Skriptum zur Vorlesung

Spektraltheorie und Distributionen

gehalten von Paul F.X. Müller und Johanna Penteker

Johannes Kepler Universität Linz
SS 2014

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Spektraltheorie

1.1 Hilberträume

1.1.1 Definition

Definition 1.1.1 (Skalarprodukt)
Sei H ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Ein Skalarprodukt auf H ist eine positiv definite, symmetrische Bilinearform

$$(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{R},$$

d.h. die Bilinearform erfüllt folgende Eigenschaften:

1. $\forall x \in H : (x,x) \geq 0; (x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$ (positive Definitheit)
2. $\forall x, y, \in H, \lambda \in \mathbb{R} : (\lambda x, y) = \lambda(x,y)$ (Linearität)
3. $\forall x, y, z \in H : (x+y, z) = (x,z) + (y,z)$ (Linearität)
4. $\forall x, y \in H : (x,y) = (y,x)$ (Symmetrie)

Satz 1.1.1

1. $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$ *definiert eine Norm auf H.*
2. $\forall x, y \in H : (x,y)^2 \leq (x,x)(y,y)$ *(Cauchy - Schwartz Ungleichung)*
3. $\forall x, y \in H : (x+y, x+y)^{\frac{1}{2}} \leq (x,x)^{\frac{1}{2}} + (y,y)^{\frac{1}{2}}$

Beweis.

1. Übung.
2. Sei $x, y \in H$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$0 \leq (x + \lambda y, x + \lambda y) = (x,x) + 2\lambda(x,y) + \lambda^2(y,y).$$

Das Polynom $P : \lambda \to \lambda^2(y,y) + (x,x) + 2\lambda(x,y)$ hat das Minimum für

$$\lambda = -\frac{(x,y)}{(y,y)}.$$

Setzt man dieses Minimum nun oben ein, so erhält man

$$0 \leq (x,x) - 2\frac{(x,y)^2}{(y,y)} + \frac{(x,y)^2}{(y,y)}$$

und durch Umformen erhält man die Cauchy-Schwartz Ungleichung.

3. Aus der Cauchy-Schwartz Ungleichung erhält man:

$$\begin{aligned}(x+y,x+y) &= (x,x) + 2(x,y) + (y,y) \\ &\leq (x,x) + 2(x,x)^{\frac{1}{2}}(y,y)^{\frac{1}{2}} + (y,y) \\ &= ((x,x)^{\frac{1}{2}} + (y,y)^{\frac{1}{2}})^2.\end{aligned}$$

□

Definition 1.1.2
Ein Vektorraum H mit Skalarprodukt heißt Hilbertraum, wenn H mit der vom Skalarprodukt induzierten Norm vollständig ist.

Beispiel 1.1.3

- l^2 ist Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$.
- $L^2(\Omega,\mu)$ ist Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $(x,y) = \int_\Omega x(t)y(t)d\mu(t)$.

Satz 1.1.4
Ein Vektorraum E ist normiert mit $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}^+$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent

1. $\exists (\cdot,\cdot) : E \times E \to \mathbb{R}\ \forall x \in E : (x,x)^{\frac{1}{2}} = \|x\|$
2. $\forall x,y \in E$ *gilt die Parallelogrammgleichung*

$$\frac{\|x-y\|^2 + \|x+y\|^2}{2} = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Bemerkung 1.1.5
Ist $(E, \|\cdot\|_E)$ vollständig normierter Raum, dann ist E Hilbertraum, wenn die Norm $\|\cdot\|_E$ die Parallelogrammgleichung erfüllt.

1.1.2 Orthogonale und orthonormale Folgen im Hilbertraum H

Definition 1.1.6
Eine Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in H heißt

1. orthogonal $\Longleftrightarrow (x_i,x_j) = 0\ \forall i \neq j$
2. orthonormal $\Longleftrightarrow (x_i,x_j) = \delta_{i,j}$

Bemerkung 1.1.7

1. $\forall x, y \in H : (x,y) = 0$ gilt $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
2. $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ orthonormal, dann gilt

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} a_n x_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2$$

3. Sei $T : H \to H$ linear, beschränkt und $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ orthonormal. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n T x_n \right\|^2 &= \left\| T(\sum_{n=1}^{N} a_n x_n) \right\|^2 \\ &\leq \|T\|^2 \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n x_n \right\|^2 \\ &= \|T\|^2 \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 \end{aligned}$$

Satz 1.1.8 (Gram-Schmidt'sches Orthonormalisierungsverfahren)
Sei H ein Hilbertraum und $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ linear unabhängig. Dann gilt

1. $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \alpha_{n,1}, \cdots \alpha_{n,n}\ \exists \beta_{n,1}, \cdots \beta_{n,n}$, *sodass*

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{n,i} x_i \qquad\qquad x_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_{n,i} u_i$$

2. $\forall m, n\, (u_m, u_n) = \delta_{m,n}$.

Beweis. Sei $n = 1$. Dann ist $u_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$. Sei nun $n = r-1$ und $u_1, \cdots, u_{r-1}$ gegeben. Sei

$$z_r = x_r - \sum_{j=1}^{r-1} (x_r, u_j) u_j \qquad r > 1.$$

Dann setzt man $u_r = \frac{z_r}{\|z_r\|}$. □

1.1.3 Vollständiges Orthonormalsystem (ONS) in H

Definition 1.1.9 (Abschluss)
Sei H ein Hilbertraum und $K \subseteq H$. Der Abschluss $\overline{K}^H$ von K in H ist folgendermaßen definiert:

$$z(\in H) \in \overline{K}^H :\Leftrightarrow\ \exists \text{ Folge } \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in K, \text{ sodass } \lim_{n\to\infty} \|z - y_n\|_H = 0.$$

Beispiel: $\overline{\mathbb{Q}}^{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$

Satz 1.1.10
Sei H ein seperabler Hilbertraum, d.h. es existiert eine Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, sodass

$$H = \overline{\operatorname{lin}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}^H.$$

Dann existiert ein ONS $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$, sodass für alle $x \in H$ gilt

$$\lim_{N\to\infty} \left\| x - \sum_{n=1}^{N} (x, u_n) u_n \right\| = 0.$$

Bemerkung 1.1.11
$\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ heißt **vollständiges ONS**.

Beweis. Man wähle eine Teilfolge $\{x_{n_k}\}$ von $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, sodass

1. $\operatorname{lin}\{x_{n_k}\} = \operatorname{lin}\{x_n\}$
2. $\{x_{n_k}\}$ ist linear unabhängig.

Auf die Teilfolge $\{x_{n_k}\}$ wendet man das Gram-Schmidt'sche Orthonormalisierungsverfahren an und erhält ein ONS $\{u_k : k \in \mathbb{N}\}$ für das gilt:

$$\operatorname{lin}\{u_k\} = \operatorname{lin}\{x_{n_k}\} = \operatorname{lin}\{x_n\}.$$

Man muss nun noch zeigen, dass sich jedes x darstellen lässt als $x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, u_n) u_n$. Es gilt natürlich

$$\overline{\operatorname{lin}\{u_k\}}^H = \overline{\operatorname{lin}\{x_n\}}^H.$$

Aus dem folgenden Satz erhält man dann die Aussage. □

Satz 1.1.12
Sei $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ein ONS in H. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $\forall x \in H : (\ \forall n \in \mathbb{N} : (x, e_n) = 0) \Rightarrow (x = 0)$.
2. $\overline{\operatorname{lin}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}^H = H$
3. $\forall x \in H : x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (x, e_n) e_n$
4. $\forall x \in H : \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n)^2$ ***(Parsevalsche Gleichung)***
5. $\forall x, y \in H : (x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n)(y, e_n)$

Beweis. Übung. □

1.1.4 Projektionssatz

Definition 1.1.13
Sei H ein Hilbertraum und $K \subseteq H$. Dann heißt die Menge

$$K^{\perp} = \{z \in H : (z, x) = 0 \ \ \forall x \in K\}$$

orthogonales Komplement von K in H.

Bemerkung 1.1.14

1. $K^{\perp} = \bigcap_{x \in K} \{z \in H : (z, x) = 0\}$.
2. $K^{\perp}$ ist eine abgeschlossene Menge. (Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.)
3. $K^{\perp}$ ist linearer Teilraum von H.

Satz 1.1.15 (Projektionssatz)
Sei H ein Hilbertraum und $K \subseteq H$ abgeschlossener Teilraum. Dann gilt:

$$\forall z \in H \ \exists! x \in K \ \exists! y \in K^{\perp} : z = x + y$$

und

$$\|z\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Beweis. Sei $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ ein ONS in K und $\overline{\text{lin}\{u_n\}}^H = K$. Sei $z \in H$,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (z, u_n) u_n$$

und $y = z - x$. Zu zeigen ist nun:

1. $y \in K^{\perp}$
2. Eindeutigkeit von $z = x + y$

Wir beginnen mit 1. Es gilt

$$(y, u_n) = (z - x, u_n) = (z, u_n) - (x, u_n) = 0.$$

Somit ist $y \perp \text{lin}\{u_n\} \Leftrightarrow y \perp \overline{\text{lin}\{u_n\}}^H \Leftrightarrow y \perp K \Leftrightarrow y \in K^{\perp}$. Somit ist die Existenz eines solchen $y \in K^{\perp}$ gezeigt.

Wir zeigen nun 2. Seien $x' \in K$ und $y' \in K^{\perp}$, sodass $z = x' + y'$. Zu zeigen ist, dass $x' = x$ und somit $y' = y$. Es gilt

$$(x', u_n) = (z, u_n) \ \ \forall \ n \in \mathbb{N},$$

da $y' \in K^{\perp}$ und $\overline{\text{lin}\{u_n\}}^H = K$. Natürlich gilt auch

$$(x, u_n) = (z, u_n) \ \ \forall \ n \in \mathbb{N}$$

also

$$(x, u_n) = (x', u_n) \ \ \forall \ n \in \mathbb{N}$$

und somit $x' = x$. $\square$

Definition 1.1.16
Die Abbildung $P_K : H \to K$ gegeben durch $P_K z = x$ bezeichnet man als **orthogonale Projektion** auf K.

Satz 1.1.17
Die Abbildung P_K erfüllt folgende Eigenschaften:

1. $P_K \in L(H)$, *d.h. linear und stetig*
2. $P_K^2 = P_K$
3. *Falls* $K \neq \{0\}$, *dann ist* $\|P_K\| = 1$

Beweis. Übung. □

1.1.5 Satz von Fischer-Riesz

Definition 1.1.18
Sei X normierter Raum. Der Raum

$$L(X, \mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R}, \text{linear und stetig}\}$$

heißt **Dualraum von** X und wird mit X' bezeichnet. X' versehen mit der Norm

$$\left\|x'\right\|_{X'} = \sup\{\left|x'(x)\right| : \|x\|_X \leq 1\}$$

ist ein Banachraum.

Der folgende Satz von Fischer-Riesz gibt nun Auskunft über den Dualraum eines Hilbertraums H. Und zwar ist H isometrisch isomorph zu seinem Dualraum H' bezüglich der Abbildung:

$$\begin{aligned} H &\to H' \\ y &\mapsto (\cdot, y) \end{aligned}$$

Satz 1.1.19 (Fischer-Riesz)
Sei H seperabler Hilbertraum. Dann gilt

$$\forall\, f \in H' \; \exists! y \in H \;\; \forall x \in H : f(x) = (x, y)$$

und $\|f\|_{H'} = \|y\|_H$.

Beweis. Sei

- $f \neq 0 \in H'$,
- $K = \ker f$,
- $\widetilde{y} \in K^\perp$, sodass $\|\widetilde{y}\|_H = 1$,
- $y = f(\widetilde{y})\widetilde{y}$.

K ist abgeschlossen, da f stetig ist. $\dim K^\perp = 1$ (lineare Algebra) und somit

$$K^\perp = \{\lambda \widetilde{y} : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Sei $x \in H$ beliebig, gegeben durch $x = \lambda\widetilde{y} + z$, $z \in K$.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\lambda\widetilde{y} + z) = \lambda f(\widetilde{y}) + 0 = \lambda f(\widetilde{y}) \\ (x, y) &= (\lambda\widetilde{y} + z, f(\widetilde{y})\widetilde{y}) = \lambda f(\widetilde{y})(\widetilde{y}, \widetilde{y}) + f(\widetilde{y})(z, \widetilde{y}) = \lambda f(\widetilde{y}). \end{aligned}$$

Somit gilt $f(x) = (x, y) \;\; \forall x \in H$.
Wir zeigen nun Eindeutigkeit von y. Seien $w, v \in H$, sodass

$$f(x) = (w, x) = (v, x) \qquad \forall\, x \in H$$

Dann gilt

$$(w, x) - (v, x) = 0 \qquad \forall\, x \in H \qquad \Leftrightarrow w - v = 0.$$

Sei

$$B_H := \{x \in H : \|x\|_H \leq 1\}$$

die Einheitskugel in H. Es gilt:

$$\begin{aligned} \|f\|_{H'} &= \sup\{|f(x)| : x \in B_H\} = \sup\{|f(x)| : \|x\| = 1\} \\ &= \sup\{|(x, y)| : \|x\| = 1\} \geq (\frac{y}{\|y\|}, y) = \|y\|_H \\ \|f\|_{H'} &= \sup\{|(x, y)| : \|x\| \leq 1\} \leq \sup\{\|x\|\|y\| : \|x\| \leq 1\} \leq \|y\|_H. \end{aligned}$$

□

1.1.6 Operatoren auf Hilberträumen

Definition 1.1.20
Eine stetige lineare Abbildung zwischen normierten Räumen heißt stetiger **Operator**. Ist der Bildraum der Skalarenkörper (in unserem Fall $\mathbb{R}$), sagt man **Funktional** statt Operator.

Bemerkung 1.1.21
Ein stetiger Operator $T : X \to Y$ erfüllt also eine der äquivalenten Bedingungen:

(i) Falls $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, dann gilt $\lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx$.

(ii) Für alle $x_0 \in X$ und alle $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\|x - x_0\| \leq \delta \qquad \Rightarrow \qquad \|Tx - Tx_0\| \leq \epsilon$$

(iii) Für alle offenen $O \subset Y$ ist $T^{-1}(O) = \{x \in X : Tx \in O\}$ offen in X.

Definition 1.1.22
Seien H_1, H_2 Hilberträume. Der Raum

$$L(H_1, H_2) = \{T : H_1 \to H_2, \text{linear und stetig}\}$$

ist der Raum der linearen und stetigen Operatoren von H_1 nach H_2. Der Raum $L(H_1, H_2)$ ist durch die Operatornorm

$$\|T\|_{H_1 \to H_2} = \sup_{\|x\|_{H_1} \leq 1} \|Tx\|_{H_2}$$

normiert.

