenommen wird, nur 0 sein kann. Wir können also o.B.d.A. die Nebenbedingung $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ annehmen und weiters, daß im kritischen Punkt keine der Komponenten 0 ist. Hier ist zwar auch die Elimination einer Variablen möglich, die anschließende Rechnung analog zum vorigen Beispiel ist aber unangenehm.

Der Einsatz der Multiplikatoren führt zum Extremalproblem in 4 Variablen

$$F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = \text{Extremum!}$$

Durch 0–Setzen der 1. partiellen Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned} F_x &= yz + 2\lambda x = 0 \\ F_y &= xz + 2\lambda y = 0 \\ F_z &= xy + 2\lambda z = 0 \\ F_\lambda &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Das sind 4 Gleichungen für die Unbekannten x, y, z, λ, die sich in diesem Fall durch elementares Umformen lösen lassen. Für die kritischen Punkte $X = (x, y, z)$ findet man $x^2 = y^2 = z^2 = 1/3$. Der Funktionswert an diesen Stellen ist daher $\pm 1/\sqrt{27}$.

Im allgemeinen wird man zur Nullstellen–Bestimmung eines solchen Gleichungssystems numerische Verfahren benötigen.