Definition 1.1.23
Sei $T : H_1 \to H_2$ ein linearer, stetiger Operator. Dann ist

$$T^* : H_2 \to H_1$$

der **adjungierte Operator** zu T, gegeben durch

$$\forall x \in H_2 \ \forall y \in H_1 \ (T^* x, y) = (x, Ty).$$

Satz 1.1.2

1. *T^* ist wohldefiniert*

2. $\|T^*\| = \|T\|$

Beweis. 1. Die Existenz und Eindeutigkeit eines solchen Operators sind zu zeigen. Um die Existenz zu zeigen, muss man zeigen, dass für jedes $y \in H_1$ ein $z \in H_2$ existiert, sodass

$$(z, x) = (Ty, x) \ \forall x \in H_2.$$

Für ein fixes $x \in H_2$ ist

$$\Phi_y(x) := (Ty, x)$$

ein lineares, stetiges Funktional auf H_2. Somit erhält man aus dem Satz von Fischer-Riesz, dass ein eindeutiges Element $z \in H_2$ existiert, sodass $(z, x) = \Phi_y(x)$. Man setze $z = Ty$. Um die Eindeutigkeit zu zeigen, seien T_1^* und T_2^* zwei Operatoren, sodass

$$\forall x \in H_2 \ \forall y \in H_1 \ (T_1^* x, y) = (x, Ty) = (T_2^* x, y).$$

Dann gilt

$$\forall x \in H_2 \ \forall y \in H_1 \ (T_1^* x, y) - (T_2^* x, y) = 0.$$

Und somit $T_1^* = T_2^*$.

2.

$$\begin{aligned}
\|T^*x\| &= \sup\{|(T^*x,y)| : \|y\|_{H_1} \le 1\} \\
&= \sup\{|(x,Ty)| : \|y\|_{H_1} \le 1\}. \\
\|T^*\| &= \sup_x\{\|T^*x\| : \|x\|_{H_2} \le 1\} \\
&= \sup_x \sup_y\{|(x,Ty)| : \|x\|_{H_2} \le 1, \|y\|_{H_1} \le 1\} \\
&= \sup_y \sup_x\{|(x,Ty)| : \|x\|_{H_2} \le 1, \|y\|_{H_1} \le 1\} \\
&= \sup_y\{\|Ty\| : \|y\|_{H_1} \le 1\} \\
&= \|T\|.
\end{aligned}$$

□

Definition 1.1.24
Sei H ein Hilbertraum $T : H \to H$ ist selbstadjungiert (s.a.), genau dann wenn $T = T^*$, d.h. genau dann wenn

$$\forall\, x, y \in H : (Tx, y) = (x, Ty).$$

Satz 1.1.3

1. *S, T s.a. Dann gilt: $\forall \mu, \lambda \in \mathbb{R} : \lambda T + \mu S$ ist s.a.*
2. *$(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$*
3. *S, T s.a. Dann gilt: $S \circ T$ s.a. $\Leftrightarrow S \circ T = T \circ S$.*

Beweis.

1. Übung.
2. Übung.
3. Es gilt für alle $x, y \in H$

$$(STx, y) = (Tx, Sy) = (x, TSy)$$

aufgrund der Selbstadjungiertheit von S und T. Somit gilt $(ST)^* = TS$. Ist nun ST selbstadjungiert, so gilt

$$TS = (ST)^* = ST.$$

Gilt andererseits $TS = ST$. Dann erhält man aus 2. und der Selbstadjungiertheit von S und T:

$$ST = S^*T^* = (TS)^* = (ST)^*.$$

und somit ist ST selbstadjungiert.

□

Satz 1.1.25
$S : H \to H$ s.a. Dann gilt

$$\sup_x \sup_y \{|(Sx, y)| : \|x\| \le 1, \|y\| \le 1\} = \sup_x \{|(Sx, x)| : \|x\| \le 1\}$$

Beweis. Es gilt

$$\|S\| = \sup_x \sup_y \{|(Sx, y)| : \|x\| \le 1, \|y\| \le 1\}.$$

Setze

$$K := \sup_x \{|(Sx, x)| : \|x\| \le 1\}$$

Es gilt immer $K \le \|S\|$. Wir zeigen nun $\|S\| \le K$. Sei $y \in H$. Es gilt

$$|(Sy, y)| \le K\|y\|^2, \tag{1.1.1}$$

weil $\left|\left(S\frac{y}{\|y\|}, \frac{y}{\|y\|}\right)\right| \le K$. Sei $x \in H$, $Sx \ne 0$, $\lambda^2 = \frac{\|x\|}{\|Sx\|}$.

$$\begin{aligned}
\|Sx\|^2 &= (Sx, Sx) = (S^2x, x) \\
&= \frac{1}{4}\left\{\left(S(\lambda Sx + \frac{x}{\lambda}), \lambda Sx + \frac{x}{\lambda}\right) - \left(S(\lambda Sx - \frac{x}{\lambda}), \lambda Sx - \frac{x}{\lambda}\right)\right\} \\
&\le \frac{K}{4}\left\{\left\|\lambda Sx + \frac{x}{\lambda}\right\|^2 + \left\|\lambda Sx - \frac{x}{\lambda}\right\|^2\right\} \\
&= \frac{2K}{4}\left\{\frac{\left\|\lambda Sx + \frac{x}{\lambda}\right\|^2 + \left\|\lambda Sx - \frac{x}{\lambda}\right\|^2}{2}\right\} \\
&= \frac{2K}{4}\left\{\|\lambda Sx\|^2 + \left\|\frac{x}{\lambda}\right\|^2\right\} \\
&= \frac{2K}{4}\{\|x\|\|Sx\| + \|x\|\|Sx\|\} \\
&= K\|Sx\|\|x\|.
\end{aligned}$$

Die Gleichheit in der zweiten Zeile kann für jedes λ durchgeführt werden. Die Ungleichung in der 3. Zeile erhält man aus der Ungleichung (1.1.1). In der 5. Zeile verwendet man die Parallelogrammgleichung und in der 6. Zeile setzt man $\lambda^2 = \frac{\|x\|}{\|Sx\|}$ ein.

Man erhält:

$$\begin{aligned}
&\|Sx\|^2 \le K\|Sx\|\|x\| \Leftrightarrow \\
&\|Sx\| \le K\|x\| \Leftrightarrow \\
&\|S\| \le K.
\end{aligned}$$

□

1.1.7 Kompakte Operatoren

Definition 1.1.26 (Kompakte Menge)
Sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein normierter Raum. $M \subseteq E$ heißt kompakt (folgenkompakt), genau dann wenn jede Folge in M eine konvergente Teilfolge besitzt. M heißt überdeckungskompakt, falls zu jeder offenen Überdeckung von M eine endliche Teilüberdeckung existiert.

Definition 1.1.27 (Kompakter Operator)
Seien E, F Banachräume. Sei $T : E \to F$ linear und stetig. T ist kompakt, genau dann wenn zu jeder beschränkten Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in E eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ existiert, sodass $(Tx_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ konvergiert in F.

Satz 1.1.28
Seien E, F Banachräume. $T_n \in L(E, F)$ kompakt. $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchyfolge in $L(E, F)$. Dann existiert ein Operator $T : E \to F \in L(E, F)$, sodass

1. $\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\|_{L(E,F)} = 0$
2. *T ist kompakter Operator.*

Beweisskizze. Da F vollständig normierter Raum ist, ist auch $L(E, F)$ vollständig normierter Raum (Beweis: Übung). (T_n) ist Cauchyfolge in $L(E, F)$, d.h.

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall m, n > N : \|T_n - T_m\| < \epsilon.$$

Die Cauchyfolge hat aufgrund der Vollständigkeit einen Grenzwert in $L(E, F)$. Somit existiert ein $T \in L(E, F)$, sodass 1. erfüllt ist.

2. zeigt man mittels Cantor'schem Diagonalisierungsverfahren. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{\substack{x\in E \\ \|x\|\le 1}} \|Tx - T_n x\| \right) = 0. \tag{1.1.2}$$

Man wähle eine Folge (x_n) in E, sodass $\|x_n\|_E \le 1$. Zu zeigen ist nun, dass eine Teilfolge (x_{n_k}) existiert, sodass (Tx_{n_k}) konvergiert in F. Wir wissen, dass $T_1, T_2, T_3, \cdots$ sind kompakt, d.h.

$$\begin{aligned}
&\exists (x_{n_1(k)}) \text{ Teilfolge von } (x_n) : T_1 x_{n_1(k)} \text{ konvergent} \\
&\exists (x_{n_2(k)}) \text{ Teilfolge von } (x_{n_1(k)}) : T_2 x_{n_2(k)} \text{ konvergent} \\
&\exists (x_{n_3(k)}) \text{ Teilfolge von } (x_{n_2(k)}) : T_3 x_{n_3(k)} \text{ konvergent} \\
&\quad\quad . \\
&\quad\quad . \\
&\exists (x_{n_j(k)}) \text{ Teilfolge von } (x_{n_{j-1}(k)}) : T_j x_{n_j(k)} \text{ konvergent} \\
&\quad\quad . \\
&\quad\quad .
\end{aligned}$$

Wir wählen nun die Diagonalfolge $(x_{n_k(k)})_{k=1}^{\infty}$ und zeigen $Tx_{n_k(k)}$ ist konvergent. Es gilt

1. $\forall l \ \forall m > l \ n_l(m) \le n_m(m)$ (Aufgrund der Wahl der Teilfolgen)
2. $\forall \epsilon > 0 \ \exists l_0 \ \forall l > l_0 \ \sup_{\substack{x\in E \\ \|x\|\le 1}} \|T_l x - Tx\| < \epsilon$ wegen (1.1.2)
3. $\forall \epsilon > 0 \ \exists m_0 \ \forall r, s > m_0 > l_0 \ \left\|T_l x_{n_l(r)} - T_l x_{n_l(s)}\right\| < \epsilon$ ($T_l x_{n_l(k)}$ ist konvergent.)

Zu zeigen ist nun, dass die Folge $(Tx_{n_r(r)})_{r=1}^{\infty}$ eine Cauchyfolge in F ist und somit einen Grenzwert in F hat.

$$\begin{aligned}\left\|Tx_{n_r(r)} - Tx_{n_s(s)}\right\| &\leq \left\|(T-T_l)x_{n_r(r)}\right\| + \left\|(T_l - T)x_{n_s(s)}\right\| + \left\|T_l(x_{n_r(r)} - x_{n_s(s)})\right\| \\ &< \epsilon + \epsilon + \epsilon = 3\epsilon.\end{aligned}$$

Die erste und die zweite Norm sind wegen 2. kleiner als ϵ und die dritte Norm ist wegen 3. kleiner als ϵ. □

Beispiel 1.1.29
Sei

$$\begin{aligned}H = l^2 &:= \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R}, \|x\|_{l^2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\} \\ y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Folge in } l^{\infty} &:= \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R}, \|x\|_{l^\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |y_n| < \infty \right\}.\end{aligned}$$

Sei der Multiplikationsoperator M_y gegeben durch

$$\begin{aligned}M_y : l^2 &\to l^2 \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} &\mapsto (y_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}.\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\|M_y x\|_{l^2} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} (y_n x_n)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |y_n| \left(\sum_{n=1}^{\infty} (x_n)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|y\|_{l^\infty} \|x\|_{l^2}.\end{aligned}$$

Somit ist der Multiplikationsoperator beschränkt mit $\|y\|_{l^\infty}$, d.h.

$$\|M_y\|_{l^2} \leq \|y\|_{l^\infty}.$$

Der Multiplikationsoperator bildet die Einheitsvektoren $e_i = \{0, 0, 0, \cdots, 1, 0, 0, \cdots, 0\}$, wobei 1 an der i-ten Stelle steht, auf den Vektor $y_i = \{0, 0, 0, \cdots, y_i, \cdots, 0, 0, 0\}$ ab. Damit gilt

$$\begin{aligned}\|M_y\|_{l^2} &= \sup\{\|M_y x\| : \|x\|_{l^2} \leq 1\} \\ &\geq \sup_i\{\|M_y e_i\|\} \\ &= \sup_i |y_i| = \|y\|_{l^\infty}.\end{aligned}$$

Also erhält man

$$\|M_y\|_{l^2} \geq \|y\|_{l^\infty}.$$

Satz 1.1.30
$M_y : l^2 \to l^2$ ist kompakt $\Longleftrightarrow \lim_{i\to\infty} y_i = 0$

Beweis. Die wichtige Implikation ist $\Leftarrow$. Sei $y^k = (y_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $y^k = (y_1, y_2, \cdots, y_k, 0, \cdots, 0)$ und somit $y - y^k = (0, \cdots, 0, y_{k+1}, \cdots)$. Es gilt

$$(M_y - M_{y^k})x = M_{y-y^k}x \Rightarrow \left\|(M_y - M_{y^k})x\right\| \leq \|y - y^k\|_{l^\infty}\|x\|_{l^2}.$$

Da $\lim_{k\to\infty} \left\|y - y^k\right\|_{l^\infty} = 0$ erhält man

$$\lim_{k\to\infty} \left\|M_y - M_{y^k}\right\| = 0;$$

Was ist nun $(M_{y^k})(x)$?

$$(M_{y^k})(x) = (x_1y_1, x_2y_2, \cdots, x_ky_k, 0, \cdots, 0\cdots)$$

und somit $\dim (M_{y^k})x \leq k$. Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in der Einheitskugel B_{l^2}, d.h $\|(z_n)\|_{l^2} \leq 1$. Dann gilt

$$\left\|M_{y^k}(z_n)\right\| \leq \left\|y^k\right\|_{l^\infty}.$$

Da $\dim M_{y^k}(l^2) \leq k$ existiert eine Teilfolge (z_{n_l}), sodass $(M_{y^k}(z_{n_l}))_{l=1}^\infty$ konvergent ist. Somit ist M_{y^k} kompakt. Aus dem vorhergehenden Satz erhält man dann, dass M_y kompakt ist. □

Bemerkung 1.1.31

- M_y ist selbstadjungiert. Sei $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in l^∞. Dann gilt für alle $x, z \in l^2$

$$(M_yx, z) = \sum_{n=1}^\infty (x_ny_n)z_n = \sum_{n=1}^\infty x_n(y_nz_n) = (x, M_yz).$$

- M_y entspricht einer Diagonalmatrix, wobei genau y in der Diagonale steht.
- Ein kompakter Operator wird verifiziert, indem man eine Folge von Operatoren mit endlichem Bildraum (und somit kompakte Operatoren) findet, die gegen den zu untersuchenden Operator konvergiert.

1.2 Spektralsatz - kompakte, s.a. Operatoren

Satz 1.2.1 (Spektralsatz)
Sei H ein separabler Hilbertraum mit dem inneren Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und $S : H \to H$ ein kompakter, selbstadjungierter Operator. Dann existiert ein Orthonormalsystem $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ in H und eine Folge reeller Zahlen $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$, sodass gilt:

1. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $Sx_n = \lambda_nx_n$.*
2. $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.
3. *Ist $z \in \overline{\mathrm{lin}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$, so gilt $Sz = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n\langle z, x_n\rangle x_n$.*

4. *Ist* $z \in \overline{\operatorname{lin}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}^{\perp}$, *so gilt* $Sz = 0$.

Bemerkung 1.2.2
Ist $K \subseteq H$ abgeschlossen, dann gilt $H = K \oplus K^{\perp}$ (Projektionssatz). Somit gilt

$$H = \overline{\operatorname{lin}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}} \oplus \overline{\operatorname{lin}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}^{\perp} =: K \oplus K^{\perp}$$
$$w \in K \Leftrightarrow w = \sum_{n=1}^{\infty} (w, x_n) x_n$$
$$\Rightarrow Sw = \sum_{n=1}^{\infty} (w, x_n) \lambda_n x_n$$

Andererseits gilt $v \in K^{\perp} \Rightarrow Sv = 0$. Auf der linearen Hülle $\overline{\operatorname{lin}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$ wirkt der Operator als Multiplikator und auf dem Rest macht er alles zu 0.

Beweis. **1.Teil:** Den ersten Teil der Aussage zeigt man mittels Induktion über n. Wir zeigen zuerst:

$$\exists x_1 \in H : \|x_1\| = 1,\ \exists \lambda_1 \in \mathbb{R} : \ Sx_1 = \lambda_1 x_1 \text{ und } |\lambda_1| = \|S\|.$$

Es gilt
$$\|S\| = \sup_x \{|(Sx, x)| : \|x\| = 1\} = \sup_x \sup_{\varepsilon \in \{-1,1\}} \{\varepsilon(Sx, x) : \|x\| = 1\}.$$

Wir nehmen o.B.d.A. an, dass $\varepsilon = 1$. Sei $\lambda = \|S\|$. Wir bestimmen eine Folge $(z_n) \in H$, sodass $\|z_n\| = 1$ und $(Sz_n, z_n) > \|S\| - \frac{1}{n}\|S\| = \lambda(1 - 1/n)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|Sz_n - \lambda z_n\|_H^2 &= (Sz_n, Sz_n) - 2\lambda(Sz_n, z_n) + \lambda^2(z_n, z_n) \\
&\leq \|Sz_n\|^2 - 2\lambda^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \lambda^2 \\
&\leq \|S\|^2\|z_n\|^2 - 2\lambda^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \lambda^2 \\
&= \lambda^2 - 2\lambda^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \lambda^2
\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\|Sz_n - \lambda z_n\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{1.2.1}$$

Da S kompakt ist existiert eine Teilfolge (z_{n_k}) von (z_n), sodass Sz_{n_k} konvergent. Zusammen mit (1.2.1) erhält man, dass (z_{n_k}) konvergiert und wir setzen $y = \lim_{k\to\infty} z_{n_k}$.

$$S(\lim z_{n_k}) = \lambda \lim z_{n_k},$$

weil

$$\begin{aligned}
\|S(\lim z_{n_k}) - \lambda \lim z_{n_k}\| &= \|\lim(Sz_{n_k} - \lambda z_{n_k})\| \\
&= \lim \|Sz_{n_k} - \lambda z_{n_k}\| = 0.
\end{aligned}$$

Somit existiert ein $y \in H$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass $\|y\| = 1$, $|\lambda| = \|S\|$ und $Sy = \lambda y$. Wir nehmen nun an es existieren $x_1, \cdots, x_n$ und $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, sodass

1. $x_n \perp \operatorname{lin}\{x_1, \cdots, x_{n-1}\}$
2. $|\lambda_n| \leq |\lambda_{n-1}|$
3. $Sx_n = \lambda_n x_n$.

Wir setzen $R_n(\cdot) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i(\cdot, x_i)$ und $S - R_n = T_n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \forall z \in \operatorname{lin}\{x_1, \cdots, x_n\}: \;\; & S(z) = R_n(z), T_n(z) = 0 \\ \forall z \in \operatorname{lin}\{x_1, \cdots, x_n\}^\perp: \;\; & S(z) = T_n(z), R_n(z) = 0. \end{aligned}$$

Auf $\operatorname{lin}\{x_1, \cdots, x_n\}^\perp$ ist T_n s.a. und kompakt, somit folgt aus dem Induktionsanfang, dass ein λ_{n+1} und ein x_{n+1} existieren, sodass

1. $T_n x_{n+1} = \lambda_{n+1} x_{n+1}$
2. $x_{n+1} \in \operatorname{lin}\{x_1, \cdots, x_n\}^\perp$
3. $|\lambda_{n+1}| = \|T_n\|$
4. $|\lambda_{n+1}| \leq |\lambda_n|$.

Der 4. Punkt folgt daraus, dass $\|T_n\| \leq \|T_{n-1}\|$,

$$\|T_n\| = \left\| Sx - \sum_{i=1}^n \lambda_i(\cdot, x_i)x_i \right\| \leq \left\| Sx - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i(\cdot, x_i)x_i \right\| = \|T_{n-1}\|.$$

2. Teil: Wir beweisen nun die zweite Aussage des Satzes: Wir nehmen an, dass $|\lambda_i|$ nicht gegen 0 konvergiert, d.h. es existiert ein $\lambda \neq 0$, sodass $|\lambda_i| \to \lambda$. Dann ist die Folge $\{\frac{x_n}{\lambda_n} : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt in H. Es gilt $Sx_n = \lambda_n x_n$ und somit

$$S\left(\frac{x_n}{\lambda_n}\right) = x_n. \tag{1.2.2}$$

S ist kompakt, also existiert eine Teilfolge (x_{n_k}/λ_{n_k}) von (x_n/λ_n), sodass $(S(x_{n_k}/\lambda_{n_k}))$ konvergiert in H. Dann gilt aufgrund von (1.2.2) aber auch, dass (x_{n_k}) konvergiert. Da aber (x_{n_k}) ein ONS in H bildet und kein ONS eine konvergente Teilfolge enthält, muss gelten

$$|\lambda_i| \to 0.$$

Wir zeigen: Kein ONS $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ enthält eine konvergente Teilfolge:

$$\begin{aligned} \|z_n - z_m\| &= (z_n - z_m, z_n - z_m)^{\frac{1}{2}} = ((z_n, z_n) + (z_m, z_m) - 2(z_n, z_m))^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

3. und 4. Teil: Wir beweisen nun die 3. und 4. Aussage des Satzes mit Hilfe von Aussage 2. Sei

$$\begin{aligned} H_\infty &= \overline{\operatorname{lin}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}} \text{ und} \\ H_\infty^\perp &= H_0 \end{aligned}$$

Somit gilt $H = H_\infty \oplus H_0$. Sei $z \in H_\infty$, d.h.

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} (z, x_n) x_n.$$

Dann gilt aufgrund der Linearität von S und Aussage 1. des Spektralsatzes

$$Sz = \sum_{n=1}^{\infty} (z, x_n) S x_n = \sum_{n=1}^{\infty} (z, x_n) \lambda x_n.$$

Zu zeigen ist nun noch

$$\forall x \in H_0 : \ S(x) = 0.$$

Wir nehmen an, dass $S|_{H_0} \neq 0$, d.h.

$$T_\infty x = Sx - \sum_{n=1}^{\infty} (x, x_n) \lambda_n x_n$$

erfüllt $\|T_\infty x\| \neq 0$. Andererseits gilt $\forall n \in \mathbb{N}$ $\|T_\infty\| \leq \|T_n\|$, $|\lambda_n| = \|T_n\|$ und $\lim |\lambda_n| = 0$. Somit erhält man $T_\infty = 0$ und das ist ein Widerspruch zu $S|_{H_0} \neq 0$. □

1.2.1 Courant'sches Min-Max Pinzip

Wir behandeln nun drei Folgerungen des Spektralsatzes, bzw. des Beweises des Spektralsatzes. Mit Hilfe dieser Sätze erhält man Aussagen über den r-ten positiven Eigenwert eines s.a. kompakten Operators.

Satz 1.2.3
Sei $\alpha > 0$, $r \in \mathbb{N}$, H seperabler Hilbertraum und $A : H \to H$ ein s.a. und kompakter Operator. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. *Es gibt mindestens r Eigenwerte von A, die größer gleich α sind.*
2. *Es existiert ein Teilraum $F \subseteq H$ mit $\dim F = r$, sodass*

$$\forall x \in F \ (Ax, x) \geq \alpha(x, x).$$

Beweis. Wir beginnen mit 1. ⇒ 2. Seien $u_1, \cdots, u_r$ Eigenwerte von A, die größer gleich α sind und $\mu_1, \cdots, \mu_r$ die zugehörigen Eigenvektoren, diese bilden ein ONS. Es gilt

$$x = \sum_{i=1}^{r} \gamma_i u_i \in \operatorname{lin}\{u_1, \cdots, u_r\} \subseteq H.$$
$$Ax = \sum_{i=1}^{r} \mu_i \gamma_i u_i \in \operatorname{lin}\{u_1, \cdots, u_r\} \subseteq H.$$
$$(Ax, x) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i \gamma_i^2 \geq \alpha \sum_{i=1}^{r} \gamma_i^2 = \alpha(x, x).$$

Somit folgt mit $F := \operatorname{lin}\{u_1, \cdots, u_r\}$, dass

$$\forall x \in F \; (Ax, x) \geq \alpha(x, x).$$

Nun zeigen wir 2. $\Rightarrow$ 1. Sei $\dim F = r$, dann existieren $y_1, \cdots, y_n \in F$ linear unabhängig, sodass $F = \operatorname{lin}\{y_1, \cdots, y_n\}$. Es gilt $\forall x \in F : \; (Ax, x) \geq \alpha(x, x)$. Annahme: Es gibt nur $q < r$ Eigenwerte $\geq \alpha$. Diese seien $\mu_1, \cdots, \mu_q$. Es gelte:

$$\exists \delta > 0 \; \forall n > q : \; \mu_n < \alpha - \delta.$$

Wir bestimmen nun $(\eta_1, \cdots, \eta_r) \neq 0$, als Lösung des homogenen, linearen Gleichungssystems

$$\sum_{s=1}^{r} \eta_s (y_s, u_k) = 0, \;\; k = 1, \cdots, q,$$

wobei u_k Eigenvektor zum Eigenwert μ_k. Man beachte, dass man mehr Unbekannte als Gleichungen hat, weil $r > q$. Sei $z \neq 0 \in F$, $z = \sum_{s=1}^{r} \eta_s y_s$. Es gilt

$$(z, u_k) = \sum_{s=1}^{r} \eta_s (y_s, u_k) = 0 \quad \forall k \in \{1, \cdots, q\}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\alpha(z, z) \leq (Az, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (z, u_n)^2 \\
&= \sum_{n=q+1}^{\infty} \mu_n (z, u_n)^2 \\
&< (\alpha - \delta) \sum_{n=q+1}^{\infty} (z, u_n)^2 \\
&\leq (\alpha - \delta)(z, z).
\end{aligned}$$

Nachtrag: Sei $z \in H$, $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ Eigenvektoren von A. Diese bilden ein ONS (nicht vollständig). Sei

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} (z, u_n) u_n + z_0, \;\; z_0 \in \operatorname{lin}\{u_n : n \in \mathbb{N}\}^{\perp}.$$

Es gilt

$$(z, z) = \sum_{n=1}^{\infty} (z, u_n)^2 + \|z_0\|^2,$$

$$\|z\|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} (z, u_n)^2.$$

$$
\begin{aligned}
Az &= A\left(\sum_{n=1}^{\infty}(z,u_n)u_n + z_0\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(z,u_n)Au_n + Az_0, \qquad\qquad Az_0 = 0 \text{ wegen Spektralsatz 4.}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(z,u_n)\mu_n u_n.\\
(Az,z) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}(z,u_n)\mu_n u_n, \sum_{n=1}^{\infty}(z,u_n)u_n + z_0\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(z,u_n)^2\mu_n.
\end{aligned}
$$

□

Satz 1.2.4 (Max-Min Prinzip)
Sei $A : H \to H$ s.a. und kompakt. Seien $\mu_1^+ > \mu_2^+ > \mu_3^+ > \cdots > 0$ die positiven Eigenwerte von A und $u_1^+, u_2^+, u_3^+, \cdots$ die zugehörigen Eigenvektoren. Dann gilt für den r-ten positiven Eigenwert:

$$
\mu_r^+ = \max_{\substack{F\subseteq H, \dim F = r\\ \forall x\in F (Ax,x)>0}} \min_{x\in F} \frac{(Ax,x)}{(x,x)} \qquad\qquad (:= RS)
$$

Bemerkung 1.2.5
Das Maximum wird für $F = \operatorname{lin}\{u_1^+, \cdots, u_r^+\}$ realisiert.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $RS \geq \mu_r^+$. Die Eigenvektoren $\{u_1^+, \cdots, u_r^+\}$ sind linear unabhängig. $F = \operatorname{lin}\{u_1^+, \cdots, u_r^+\}$, $\dim F = r$. Dann gilt für alle $x \in F$

$$
\begin{aligned}
(Ax,x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^+(x,u_n^+)^2\\
&\geq \mu_r^+\sum_{n=1}^{r}(x,u_n^+)^2\\
&= \mu_r^+(x,x).
\end{aligned}
$$

Somit gilt $\min_{x\in F}\frac{(Ax,x)}{(x,x)} \geq \mu_r^+$ für das speziell gewählte F und somit gilt

$$
\mu_r^+ \leq \max_{\substack{F\subseteq H, \dim F = r\\ \forall x\in F (Ax,x)>0}} \min_{x\in F} \frac{(Ax,x)}{(x,x)}.
$$

Wir zeigen nun $\mu_r^+ \geq RS$. Wir lösen das Supremum auf: Sei $\epsilon > 0$, $F \subseteq H$, $\dim F = r$ und $\min_{x\in F}\frac{(Ax,x)}{(x,x)} \geq RS - \epsilon$. Somit gilt $\forall x \in F$

$$
(Ax,x) \geq (x,x)(RS - \epsilon).
$$

Aufgrund des vorhergehenden Satzes existieren r Eigenwerte, die größer gleich $(RS - \epsilon)$ sind. Somit ist $\mu_r^+ \geq RS - \epsilon$. Diese Aussage gilt für alle $\epsilon > 0$ und man erhält

$$\mu_r^+ \geq RS.$$

$\square$

Satz 1.2.6
Sei $A : H \to H$ s.a. und kompakt und es gelte:

$$(Ax, x) > 0 \ \ \forall x \in H. \text{ (A hat also nur positive Eigenwerte.)}$$

Seien $\mu_1^+ > \mu_2^+ > u_3^+ > \cdots > 0$ die Eigenwerte von A und $u_1^+, u_2^+, \mu_3^+, \cdots$ die zugehörigen Eigenvektoren. Dann gilt

$$\mu_r^+ = \min_{\substack{F \subset H \\ \dim F = r-1}} \sup_{x \in F^\perp} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}.$$

Bemerkung 1.2.7

1. Das Minimum wird für $F = \text{lin}\{u_1^+, \cdots, u_{r-1}^+\}$ realisiert.

2. Aus $(Ax, x) > 0 \ \forall x \in H$ folgt, dass A nur positive Eigenwerte hat. Falls $\forall x \in H : \ (Ax, x) > 0$ und $y \neq 0$ der Eigenvektor von A zu gegebenem Eigenwert λ, dann gilt $Ay = \lambda y$. Weiters gilt

   $$(Ay, y) = (\lambda y, y) = \lambda(y, y).$$

   Da $(Ay, y) > 0$ und $(y, y) > 0$ gilt $\lambda > 0$.

1.3 Sturm-Liouville Eigenwertproblem

Sei:

- $\Omega = [a, b]$
- $p \in C^1(\Omega)$ und $p > 0$ auf Ω
- $q \in C(\Omega)$
- $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ reelle Vektoren

Es seien die folgenden Randbedingungen gegeben:

$$R_1 x = \alpha_1 x(a) + \alpha_2 x'(a)$$
$$R_2 x = \beta_1 x(b) + \beta_2 x'(b).$$

Wir betrachten den folgenden Differentialoperator 2.Ordnung in Divergenzform, den sogenannten **Sturm-Liouville Operator**:

$$L : C^2(\Omega) \to C(\Omega)$$
$$x \mapsto (px')' + qx$$

Weiters betrachten wir das folgende Differentialgleichungsproblem: Gegeben sei $y \in C(\Omega)$, gesucht sei $x \in C^2(\Omega)$, sodass

$$\begin{aligned} Lx &= y \\ R_1(x) &= R_2(x) = 0 \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

Wir definieren nun das **Sturm-Liouville Eigenwertproblem** (S.L. EW-Problem): Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert ein $x \in C^2(\Omega)$, sodass

$$Lx - \lambda x = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad Lx = \lambda x \tag{1.3.2}$$

unter den gegebenen Randbedingungen:

$$R_1 x = R_2 x = 0$$

λ nennt man **Eigenwerte** und x nennt man **Eigenfunktionen** des Differentialoperators L.

Beispiel: für das obige Differentialgleichungsproblem (1.3.1) und das zugehörige S.L. EW-Problem:
Poissonproblem: Gegeben $y \in C(\Omega)$, gesucht $x \in C^2(\Omega)$, sodass

$$\begin{aligned} \Delta x &= y \\ x|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned}$$

Laplace Eigenwertproblem: Gesucht: $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in C^2(\Omega)$, sodass

$$\begin{aligned} \Delta x &= \lambda x \\ x|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned}$$

Satz 1.3.1
Sei 0 kein EW des S.L. EW-Problems. Dann hat das Differentialgleichungsproblem (1.3.1) eine eindeutige Lösung. Es existiert die Greenfunktion $G : \Omega^2 \to \mathbb{R}$ stetig, sodass

- $\forall s, t \in \Omega : G(s,t) = G(t,s)$ *(symmetrisch)*
- *Der Operator I_G, gegeben durch $(I_G y)(s) = \int_\Omega G(s,t)y(t)dt$, erfüllt* $\forall y \in C(\Omega)$

$$\begin{aligned} L(I_G(y)) &= I_G(L(y)) = y \\ R_1(I_G(y))) &= R_2(I_G(y)) = 0. \end{aligned}$$

Satz 1.3.2
Sei 0 kein Eigenwert des Sturm-Liouville Problems. Sei $G(s,t)$ die Greenfunktion. Setze $k(s,t) := G(s,t)$. Dann sind die folgenden Probleme äquivalent:

1. *$x \in C^2(\Omega)$ ist Lösung des Sturm-Liouville EW-Problems, d.h. erfüllt $Lx = \lambda x$ unter den gegeben Randbedingungen $R_1(x) = R_2(x) = 0$.*

2. *$x \in L^2(\Omega)$ ist die Lösung des Integralgleichungsproblems*

$$x - \lambda K(x) = 0$$

mit dem Integraloperator

$$(Kx)(s) = \int_\Omega k(s,t)x(t)dt$$

Bemerkung 1.3.3
Es gilt

$$\begin{aligned} &x - \lambda K(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \\ &(I - \lambda K)x = 0 \quad \Leftrightarrow \\ &Kx - \frac{1}{\lambda}x = 0 \quad \Leftrightarrow \\ &Kx = \frac{1}{\lambda}x \end{aligned}$$

Somit sind die Eigenwerte des Integraloperators die reziproken Werte der Eigenwerte des Differentialoperators. Dieser Satz bringt nun einen s.a. kompakten Operator K ins Spiel, auf den man den Spektralsatz anwenden kann.

Beweis. 2. $\Rightarrow$ 1. **:** Sei x Lösung des Integralgleichungsproblems. Dann gilt:

$$Lx = L\lambda Kx = \lambda LKx = \lambda x.$$

Da $K = I_G$ gilt $LK = \mathrm{Id}$. L invertiert also die Wirkung der Greenfunktion. Weiters gilt:

$$\begin{aligned} R_1(x) = R_1(\lambda Kx) = \lambda R_1(I_G(x)) = 0 \\ R_2(x) = R_2(\lambda Kx) = \lambda R_2(I_G(x)) = 0. \end{aligned}$$

1. $\Rightarrow$ 2. **:** x erfülle $Lx = \lambda x$ und $R_{1,2}(x) = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} KLx = \lambda Kx &\Longleftrightarrow \frac{1}{\lambda}KLx = Kx \\ &\Longleftrightarrow \frac{1}{\lambda}x = Kx. \end{aligned}$$

Die Randwerte $R_{1,2}(x) = 0$ sind in der zweiten Äquivalenz von großer Bedeutung, da der Operator L lineare und konstante Terme auf Null setzen kann, der Operator $K = I_G$ kann diese allerdings nicht reproduzieren. □

Satz 1.3.4
Sei 0 kein Eigenwert des S.L. EW-Problems. Dann existiert eine Folge $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ von Eigenwerten und eine Folge $\{\omega_n : n \in \mathbb{N}\}$ von Eigenfunktionen, sodass:

1. $L\omega_n - \lambda_n\omega_n = 0$

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} = 0$

3. *$\{w_n : n \in \mathbb{N}\}$ bildet ein ONS in $L^2(\Omega)$. Somit hat jedes $x \in C^2(\Omega)$ für das gilt $R_1(x) = R_2(x) = 0$ die Entwicklung:*

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{n=1}^{N} (x, \omega_n)\omega_n - x \right\|_{L^2} = 0.$$

Beweis. Anwendung des Spektralsatzes auf den Operator $K : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$. Es gilt

$$k(s,t) := G(s,t) = G(t,s) = k(t,s).$$

Aus der Symmetrie des Integralkernes folgt die Selbstadjungiertheit des Integraloperators. Weiters gilt, dass die Abbildung

$$k(s,t) : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$$

stetig ist. Somit gilt, dass K kompakt ist. (Vorlesung Integralgleichungen, siehe [Wid69]) Dann erhält man aus dem Spektralsatz (1.2.1) für s.a. und kompakte Operatoren für den Operator K eine Folge von Eigenwerten $\{\mu_n : n \in \mathbb{N}\}$ und eine Folge von Eigenfunktionen $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$, sodass

1. $Ku_n = \mu_n u_n$
2. $\lim_{n\to\infty} \mu_n = 0$
3. $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ bildet ONS auf $L^2(\Omega)$

Setze nun $\lambda_n = \frac{1}{\mu_n}$ und $\omega_n = u_n$ und man erhält die Aussage.
Bemerkung: $C_0^2(\Omega)$ liegt dicht in $L^2(\Omega)$. □

1.4 Spektralanalyse des Laplace Operators[1]

Wir betrachten in diesem Abschnitt das Wärmeleitungsproblem auf einem beschränktem Gebiet D mit zweimal stetig differenzierbarem Rand:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= \frac{1}{2}\Delta u(t,x) \\ u(0,x) &= f(x) \\ u\big|_{\partial D} &= 0. \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

Wir wollen in diesem Kapitel den *Satz von Weyl* und damit einige Aussagen über die Eigenwerte dieses Problems und deren asymptotisches Verhalten treffen. Grundsätzlich gibt es dafür zwei verschiedene Zugänge: Der erste führt über die Theorie der Integralgleichungen (siehe dazu [Dav90]), der zweite und auch unser Zugang ist stochastischer Natur, da die Fundamentallösungen von (1.4.1) gleichzeitig die Dichten der Übergangswahrscheinlichkeiten einer Brown'schen Bewegung sind, die beim Austritt aus D gestoppt wird. In den ersten beiden Abschnitten werden wir die Brown'sche Bewegung näher untersuchen, um

[1]Dieser Abschnitt stammt aus der Diplomarbeit Spektrale Graphentheorie, Graph Sparsification und Eigenwertabschätzungen von Claudia Jabornegg.

dann im dritten Teil den Satz beweisen zu können. Als Grundlage dafür dienen die Bücher von Bass und Port & Stone (siehe [Bas95, PS78]).Die Basis der gesamten Beweisführung liefert der Spektralsatz für kompakte, selbstadjungierte Operatoren. Wir werden zeigen, dass die uns interessierenden Operatoren tatsächlich kompakt und selbstadjungiert sind, um von der Spektraldekomposition Gebrauch machen zu können. [Wer00]

1.4.1 Brown'sche Bewegung

In diesem Abschnitt definieren wir die Brown'sche Bewegung und fassen einige wichtige Eigenschaften zusammen, die wir als Basis für die nachfolgenden Abschnitte benötigen. Grundlegende Begriffe und Resultate der Wahrscheinlichkeitstheorie werden vorausgesetzt und können etwa in [Fel71] gefunden werden.

Definition 1.4.1
Für $t > 0$ sei $p\,(t, \cdot)$ die Dichte der Normalverteilung auf $\mathbb{R}^d$, definiert durch

$$p\,(t, y) = (2\pi t)^{-\frac{d}{2}}\, e^{-\frac{\|y\|^2}{2t}} \quad \text{für } y \in \mathbb{R}^d.$$

Des Weiteren definieren wir

$$p\,(t, x, y) := p\,(t, y - x) \ \text{ für } x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Die Dichten p sind symmetrisch in x und y und erfüllen für $s, t > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}^d$ die Halbgruppeneigenschaft

$$p\,(s + t, x, y) = \int p\,(s, x, z)\, p\,(t, z, y)\, dz.$$

Sei weiters $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{B}$ die Borel'sche Sigma-Algebra auf $[0, \infty)$ und $X\,(t, \omega) = X_t\,(\omega) = \omega\,(t)$ ein stochastischer Prozess definiert auf $[0, \infty) \times \Omega$.

Definition 1.4.2
Der stochastische Prozess X_t heißt eindimensionale Brown'sche Bewegung mit Startpunkt $x \in \mathbb{R}$, falls er folgende Bedingungen erfüllt:

1. $X_0 = x$ fast sicher,
2. für alle $s \leq t$ ist $X_t - X_s$ normalverteilt mit Mittelwert 0 und Varianz $t - s$,
3. für alle $s \leq t$ sind die Zuwächse $X_t - X_s$ unabhängig von $\sigma\,(X_r, r \leq s)$ und
4. die Abbildung $t \longrightarrow X_t\,(\omega)$ ist mit Wahrscheinlichkeit 1 stetig.

Hierbei bezeichne $\sigma\,(X_r; r \leq s)$ die kleinste Sigma-Algebra, bezüglich derer jedes X_r mit $r \leq s$ messbar ist. Seien $X_t^1, \cdots, X_t^d$ unabhängige, eindimensionale Brown'sche Bewegungen. Dann definieren wir eine *d-dimensionale Brown'sche Bewegung* durch

$$X_t := \left(X_t^1, \cdots, X_t^d\right).$$

Im Folgenden sei Ω die Menge aller stetigen Funktionen (Pfade) von $[0,\infty)$ nach $\mathbb{R}^d$ und $\omega \in \Omega$. Es lässt sich nun zeigen (siehe etwas [Bas95]), dass X_t genau dann eine d-dimensionale Brown'sche Bewegung mit Startpunkt x ist, wenn für $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ die Zufallsvariablen $\{X(t_i)\}_{1\le i\le n}$ die gemeinsame Verteilungsdichte

$$p\left(t_1,x,x_1\right)p\left(t_2-t_1,x_1,x_2\right)\cdots p\left(t_n-t_{n-1},x_{n-1},x_n\right) \text{ mit } x_1,\cdots x_n \in \mathbb{R}^d$$

besitzen. Außerdem existiert für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^x$, das der Brown'schen Bewegung mit Startpunkt x entspricht.

Gestoppte Brown'sche Bewegung

Sei $p_D\left(t,x,y\right)$ die Übergangswahrscheinlichkeit einer Brown'schen Bewegung, die beim Austritt aus dem Gebiet D gestoppt wird. Ziel dieses Abschnitts ist es, eine explizite Darstellung für $p_D\left(t,x,y\right)$ anzugeben und zu zeigen, dass p_D genauso wie p symmetrisch in x und y ist und einer Halbgruppeneigenschaft genügt. Zunächst wollen wir die Definition von p_D heuristisch motivieren. Sei $\tau_D(\omega)$ die Austrittszeit der Brown'schen Bewegung aus dem Gebiet D. Es ist

$$\begin{aligned} p\left(t,x,y\right)dy &= \mathbb{P}^x\left(X_t \in dy\right) \\ &= \mathbb{P}^x\left(X_t \in dy; \tau_D \ge t\right) + \mathbb{P}^x\left(X_t \in dy; \tau_D < t\right) \end{aligned}$$

Der erste Term auf der rechten Seite entspricht genau $p_D\left(t,x,y\right)$, den zweiten können wir mittels der starken Markov-Eigenschaft schreiben als

$$\mathbb{E}^x\left[\mathbb{P}^{X_{\tau_D}}\left(X_{t-\tau_D} \in dy\right); \tau_D < t\right]$$

oder äquivalent dazu

$$\mathbb{E}^x\left[p\left(t-\tau_D, X_{\tau_D}, y\right); \tau_D < t\right].$$

Genau diese Relation verwenden wir nun, um p_D zu definieren. Sei

$$r_D\left(t,x,y\right) := \mathbb{E}^x\left[p\left(t-\tau_D, X_{\tau_D}, y\right); \tau_D < t\right] \tag{1.4.2}$$

und

$$p_D\left(t,x,y\right) := p\left(t,x,y\right) - r_D\left(t,x,y\right). \tag{1.4.3}$$

Integrieren wir (1.4.3) nun über eine Menge A, so erhalten wir

$$\int_A p_D\left(t,x,y\right)dy = \int_A p\left(t,x,y\right)dy + \int_A \int_{\tau_D<t} p\left(t-\tau_D, X_{\tau_D}, y\right)p\left(t,x,\widetilde{y}\right)d\widetilde{y}dy,$$

wobei wir den Erwartungswert als Integral geschrieben haben. Nach Vertauschen der Integrationsreihenfolge ist die rechte Seite weiter gleich

$$\mathbb{P}^x\left(X_t \in A\right) - \mathbb{E}^x\left[\mathbb{E}^{X_{\tau_D}}\left[1_A\left(X_{t-\tau_D}\right)\right]; \tau_D < t\right].$$

Für den zweiten Term verwenden wir die Markov-Eigenschaft in folgender Form: Für $s, r \geq 0$ gilt $\mathbb{E}^x f(X_{s+r}) = \mathbb{E}^x \left(\mathbb{E}^{X_s} f(X_r)\right)$. Die starke Markov-Eigenschaft besagt, dass s auch eine Stoppzeit sein kann. Damit ist obiger Ausdruck weiter äquivalent zu

$$\mathbb{E}^x 1_A(X_t) - \mathbb{E}^x \left[1_A(X_t); \tau_D < t\right] = \mathbb{E}^x \left[1_A(X_t); \tau_D \geq t\right] = \mathbb{P}^x \left(X_t \in A; \tau_D \geq t\right).$$

Also ist $p_D(t, x, y)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte für $\mathbb{P}^x(X_t \in A; \tau_D \geq t)$ und folglich fast überall nicht-negativ. Zusammenfassend können wir somit schreiben:

Definition 1.4.3
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^d, x \in \mathbb{R}^d$ und $t \geq 0$. Sei

$$p_D(x, A) := \mathbb{P}^x(X(t) \in A; \tau_D > t) = \int_A p_D(t, x, y)\, dy$$

und für eine Funktion $f \geq 0$ auf $\mathbb{R}^d$

$$p_D^t f = \mathbb{E}^x(f(X(t)), \tau_D > t) = \int p_D(t, x, y) f(y)\, dy.$$

Tatsächlich gilt aber nicht nur $p_D(t, x, y) \geq 0$ *fast* überall, sondern sogar

Lemma 1.4.4
$p_D(t, x, y) \geq 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$.

Beweis. Sei für $\epsilon > 0$

$$r_D^\epsilon(t, x, y) := \mathbb{E}^x \left[p(t - \tau_D, X_{\tau_D}, y); \tau_D < t - \epsilon\right].$$

Diese Funktionen sind stetig in y, da $p(s, u, v)$ beschränkt und stetig als Funktion von (s, u, v) für $s \geq \epsilon$ ist. Da $r_D^\epsilon(t, x, y)$ für $\epsilon \to 0$ von unten gegen $r_D(t, x, y)$ konvergiert, ist $r_D(t, x, y)$ unterhalbstetig und damit $p_D(t, x, y)$ oberhalbstetig. Da $p_D(t, x, \cdot) \geq 0$ fast überall auf $\mathbb{R}^d$, folgt damit die Behauptung. □

Die Aussage des nächsten Resultates ist, dass sich die Brown'sche Bewegung im $\mathbb{R}^d$ und jene, die im Inneren des Gebietes D ihren Ausgangspunkt hat und beim Austritt aus D gestoppt wird, kurz nach dem Start kaum unterscheiden. Für die Brown'sche Bewegung ist der Rand des Gebietes also „noch nicht sichtbar“.

Lemma 1.4.5
Sei $D \in \mathcal{B}$ und $a \in D$. Dann existiert ein $r > 0$ sodass

$$\lim_{t \to 0} \frac{p_D(t, x, y)}{p(t, x, y)} = 1$$

gleichmäßig für $x, y \in D_r(a)$. Insbesondere gilt für $x \in D$

$$\lim_{t \to 0} \frac{p_D(t, x, x)}{p(t, x, x)} = 1.$$

Bevor wir uns dem Beweis zuwenden, zeigen wir folgende Monotonieaussage:

Lemma 1.4.6
Die Funktion $g(u) := (2\pi u)^{-\frac{d}{2}} e^{\frac{\alpha^2}{2u}}$ *ist für* $0 \leq u \leq \frac{\alpha^2}{d}$ *monoton wachsend.*

Beweis. Leiten wir $g(u)$ ab, so erhalten wir

$$\frac{dg}{du}(u) = \frac{(2\pi u)^{-d/2}}{2u^2} e^{\frac{\alpha^2}{2u}} \left(\alpha^2 + du\right).$$

Damit $g(u)$ monoton wachsend ist, muss dieser Ausdruck nicht-negativ sein. Da d positiv ist, ist dies ist der Fall, falls $u > 0$ und $\left(\alpha^2 + du\right) \geq 0$ ist, also insgesamt

$$0 < u \leq \frac{\alpha^2}{d}$$

gilt. □

Beweis zu Lemma 1.4.5. Sei ∂D der Rand des Gebietes D und $d(a, \partial D) = \min\{x \in \partial D : \|x - a\|\}$. Sei weiters $r > 0$ so, dass $r < \frac{d(a,\partial D)}{3}$. Sei $B_r(a)$ die Kugel um a mit Radius r. Wir wählen $x, y \in B_r(a)$ und setzen $\alpha := d(y, \partial D)$. Dann ist $\alpha + r > d(a, \partial D)$, $2r < d(a, \partial D) - r$ und damit

$$\|x - y\| \leq 2r < d(a, D) - r < \alpha.$$

Sei nun $t \leq \frac{\alpha^2}{d}$. Wegen Lemma 1.4.6 gilt für $0 \leq s < t$ und $z \notin D$

$$p(t - s, z, y) \leq \frac{1}{(2\pi(t - s))^{d/2}} e^{-\frac{\alpha^2}{2(t-s)}} \leq \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{\alpha^2}{2t}}.$$

Damit folgt weiter

$$r_D(t, x, y) = \mathbb{E}^x\left(p(t - \tau_D, X(\tau_D), y); \tau_D < t\right) \leq \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{\alpha^2}{2t}}$$

und damit

$$\frac{r_D(t, x, y)}{p(t, x, y)} \leq e^{-\frac{\alpha^2 - \|y-x\|^2}{2t}} \leq e^{-\frac{\left(\alpha^2 - (2r)^2\right)}{2t}}.$$

Also konvergiert $\frac{r_D(t,x,y)}{p(t,x,y)}$ für $t \to 0$ gleichmäßig gegen null für alle $x, y \in D_r(a)$. Da

$$p_D(t, x, y) = p(t, x, y) - r_D(t, x, y)$$

gilt

$$\frac{p_D(t, x, y)}{p(t, x, y)} = 1 - \frac{r_D(t, x, y)}{p(t, x, y)},$$

woraus die Behauptung folgt. □

Der nächste Satz besagt, dass $p_D(t, x, y)$ genauso wie $p(t, x, y)$ symmetrisch in x und y ist.

Satz 1.4.7
Für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ und alle $t > 0$ gilt $p_D(t, x, y) = p_D(t, y, x)$.

Zunächst zeigen wir die Symmetrie über Gleichheit eines Integral-Terms und somit für *fast alle* Paare (x, y), ein technisches Konvergenzlemma liefert dann den Übergang auf alle (x, y).

Lemma 1.4.8
Für fast alle $x, y \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ gilt $p_D(t, x, y) = p_D(t, y, x)$.

Beweis. Wir stellen $p_D(t, x, y)$ durch $p(t, x, y)$ dar und benutzen die Symmetrie von $p(t, x, y)$. Seien A und B Borel-Mengen und D offen. Es ist

$$\int_B \int_A p_D(t, x, y)\, dy dx = \int_B \mathbb{P}^x (X_t \in A, \tau_D \geq t)\, dx$$

und

$$\int_B \int_A p_D(t, y, x)\, dy dx = \int_A \mathbb{P}^y (X_t \in B, \tau_D \geq t)\, dy.$$

Somit genügt es zu zeigen, dass

$$\int_B \mathbb{P}^x (X_t \in A, \tau_D \geq t)\, dx = \int_A \mathbb{P}^y (X_t \in B, \tau_D \geq t)\, dy \tag{1.4.4}$$

gilt. Sei nun $t_j^n = \frac{jt}{n}$. Da die Pfade von X_t stetig sind, läßt sich der erste Ausdruck schreiben als

$$\lim_{n\to\infty} \int_B \mathbb{P}^{x_0} \left(X(t_n^n) \in A, X(t_1^n) \in D, \cdots, X\left(t_{n-1}^n\right) \in D \right) dx_0.$$

Aufgrund der Markov-Eigenschaft der Brownschen Bewegung ist

$$\mathbb{P}^x (X_{t_1} \in A_1, \cdots, X_{t_m} \in A_m) = \int_{A_1} \cdots \int_{A_m} \prod_{k=1}^{m} p(t_k - t_{k-1}, x_{k-1}, x_k).$$

Damit gilt, dass dieser Term äquivalent ist zu

$$\lim_{n\to\infty} \int_B \int_D \cdots \int_D \int_A \prod_{k=1}^{n} p\left(\frac{t}{n}, x_{k-1}, x_k\right) dx_n \cdots dx_0.$$

Da $p(t, x, y)$ symmetrisch ist, ist dies weiter gleich

$$\lim_{n\to\infty} \int_B \int_D \cdots \int_D \int_A \prod_{k=1}^{n} p\left(\frac{t}{n}, x_k, x_{k-1}\right) dx_n \cdots dx_0,$$

und mit der Setzung $y_i := x_{n-i}$ für alle $0 \leq i \leq n$ erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \int_B \int_D \cdots \int_D \int_A \prod_{k=1}^{n} p\left(\frac{t}{n}, y_{k-1}, y_k\right) dy_0 \cdots dy_n,$$

was wiederum gleich

$$\int_A \mathbb{P}^y \left(X_t \in B, \tau_D \geq t\right) dy$$

ist. Insgesamt folgt also (1.4.4) und damit die Behauptung für offene D. Für allgemeine Borel-Mengen lässt sich die Identität über Grenzwerte von Durchschnitten offener Mengen zeigen, siehe dazu [Bas95]. □

Wir benötigen noch folgenden technischen Hilfssatz:

Lemma 1.4.9
Für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\int p_D\left(t-a, x, u\right) p\left(a, u, y\right) du \downarrow p_D\left(t, x, y\right) \text{ für } a \to 0 \tag{1.4.5}$$

und

$$\int p\left(a, x, u\right) p_D\left(t-a, u, y\right) du \downarrow p_D\left(t, x, y\right) \text{ für } a \to 0. \tag{1.4.6}$$

Beweis. Wir beginnen mit (1.4.5). Es ist $p_D\left(t-a, x, u\right) = p\left(t-a, x, u\right) - r_D\left(t-a, x, u\right)$ laut Definition und damit

$$\int p_D\left(t-a, x, u\right) p\left(a, u, y\right) du = \int p\left(t-a, x, u\right) p\left(a, u, y\right) - \int r_D\left(t-a, x, u\right) p\left(a, u, y\right) du.$$

Der erste Term der rechten Seite ist aufgrund der Halbgruppeneigenschaft des Gausskerns gleich $p\left(t, x, y\right)$. Da außerdem nach Lemma 1.4.4 $p_D\left(t, x, y\right) \geq 0$ gilt, ist (1.4.5) äquivalent zu

$$r_D\left(t-a, x, u\right) p\left(a, u, y\right) \uparrow r_D\left(t, x, y\right) \text{ für } a \to 0. \tag{1.4.7}$$

Nach Definition (1.4.2) ist obiger Ausdruck gleich

$$\begin{aligned}&\int \mathbb{E}^x\left[p\left(t-a-\tau_D, X_{\tau_D}, u\right); \tau_D < t-a\right] p\left(a, u, y\right) du \\ &= \int \left[\int_{\tau_D < t} p\left(t-a-\tau_D, X_{\tau_D}, u\right) p\left(t, x, \widetilde{y}\right) d\widetilde{y}\right] p\left(a, u, y\right) du.\end{aligned}$$

Durch Vertauschen der Integrale und mit der Halbgruppeneigenschaft von p lässt sich dies schreiben als

$$\int_{\tau_D < t} p\left(t-\tau_D, X_{\tau_D}, y\right) p\left(t, x, \widetilde{y}\right) d\widetilde{y} = \mathbb{E}^x\left[p\left(t-\tau_D, X_{\tau_D}, y\right); \tau_D < t-a\right].$$

Dieser Ausdruch konvergiert aber für $a \to 0$ monoton wachsend gegen

$$\mathbb{E}^x\left[p\left(t-\tau_D, X_{\tau_D}, y\right); \tau_D < t\right] = r_D\left(t, x, y\right),$$

also gilt (1.4.7) und damit auch (1.4.5). Für (1.4.6) zeigen wir analog, dass für $b \to 0$

$$\int p\left(b, x, z\right) r\left(t-b, z, y\right) dz \uparrow r_D\left(t, x, y\right) \tag{1.4.8}$$

gilt. Dazu schätzen wir $r_D(t,x,y)$ nach oben und unten durch den Integralterm ab. Zunächst zeigen wir, dass für alle $b<t$

$$r_D(t,x,y) \geq \int p(b,x,z)\, r(t-b,z,y)\, dz \tag{1.4.9}$$

gilt. Dazu schreiben wir

$$r_D(t,x,y) = \mathbb{E}^x\left[p\left(t-\tau_D, X_{\tau_D}, y\right); \tau_D < b\right] + \mathbb{E}^x\left[p\left(t-\tau_D, X_{\tau_D}, y\right); b \leq \tau_D < t\right].$$

Der erste Ausdruck auf der rechten Seite lässt sich wieder aufgrund der Halbgruppeneigenschaft schreiben als

$$\begin{aligned}&\int_{\tau_D<b} p\left(t-\tau_D, X_{\tau_D}, y\right) p\left(t,x,\widetilde{y}\right) d\widetilde{y}\\ &\qquad = \int_{\tau_D<b}\left[\int p\left(b-\tau_D, X_{\tau_D}, z\right) p(t-b,z,y)\, dz\right] p\left(t,x,\widetilde{y}\right) d\widetilde{y},\end{aligned}$$

was wiederum äquivalent ist zu

$$\mathbb{E}^x\left[p\left(b-\tau_D, X_{\tau_D}, z\right); \tau_D < b\right] p(t-b,z,y)\, dz = \int r_D(b,x,z)\, p(t-b,z,y)\, dz.$$

Für den zweiten Term verwenden wir wieder die starke Markov-Eigenschaft $\mathbb{E}^x f\left(X_{s+r}\right) = \mathbb{E}^x\left(\mathbb{E}^{X_s} f\left(X_r\right)\right)$. Mit $r = t-b-\tau_D$ und $s=b$ ist der zweite Summand gleich

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}^x\left[\mathbb{E}^{X_b}\left[p\left(t-b-\tau_D, X_{\tau_D}, y\right); \tau_D < t-b\right]\right]\\ &\qquad = \int p_D(b,x,z)\, \mathbb{E}^z\left[p\left(t-b-\tau_D, X_{\tau_D}, y\right); \tau_D < t-b\right] dz\\ &\qquad = \int p_D(b,x,z)\, r_D(t-b,z,y)\, dz.\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also

$$r_D(t,x,y) = \int r_D(b,x,z)\, p(t-b,z,y)\, dz + \int p_D(b,x,z)\, r_D(t-b,z,y)\, dz.$$

Wegen Lemma 1.4.4 ist p_D nicht negativ, also $p(t-b,z,y) \geq r(t-b,z,y)$. Damit lässt sich obiger Ausdruck nach unten abschätzen durch

$$\int \left[r_D(b,x,z) + p_D(b,x,z)\right] r_D(t-b,z,y)\, dz,$$

wir erhalten also insgesamt

$$r_D(t,x,y) \geq \int p(b,x,z)\, r_D(t-b,z,y)\, dz,$$

was genau (1.4.9) ist. Nun zeigen wir, dass $\int p(b,x,z)\, r_D(t-b,z,y)\, dz$ für abnehmendes b monoton wächst. Sei dazu $b' < b$. Dann haben wir mit der Halbgruppeneigenschaft von p und Einfügen von b'

$$\int p(b,x,z)\, r_D(t-b,z,y)\, dz = \iint p\left(b',x,w\right) p\left(b-b',w,z\right) r_D\left(\left(t-b'\right)-\left(b-b'\right),z,y\right) dz dw.$$

Mit (1.4.9) gilt nun, dass

$$\int p\left(b-b',w,z\right) r_D\left(\left(t-b'\right)-\left(b-b'\right),z,y\right) dz \leq r_D\left(t-b',w,y\right)$$

ist und damit insgesamt

$$\int p\left(b,x,z\right) r_D\left(t-b,z,y\right) dz \leq \int p\left(b',x,z\right) r_D\left(t-b',z,y\right) dz$$

wie behauptet. Sei nun x ein regulärer Punkt in D^C. Es ist $\int p\left(b,x,z\right) dz = 1$ und für fixes $\delta > 0$ gilt $\int_{|z-x|>\delta} p\left(b,x,z\right) dz \to 0$ für $b \to 0$. Damit ist dies eine Dirac-Folge. Da weiters $r_D\left(t,x,y\right)$ unterhalbstetig ist, gilt mit dem Lemma von Fatou

$$\liminf_{b\to 0} \int p\left(b,x,z\right) r\left(t-b,z,y\right) dz \geq r\left(t,z,y\right).$$

Zusammen mit (1.4.9) folgt daraus (1.4.8) für ein solches x. Für ein nicht-reguläres $x \in D^C$ lässt sich diese Abschätzung ebenfalls zeigen, siehe dazu etwa [Bas95, S. 125]. □

Damit können wir nun Satz 1.4.7 zeigen:

Beweis zu Satz 1.4.7. Da $p\left(t,x,y\right) = p\left(t,y,x\right)$ für alle $x,y \in \mathbb{R}^d$ und $p_D\left(t,x,y\right) = p_D\left(t,y,x\right)$ für fast alle x,y folgt, dass

$$\begin{aligned}&\iint p\left(a,x,u\right) p_D\left(t-a-b,u,v\right) p\left(b,v,y\right) dudv \\ &\qquad = \iint p\left(b,y,v\right) p_D\left(t-a-b,v,u\right) p\left(a,u,x\right) dudv\end{aligned}$$

Mit $a,b \to 0$ können wir Lemma 1.4.9 anwenden und erhalten damit $p_D\left(t,x,y\right) = p_D\left(t,y,x\right)$ für alle Paare $\left(x,y\right)$ wie behauptet. □

Als nächstes benötigen wir die Halbgruppeneigenschaft von p_D:

Satz 1.4.10
Sei D eine Borel-Menge, $t > 0$ und $x,y \in \mathbb{R}^d$. Dann genügt p_D der Halbgruppeneigenschaft

$$p_D\left(s+t,x,y\right) = \int p_D\left(s,x,z\right) p_D\left(t,z,y\right) dz$$

Beweis. Wir zeigen zunächst die Halbgruppeneigenschaft der Operatoren p_D^t für $t \geq 0$. Sei f beschränkt auf $\mathbb{R}^d$ und der *Shift-Operator* θ_t definiert über $X(s,\theta_t\omega) = X(s+t,\omega)$. Laut Definition ist

$$p_D^{s+t} f\left(x\right) = \mathbb{E}^x\left(f\left(X\left(s+t\right)\right), \tau_D > s+t\right) = \mathbb{E}^x\left(f\left(X\left(t,\theta_s\omega\right)\right), \tau_D \cdot \theta_s > t, \tau_D > s\right).$$

Mit der starken Markov-Eigenschaft ist dieser Ausdruck äquivalent zu

$$\mathbb{E}^x\left(\mathbb{E}^{X(s)}\left(f\left(X\left(t\right)\right), \tau_D > t\right), \tau_D > s\right)$$

und unter Verwendung der Definition von p_D^t gleich

$$\mathbb{E}^x\left(p_D^t f(X(s)), \tau_D > s\right) = \left(p_D^s p_D^t f\right)(x).$$

Insgesamt haben wir also $p_D^{s+t} = p_D^s p_D^t$ für $s, t \geq 0$. Da laut Definition 1.4.3 $p_D^t f = \int p_D(t,x,y) f(y)\, dy$ ist, gilt außerdem für fast alle $u \in \mathbb{R}^d$

$$p_D(s+t,x,u) = \int p_D(s,x,z)\, p_D(t,z,u)\, dz.$$

Für $0 < a < t$ erhalten wir daraus

$$\int p_D(s+t-a,x,u)\, p(a,u,y)\, du = \int\int p_D(s,x,z)\, p_D(t-a,z,u)\, p(a,u,y)\, dzdu. \tag{1.4.10}$$

Vertauschen wir die Integrationsreihenfolge, so ist die rechte Seite gleich

$$\int p_D(s,x,z)\left[p_D(t-a,z,u)\, p(a,u,y)\, du\right] dz.$$

Mit dem ersten Teil von Lemma 1.4.9 konvergiert der Klammerausdruck für $a \downarrow 0$ gegen $p_D(t,z,y)$ und die linke Seite von (1.4.10) gegen $p_D(s+t,x,y)$. Insgesamt erhalten wir wie behauptet

$$p_D(s+t,x,y) = \int p_D(s,x,z)\, p_D(t,z,y)\, dz.$$

$\square$

Die Symmetrie und die Halbgruppeneigenschaft von p übertragen sich also auch auf p_D.

1.4.2 Der Satz von Weyl

Unser nächstes Ziel ist nun, die im vorhergehenden Abschnitt gewonnenen Resultate über die Brown'sche Bewegung zu verwenden, um zwei Abschätzungen von Weyl und Carleman zu beweisen. Diese liefern uns Formeln für die asymptotische Verteilung der Eigenwerte und Eigenfunktionen des Operators p_D^t. Wir verwenden dazu einen zentralen Satz der Maßtheorie, bekannt als „Karamata's Tauberian Theorem“, der in [Sim05] zu finden ist. Im Folgenden sei D immer eine nichtleere, offene Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ mit endlichem Lebesgue-Maß $|D|$. Sei $L_2 = L_2(D)$ wie üblich der Hilbertraum aller Funktionen $f : D \to D$ mit $\|f\|_2^2 = \int_D f^2(x)\, dx < \infty$. Wir sammeln noch einige Abschätzungen und Eigenschaften von p_D, die wir später benötigen werden.

Lemma 1.4.11
Sei $x \in B$. Dann gilt

$$\int p_D^2(t,x,y)\, dy = p_D(2t,x,x) \leq p(2t,0) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} \tag{1.4.11}$$

und

$$\int\int p_D^2(t,x,y)\, dxdy = \int p_D(2t,x,x)\, dx \leq |B| p(2t,0) = \frac{|B|}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}}. \tag{1.4.12}$$

Beweis. Mit der Symmetrie (Satz 1.4.7) und der Halbgruppeneigenschaft (Satz 1.4.10) von p_D erhalten wir

$$\int p_D^2\left(t,x,y\right)dy = \int p_D\left(t,x,y\right)p_D\left(t,y,x\right)dy = p_D\left(2t,x,x\right).$$

Weiters ist $p_D\left(t,x,y\right) \leq p\left(t,x,y\right)$ für alle $x,y \in \mathbb{R}^d$ und damit

$$p_D\left(2t,x,x\right) \leq p\left(2t,x,x\right) = p\left(2t,0\right) = \frac{1}{\left(4\pi t\right)^{\frac{d}{2}}},$$

womit (1.4.11) gezeigt ist. Integration des obigen Ausdrucks liefert

$$\int p_D\left(2t,x,x\right)dx \leq \int p\left(2t,x,x\right)dx \leq \frac{|B|}{\left(4\pi t\right)^{\frac{d}{2}}}$$

und damit (1.4.12). □

Nun wollen wir uns dem Operator $p_D^t f = \int p_D\left(t,x,y\right)f\left(y\right)dy$. zuwenden:

Lemma 1.4.12
Der Operator p_D^t ist beschränkt und linear mit Norm kleiner gleich 1. Für $f \in L^2$ ist also

$$\left\|p_D^t f\right\|_2^2 \leq \|f\|_2^2. \tag{1.4.13}$$

Beweis. Laut Definition ist

$$\left\|p_D^t f\right\|_2^2 = \int \left(p_D^t f\left(x\right)\right)^2 dx = \int \left(\int p_D\left(t,x,y\right)f\left(y\right)dy\right)^2 dx.$$

Nun schätzen wir das innere Integral mittels der Cauchy-Schwarz-Ungleichung ab. Dazu schreiben wir den Integranden zunächst etwas anders an:

$$\int \left(\int p_D\left(t,x,y\right)f\left(y\right)dy\right)^2 dx = \int \left(\int \sqrt{p_D\left(t,x,y\right)} \cdot \left(\sqrt{p_D\left(t,x,y\right)}f\left(y\right)\right)dy\right)^2 dx$$

Dies lässt sich nun nach oben mit

$$\int \left(\int p_D\left(t,x,y\right)f^2\left(y\right)dy\right)\left(\int p_D\left(t,x,y\right)dy\right)dx$$

abschätzen. Da p_D eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist, lässt sich dieser Ausdruck nach Vertauschen der Integrationsreihenfolge weiter abschätzen mit

$$\int \left(\int p_D\left(t,x,y\right)dx\right)f^2\left(y\right)dy$$

und dieses Integral wiederum mit

$$\int f^2\left(y\right)dy = \|f\|_2^2,$$

was insgesamt wie behauptet

$$\left\|p_D^t f\right\|_2^2 \leq \|f\|_2^2$$

liefert. □

Lemma 1.4.13
Es gilt für alle $t > 0$ und $f, g \in L_2$

$$\langle p_D^t f, g\rangle = \int p_D^t f(x)\, g(x)\, dx = \int f(x)\, p_D^t g(x)\, dx = \langle f, p_D^t g\rangle,$$

die Operatoren p_D^t sind also selbstadjungiert.

Beweis. Aus der Definition erhalten wir

$$\langle p_D^t f, g\rangle = \int p_D^t f(x)\, g(x)\, dx = \int\int p_D(t, x, y)\, f(y)\, g(x)\, dy dx.$$

Mit der Symmetrie von p_D und nach Vertauschen der Integrationsreihenfolge ist dies äquivalent zu

$$\int\int f(y)\, p_D(t, y, x)\, g(x)\, dy dx = \int f(y)\, p_D^t g(y)\, dy = \langle f, p_D^t g\rangle$$

wie behauptet. □

Wir benötigen nun noch, dass der Operator p_D^t kompakt ist. Die Kompaktheit eines Integraloperators folgt aus der Stetigkeit des Integralkernes. Da unser Integralkern

$$\begin{aligned} p_D(\cdot, \cdot, t) : D \times D &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto p_D(x, y, t) \end{aligned}$$

stetig ist, erhält man sofort, dass $p_D^t : L^2(D) \to L^2(D)$ kompakt ist. Details können nachgelesen werden in [Wid69].

Im nächsten Schritt beweisen wir noch die Injektivität des Operators p_D^t. Die Injektivität sagt uns, dass 0 kein EW dieses Operators ist.

Lemma 1.4.14
Der Operator p_D^t ist injektiv für alle $t > 0$.

Beweis. Wir zeigen, dass der Kern des Operators p_D^t nur die konstante Nullfunktion beinhaltet. Zunächst bemerken wir, dass für eine stetige Funktion f mit kompaktem Träger in D gilt

$$\lim_{t\to 0} p_D^t f = f. \tag{1.4.14}$$

Dies folgt, da

$$\lim_{t\to 0} p_D^t f(x) = \lim_{t\to 0} p_D(t, x, y)\, f(y)\, dy$$

und p_D eine Dirac-Folge ist. Weiters liegt die Menge aller stetigen Funktionen mit kompaktem Träger dicht in L_2, somit gilt (1.4.14) für alle $f \in L_2$. Sei nun $f \in L_2$ und $p_D^t f = 0$. Dann gilt mit der Selbstadjungiertheit und der Halbgruppeneigenschaft von p_D^t

$$\left\langle p_D^{t/2} f, p_D^{t/2} f\right\rangle = \langle f, p_D^t f\rangle = \langle f, 0\rangle = 0$$

und damit auch $p_D^{t/2} f = 0$. Mittels Induktion erhalten wir daraus $p_D^{t/2^n} f = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und weiter

$$f = \lim_{n\to\infty} p_D^{t/2^n} f = 0.$$

Somit ist f die Nullfunktion, p_D^t also injektiv. □

Insgesamt folgt nun, dass p_D^t ein kompakter, selbstadjungierter Operator ist, der 0 nicht als Eigenwert besitzt. Wir können also den Spektralsatz anwenden und erhalten daraus für jedes $t > 0$:

1. Der Operator p_D^t besitzt Eigenwerte $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots$ und Eigenfunktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$.
2. Für die Eigenwerte μ_i gilt: $\lim_{i\to\infty} \mu_i = 0$
3. Die Eigenfunktionen φ_i bilden eine Orthonormalbasis für $L^2(D)$.

Aus der Beschränktheit und Stetigkeit von $p_D(t, x, y)$ lässt sich ableiten, dass wir die Eigenfunktionen beschränkt und stetig auf D annehmen können. Weiters sind alle Eigenwerte positiv. Ist μ ein beliebiger Eigenwert von p_D^t und φ die zugehörige Eigenfunktion, so gilt

$$\mu\langle\varphi,\varphi\rangle = \left\langle p_D^t\varphi,\varphi\right\rangle = \left\langle p_D^{t/2}, p_D^{t/2}\right\rangle \geq 0.$$

Da $\langle\varphi,\varphi\rangle \geq 0$ ist, gilt auch $\mu \geq 0$ und aufgrund der Injektivität sogar $\mu > 0$. Seien nun im Speziellen μ und φ ein Eigenwert und die dazugehörige Eigenfunktion von p_D^1. Wir setzen $\lambda := -\ln\mu$ und zeigen nun, wie sich daraus eine Darstellung für die Eigenwerte von p_D^t für allgemeines t gewinnen lässt:

Lemma 1.4.15
Für alle $t > 0$ gilt

$$p_D^t\varphi = e^{-\lambda t}\varphi.$$

Beweis. Da laut Definition $\lambda = -\ln\mu$ ist, gilt $p_D^1\varphi = \mu\varphi = e^{-\lambda}\varphi$. Somit ist

$$0 = \left(p_D^1 - \mu\right)\varphi = \left(p_D^{\frac{1}{2}} + \mu^{\frac{1}{2}}\right)\left(p_D^{\frac{1}{2}} - \mu^{\frac{1}{2}}\right)\varphi.$$

Wir setzen $\psi := \left(p_D^{\frac{1}{2}} - \mu^{\frac{1}{2}}\right)\varphi$ und erhalten damit weiter

$$0 = \left\|\left(p_D^{\frac{1}{2}} + \mu^{\frac{1}{2}}\right)\psi\right\|_2^2 = \left\|p_D^{\frac{1}{2}}\psi\right\|_2^2 + \mu\|\psi\|_2^2 + 2\mu^{\frac{1}{2}}\left\|p_D^{1/4}\psi\right\|_2^2.$$

Da kein Term der rechten Seite negativ sein kann, muss jeder Summand einzeln verschwinden. Nun ist aber $\mu > 0$, also muss $\|\psi\|_2^2 = 0$ und damit $\psi = 0$ gelten. Daraus folgt

$$p_D^{\frac{1}{2}}\varphi = \mu^{\frac{1}{2}}\varphi.$$

Mit Induktion erhalten wir nun, dass

$$p_D^t \varphi = \mu^t \varphi \tag{1.4.15}$$

auch für alle t der Gestalt $t = \frac{1}{2^n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ gilt. Mit der Halbgruppeneigenschaft von p_D^t folgt (1.4.15) auch für alle t der Form $t = \frac{m}{2^n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$. Aufgrund der Stetigkeit gilt die Beziehung schließlich auch für alle anderen $t \in \mathbb{R}^+$. □

Wir setzen nun $\lambda_i := -\ln \mu_i$ für alle Eigenwerte μ_i von p_D^1. Dann ist $\{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$ monoton wachsend und positiv, da wegen Lemma 1.4.12 $\left\|p_D^1\right\| \leq 1$ und damit $\mu_1 \leq 1$ ist. Die Eigenwerte von p_D^t lassen sich damit als die Folge $\left\{e^{-\lambda_i t}\right\}_{i=1}^\infty$ darstellen. Weiters ist $p_D(t, x, \cdot) \in L_2$, da mit (1.4.11) gilt

$$\|p_D(t, x, \cdot)\|_2^2 = \int p_D^2(t, x, y)\, dy = p_D(2t, x, x) \leq \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}. \tag{1.4.16}$$

Nun entwickeln wir diese Funktion für fixes x bezüglich der Basis φ_i:

$$\begin{aligned}
\sum_n \left(e^{-\lambda_n s} \varphi_n(x)\right)^2 &= \sum_n \left(p_D^s \varphi_n(x)\right)^2 \\
&= \sum_n \left(\int p_D^x(s, x, y)\, \varphi_n(y)\, dy\right)^2 \\
&= \sum_n \langle p_D, \varphi_n \rangle^2
\end{aligned}$$

Da die Funktionen φ_i ein Orthonormalsystem bilden, ist der letzte Ausdruck äquivalent zu $\|p_D(s, x, \cdot)\|_2^2$ und dies wiederum wegen (1.4.16) gleich $p_D(2s, x, x)$. Mit $t := 2s$ erhalten wir also

$$p_D(t, x, x) = \sum_n e^{-\lambda_n t} \varphi_n^2(x) \tag{1.4.17}$$

und nach Integration, da $\int \varphi_i \varphi_j = \delta_{ij}$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$,

$$\int p_D(t, x, x)\, dx = \sum_n e^{-\lambda_n t}. \tag{1.4.18}$$

Mit diesen beiden Identitäten sind wir nun in der Lage, den Satz von Weyl beweisen, indem wir ihn auf den Satz von Karamata zurückführen. Zuvor wollen wir aber der Übersichtlichkeit halber nocheinmal den Bezug zum Anfangswertproblem (1.4.1) herstellen:

Satz 1.4.16 (Hauptsatz)
Sei $D \in \mathbb{R}^d$ beschränkt mit zweimal stetig differenzierbarem Rand. Dann gilt:

1. *$u(t, x) := p_D^t f(x)$ löst das Anfangswertproblem (1.4.1).*

2. *Die Operatoren p_D^t sind selbstadjungiert und kompakt.*

3. *Sie besizten Eigenwerte $\{\mu_i\}$ und Eigenfunktionen $\{\varphi_i\}$. Es ist $\mu_i = e^{-\lambda_i t}$ für eine Folge reeller Zahlen $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ und damit*

$$p_D^t \varphi_i = \mu_i \varphi_i = e^{-\lambda_i t} \varphi_i.$$

4. $p_D(t,x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i t}\varphi_i(x)\varphi_i(y)$

5. *Die* φ_i *sind ebenfalls Eigenfunktionen des Operators* $\frac{\Delta}{2}$ *zu den Eigenwerten* $-\lambda_i$,

$$\frac{\Delta}{2}\varphi_i = -\lambda_i\varphi_i.$$

Beweis. Zu zeigen ist nur mehr Punkt 5. Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}p_D^t\varphi_i = \frac{1}{2}\Delta e^{-\lambda_i t}\varphi_i$$

und damit nach Integration über t, da $\lambda_i > 0$ für alle i

$$p_D^t\varphi_i = -\frac{1}{2\lambda_i}\Delta\varphi_i,$$

woraus die Behauptung folgt. □

Definition 1.4.17

$$g_D(x,y) = \int_0^\infty p_D(t,x,y)dt$$

ist der sogenannte Greenkern.

Satz 1.4.18

$$(G_D)f(x) = \int_D g_D(x,y)f(y)dy$$

ist der Lösungsoperator der Poissongleichung.

$$\left(\frac{-\Delta}{2}\right)G_D f = f.$$

G_D *ist selbstadjungiert und kompakt.*

Proposition 1.4.19
$(e^{-\lambda_i}, \varphi_i)$ *Eigensystem von* p_D^1 *(Lösung der Wärmeleitungsgleichung zum Zeitpunkt 1). Dann gilt*

1. $(1/\lambda_i, \varphi_i)$ *ist Eigensystem vom Greenoperator* G_D.

2. $(-2\lambda_i, \varphi_i)$ *ist Eigensystem vom Laplaceoperator* Δ *mit Dirichlet Randwerten.*

Beweis. 1.

$$\begin{aligned} G_D\varphi_i(x) &= \int_0^\infty \int_D p_D(t,x,y)\varphi_i(y)dy \\ &= \int_0^\infty p_D^t\varphi_i(x)dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda_i t}dt\varphi_i(x) \\ &= \frac{1}{\lambda_i}\varphi_i(x). \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
&\Delta G_D \varphi_i = -2\varphi_i \iff \\
&\Delta(\frac{1}{\lambda_i}\varphi_i) = -2\varphi_i \iff \\
&\Delta\varphi_i = -2\lambda_i\varphi_i.
\end{aligned}$$

□

Proposition 1.4.20 *1. Sei φ Eigenfunktion von $\left(-\frac{1}{2}\Delta\right)$, dann ist φ Eigenfunktion von G_D.*

2. Sei φ Eigenfunktion von G_D, dann ist φ Eigenfunktion von p_D^1.

Beweis. 1. Aus der Voraussetzung erhält man

$$-\frac{1}{2}\Delta\varphi(x) = \lambda\varphi(x)$$

Da „Green von Laplace invertiert wird" erhält man

$$\Delta(G_D(\lambda\varphi)) = -2\lambda\varphi = \Delta\varphi.$$

Die letzte Gleichheit erhält man aus der Voraussetzung. Es gilt für $x \in D$:

$$\begin{aligned}
\Delta(G_D(\lambda\varphi) - \varphi)x &= 0 \\
\text{Randebedingung: } (G_D(\lambda\varphi))|_{\partial D} &= 0.
\end{aligned}$$

Aus dem Maximumprinzip für harmonische Funktionen (eine harmonische Funktion nimmt das Maximum am Rand an) erhält man:

$$\begin{aligned}
G_D\lambda\varphi(x) - \varphi(x) &= 0 \qquad \forall x \in D \Leftrightarrow \\
G_D\varphi(x) &= \frac{1}{\lambda}\varphi(x) \qquad \forall x \in D
\end{aligned}$$

2. ohne Beweis.

□

Bemerkung 1.4.21
Aus dem Satz (1.4.16) erhält man: Sei φ Eigenfunktion von p_D^1, dann ist φ Eigenfunktion von $\left(-\frac{1}{2}\Delta\right)$.

Satz 1.4.22 (Weyl, Carleman [Sim05])
Sei $x \in D$. Dann gilt

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-d/2} \sum_{\lambda_n \le \lambda} \varphi_n^2(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\,\Gamma(d/2+1)} =: C_{Weyl}$$

und

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-d/2} \sum_{\lambda_n \le \lambda} = \frac{|D|}{(2\pi)^{d/2}\,\Gamma(d/2+1)} = C_{Weyl}|D|$$

Satz 1.4.23 (Karamata, [Sim05])
Sei μ ein Maß auf $\mathbb{R}^+$, γ und $c \in \mathbb{R}^+$. Falls

$$\lim_{t\to 0} t^\gamma \int_0^\infty e^{-t\lambda} d\mu(\lambda) = c,$$

so gilt

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-\gamma} \mu([0,\lambda]) \frac{c}{\Gamma(\gamma+1)}.$$

Beweis. Siehe [Sim05]. □

Wir können nun den Satz von Weyl und Carleman beweisen:

Beweis zu Satz 1.4.22. Sei $x \in D$. Nach Lemma 1.4.5 ist

$$\lim_{t\to 0} \frac{p_D(t,x,x)}{p(t,x,x)} = \lim_{t\to 0} \frac{p_D(t,x,x)}{(2\pi t)^{-\frac{d}{2}}} = 1.$$

Wir definieren das Punktmaß μ über

$$\mu[0,\lambda] = \sum_{\lambda_n \leq \lambda} \varphi_n^2(x).$$

Damit gilt nun

$$1 = \lim_{t\to 0} \frac{p_D(t,x,x)}{(2\pi t)^{-\frac{d}{2}}} = \lim_{t\to 0} (2\pi t)^{\frac{d}{2}} \sum_{\lambda_n \leq \lambda} e^{-\lambda_n t} \varphi_n^2(x) = \lim_{t\to 0} (2\pi t)^{\frac{d}{2}} \int e^{-\lambda t} d\mu(\lambda) \tag{1.4.19}$$

also

$$(2\pi)^{-\frac{d}{2}} = \lim_{t\to 0} t^{\frac{d}{2}} \int e^{-\lambda t} d\mu(\lambda).$$

Mit Satz 1.4.23 folgt also

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-\frac{d}{2}} \sum_{\lambda_n \leq \lambda} \varphi_n^2(x) = \frac{(2\pi)^{-\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)},$$

was der ersten Behauptung entspricht. Die zweite Identität folgt analog mit dem Maß

$$\mu[0,\lambda] := \sum_{\lambda_n \leq \lambda} 1.$$

Integration von (1.4.19) liefert

$$|D| = \lim_{t\to 0} (2\pi t)^{-\frac{d}{2}} \sum_{\lambda_n \leq \lambda} e^{-\lambda_n t}$$

und Satz 1.4.23 damit

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-\frac{d}{2}} \sum_{\lambda_n \leq \lambda} 1 = \frac{|D|}{(2\pi)^{d/2}\,\Gamma(d/2+1)}.$$

□

1.5 Spektraltheorie beschränkter Operatoren

1.5.1 Spektrum- Resolvente - Spektralradius

Definition 1.5.1
Sei $T \in L(H)$, $T^0 = \mathrm{Id}$, dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ Neumannreihe.

Bemerkung 1.5.2

1. Falls die Neumannreihe konvergiert, dann gilt

$$(\mathrm{Id} - T) \text{ ist invertierbar und}$$
$$(\mathrm{Id} - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n \in L(H).$$

2. $\|T\| < 1$. Dann konvergiert die Neumannreihe.

3. $\limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} < 1$. Dann konvergiert die Neumannreihe.

Definition 1.5.3
Sei $T \in L(H)$, H ein Hilbertraum.

1. Das Spektrum $\sigma(T)$ ist folgendermaßen definiert:

$$\lambda \in \sigma(T)(\subseteq \mathbb{C}) \Leftrightarrow (\lambda \,\mathrm{Id} - T) \text{ ist kein Isomorphismus.}$$

2. Die Resolventenmenge $\rho(T)$ ist folgendermaßen definiert:

$$\rho(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma(T).$$

3. $\forall \lambda \in \rho(T)$ ist $R_\lambda(T) = (\lambda \,\mathrm{Id} - T)^{-1} \in L(H)$ die Resolvente.

4. $r(T) = sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$ ist der Spektralradius.

Wiederholung

Bemerkung 1.5.4
$S \in L(H)$ ist Isomorphismus $\Leftrightarrow \|S\|\|S^{-1}\| < \infty$, d.h genau dann wenn S eine stetige Inverse S^{-1} besitzt.

Satz 1.5.5 (Satz über stetige Inverse)
Seien E, F Banachräume und $T \in L(E, F)$.

- *Ist T eine Bijektion zwischen den Banachräumen E und F, dann ist die Inverse T^{-1} stetig.*

- *$\forall y \in F\ \exists! x \in E : Tx = y$, dann ist die Lösung störungsstabil, d.h. die Lösung hängt stetig von den Daten ab.*

Satz 1.5.6 (Resolventengleichung)
Seien $\mu, \lambda \in \rho(T)$, dann gilt

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = -(\lambda - \mu) R_\lambda(T) R_\mu(T).$$

Beweis.

$$\begin{aligned} R_\lambda(T) - R_\mu(T) &= R_\lambda(T)(\mu \operatorname{Id} - T) R_\mu(T) - R_\lambda(T)(\lambda \operatorname{Id} - T) R_\mu(T) \\ &= R_\lambda(T)(\mu \operatorname{Id} - T - \lambda \operatorname{Id} + T) R_\mu(T) \\ &= R_\lambda(T)(\mu - \lambda) R_\mu(T). \end{aligned}$$

□

Satz 1.5.7
Sei $T \in L(H)$. Es gilt $\rho(T) \subseteq \mathbb{C}$ ist offen.

Bemerkung 1.5.8
$\rho(T) \subseteq \mathbb{C}$ offen $:\Leftrightarrow$

$$\forall \lambda_0 \in \rho(T): \ |\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}(T)\|^{-1} \Rightarrow \lambda \in \rho(T).$$

Beweis. Wir zeigen unter der Voraussetzung $|\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}(T)\|^{-1}$, dass die Resolvente $R_\lambda(T)$ existiert.

$$\begin{aligned} (\lambda \operatorname{Id} - T)^{-1} &= ((\lambda - \lambda_0) \operatorname{Id} + (\lambda_0 \operatorname{Id} - T))^{-1} \\ &= \big((\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 \operatorname{Id} - T)^{-1}(\lambda_0 \operatorname{Id} - T) + (\lambda_0 \operatorname{Id} - T)\big)^{-1} \\ &= \big((\lambda - \lambda_0)((\lambda_0 \operatorname{Id} - T)^{-1} + \operatorname{Id})(\lambda_0 \operatorname{Id} - T)\big)^{-1} \\ &= (\lambda_0 \operatorname{Id} - T)^{-1}((\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 \operatorname{Id} - T)^{-1} + \operatorname{Id})^{-1} \\ &= (\lambda_0 \operatorname{Id} - T)^{-1}(\operatorname{Id} - (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 \operatorname{Id} - T)^{-1})^{-1} \\ &= R_{\lambda_0}(T) \left(\operatorname{Id} + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n R_{\lambda_0}^n(T) \right). \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde Bemerkung 1.5.2 verwendet. Man erhält aus der Voraussetzung:

$$\begin{aligned} \big\|(\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 \operatorname{Id} - T)^{-1}\big\| &\le |(\lambda_0 - \lambda)| \big\|(\lambda_0 \operatorname{Id} - T)^{-1}\big\| \\ &< \|R_{\lambda_0}(T)\|^{-1} \|R_{\lambda_0}(T)\| \\ &= 1. \end{aligned}$$

Somit ist die Norm des Operators $(\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 \operatorname{Id} - T)^{-1}$ kleiner als 1 und aus der Bemerkung 1.5.2 erhält man, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n R_{\lambda_0}^n(T)$ konvergiert und zwar gegen $(\operatorname{Id} - (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 \operatorname{Id} - T)^{-1})^{-1}$. □

Bemerkung 1.5.9
Sei $\lambda_0 \in \rho(T)$ und $D \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}(T)\|^{-1}\}$. Dann gilt (aus dem Beweis des Satzes 1.5.7), dass sich die Resolventenabbildung

$$\begin{aligned} R_{(\cdot)}(T) : D &\to L(H) \\ \lambda &\to R_\lambda(T) \end{aligned}$$

als Potenzreihe darstellen lässt und zwar:

$$R_\lambda(T) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n R_{\lambda_0}^{n+1}(T).$$

Somit ist die Resolventenabbildung auf der ganzen Resolventemnege $\rho(T)$ analytisch, weil sie sich lokal als Potenzreihe darstellen lässt.

Tatsächlich ist es so, dass die Resolventenabbildung $R_{(\cdot)}$ analytisch ist auf $\rho(T)$, genau dann wenn die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : \rho(T) &\to \mathbb{C} \\ \lambda &\mapsto (R_\lambda x, y) \end{aligned}$$

für alle $x, y \in H$ analytisch ist auf $\rho(T)$.

Satz 1.5.10 (Liouville)
Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch und

$$\sup_{\omega \in \mathbb{C}} |f(\omega)| < \infty.$$

Dann

$$\exists c \in \mathbb{C}\ \forall \omega :\ f(\omega) = c.$$

Satz 1.5.11
Sei $T \in L(H)$. Dann gilt

1. *$\sigma(T)$ ist abgeschlossen*
2. *$\sigma(T) \neq \emptyset$.*

Beweis. **1.** Da aus dem obigen Satz folgt, dass $\rho(T)$ offen ist, muss $\sigma(T)$ abgeschlossen sein.

2. Wir nehmen an, dass $\sigma(T) = \emptyset$. Dann gilt $\rho(T) = \mathbb{C}$ und man erhält aus Bemerkung 1.5.9, dass Φ auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch ist. Die Abbildung $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist beschränkt auf ganz $\mathbb{C}$, weil $R_\lambda(T)$ beschränkt ist für alle $\lambda \in \rho(T)$. Der Satz von Liouville besagt, dass auf ganz $\mathbb{C}$ analytische, beschränkte Funktionen konstant sind. Wir zeigen nun noch, dass die Funktion gleich 0 sein muss. Es gilt

$$\begin{aligned} \|R_\lambda(T)\| &= \left\|(\lambda \operatorname{Id} - T)^{-1}\right\| \\ &= \left\| \lambda^{-1} \left(\operatorname{Id} - \frac{T}{\lambda} \right)^{-1} \right\| \\ &\to 0 \text{ wenn } |\lambda| \to \infty. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir, dass

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} (R_\lambda x, y) = 0 \quad \forall x, y \in H.$$

Daher muss $R_\lambda(T) = 0$ sein, das ist allerdings ein Widerspruch zur Definition der Resolvente und somit muss gelten: $\sigma(T) \neq \emptyset$. □

Satz 1.5.12
Sei $T \in L(H)$. Dann gilt

1. $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$ *existiert und* $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = r(T)$.
2. $T = T^*$. *Dann gilt* $\|T\| = r(T)$.

Beweis. **1.**Existenz des Limes

Sei $\alpha_n = \|T^n\|$. Es gilt

1. $\alpha_{n+m} = \|T^{n+m}\| \leq \|T^n\|\|T^m\| = \alpha_n\alpha_m$.
2. $\|T^n\| \leq \|T\|^n$ weil $\|TT\| \leq \|T\|\|T\|$.

Wähle $k, n \in \mathbb{N}$ fix, wähle $l \leq k$, $n = mk + l$

$$\alpha_n = \alpha_{mk+l} \leq \alpha_{mk}\alpha_l \leq \alpha_k^m \alpha_l$$
$$\alpha_n^{1/n} \leq \alpha_k^{m/n}\alpha_l^{1/n} = \alpha_k^{(n-l)/kn}\alpha_l^{1/n} = \alpha_k^{1/k}\alpha_k^{-l/kn}\alpha_l^{1/n}$$

Fixiere k und $n \to \infty$, dann erhält man

$$\limsup \alpha_n^{1/n} \leq \liminf \alpha_k^{1/k}$$

Der größte Häufungspunkt ist gleich dem kleinsten Häufungspunkt, das heißt der Limes existiert.

Wir zeigen nun, dass $r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$. Wir zeigen zuerst:

$$r(T) \leq \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ beliebig, sodass $|\lambda| > \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$. Dann konvergiert die Neumannreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^n} \in L(H)$ und ist $\lambda(\lambda \operatorname{Id} - T)^{-1}$. Somit ist $\lambda \in \rho(T)$. Es gilt also

$$r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\} \leq \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Wir zeigen nun:

$$r(T) \geq \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ beliebig, sodass $|\lambda| < \frac{1}{r(T)}$. Die Funktion

$$f : \lambda \to (R_{1/\lambda}(T)x, y)$$

ist für $x, y \in H$ analytisch auf $\{\lambda : \frac{1}{|\lambda|} > r(T)\}$ und somit auf $\{\lambda : |\lambda| < \frac{1}{r(T)}\}$. Die Funktion

$$g : \lambda \to \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n (T^n x, y)$$

ist für $x, y \in H$ auf der Menge $\{\lambda : |\lambda| < \frac{1}{2\|T\|}\}$ absolut konvergent und somit analytisch auf der Menge $\{\lambda : |\lambda| < \frac{1}{2\|T\|}\}$.

Aus dem Identitätssatz für analytische Funktionen erhält man, dass $f \equiv g$ auf $\{\lambda : |\lambda| < \frac{1}{r(T)}\}$. Weiters gilt, dass

$$\forall x \in H,\ \forall y \in H\ \exists M_{x,y} > 0 : \sup_n |\lambda^n (T^n x, y)| \leq M_{x,y}.$$

Das heißt die Familie der Operatoren $\lambda^n T^n$ ist schwach punktweise beschränkt. Aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit folgt aus schwacher punktweiser Beschränktheit die starke punktweise Beschränktheit, d.h. für alle $x \in H$ existiert ein $M_x > 0$, sodass

$$\sup_n \|\lambda^n T^n x\| \leq M_x.$$

Durch nochmaliges Anwenden des Prinzips der gleichmäßigen Beschränktheit folgt aus der starken punktweisen Beschränktheit die Normbeschränktheit,d.h

$$\sup_n \|\lambda^n T^n\| \leq M.$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} &|\lambda|^n \|T^n\| \leq M \Rightarrow \\ &|\lambda| \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq M^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \\ &|\lambda| \leq \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}}. \end{aligned}$$

Somit haben wir nun aus der Annahme $|\lambda| < \frac{1}{r(T)}$ erhalten, dass $|\lambda| \leq \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}}$. Also gilt $r(T) \geq \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.

2. Sei T selbstadjungiert, dann gilt

$$\begin{aligned} \left\|T^2\right\| &= \|T^*T\| \\ &= \sup\{(T^*Tx, x) : \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\{(Tx, Tx) : \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\|Tx\|^2 : \|x\| \leq 1\} \\ &= \|T\|^2. \end{aligned}$$

Induktiv gilt dann für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left\|T^{2^n}\right\|^{\frac{1}{2^n}} = \|T\|.$$

Man erhält also $\lim_{n\to\infty} \left\|T^{2^n}\right\|^{\frac{1}{2^n}} = \|T\|$ und folglich $\lim_{k\to\infty} \left\|T^k\right\|^{\frac{1}{k}} = \|T\|$. □

Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

Definition 1.5.13

1. $Q \subseteq L(H)$ ist schwach punktweise beschränkt :⇔
$$\forall f \in H\ \forall g \in H\ \exists M(f,g)\ \forall A \in Q:\ |(Af,g)| \leq M(f,g) \Leftrightarrow \sup_{A \in Q} |(Af,g)| \leq M(f,g)$$

2. $Q \subseteq L(H)$ ist stark punktweise beschränkt :⇔
$$\forall f \in H\ \exists M(f)\ \forall g \in H\ \forall A \in Q:\ |(Af,g)| \leq M(f)\|g\| \Leftrightarrow \sup_{g \in H, \|g\| \leq 1} \sup_{A \in Q} |(Af,g)| \leq M(f) \Leftrightarrow \sup_{A \in Q} \|Af\| \leq M(f).$$

3. $Q \subseteq L(H)$ ist normbeschränkt :⇔
$$\exists M\ \forall f \in H\ \forall g \in H\ \forall A \in Q:\ |(Af,g)| \leq M\|f\|\|g\| \Leftrightarrow \sup_{f \in H, \|f\| \leq 1} \sup_{A \in Q} \|Af\| \leq M \Leftrightarrow \sup_{A \in Q} \|A\| \leq M$$

Bemerkung 1.5.14
Es gilt natürlich 3. ⇒ 2. ⇒ 1. Die folgenden Sätze geben uns Auskunft über die umgekehrte Richtung.

Satz 1.5.15 (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit)
Sei $T_n : H \to H$ eine Familie von Operatoren, die stark punktweise beschränkt ist. Dann ist sie normbeschränkt.

Satz 1.5.16 (Folgerung)
Sei $T_n : H \to H$ eine Familie von Operatoren, die schwach punktweise beschränkt ist, dann ist die Familie auch stark punktweise beschränkt.

1.5.2 Fredholm'sche Alternative - kompakte Operatoren

Definition 1.5.17
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend. Die Funktion
$$\begin{aligned} F : D &\to L(H) \\ z &\mapsto F(z) \end{aligned}$$
ist analytisch, genau dann wenn für alle $x, y \in H$ gilt, dass die Funktion
$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto (F(z)x, y) \end{aligned}$$
analytisch ist.

Definition 1.5.18
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge. Eine Teilmenge $S \subset D$ heißt **diskret** in D, falls in D kein Häufungspunkt von S enthalten ist.

Beispiel 1.5.19

$$S = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right\}$$

ist diskret in $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ aber nicht in $D = \mathbb{C}$.

Bemerkung 1.5.20 (Wiederholung Kompaktheit)
Wir haben bereits gezeigt: $K \in L(H)$ ist kompakt,

1. falls $\overline{K(B_H)}^H$ kompakt ist in H.
2. falls das Bild jeder beschränkten Folge eine konvergente Teilfolge hat.
3. falls eine Folge von Operatoren $L_n \in L(H)$, für die gilt $\dim L_n(H) < \infty$, existieren, sodass

$$\lim_{n\to\infty} \|K - L_n\| = 0.$$

Satz 1.5.21 (Satz von Fredholm, Fredholm'sche Alternative)
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend. Sei $F : D \to L(H)$ analytisch und für alle $z \in D$ sei $F(z)$ ein kompakter Operator. Dann gilt
ENTWEDER

$$\forall z \in D \quad (\mathrm{Id} - F(z)) \textit{ ist kein Isomorphismus}$$

ODER es existiert eine diskrete Menge $S \subset D$, sodass

- $\forall z \in D \setminus S :$ $(\mathrm{Id} - F(z))$ *ist ein Isomorphismus.*
- $\forall z \in S :$ $(\mathrm{Id} - F(z))$ *ist nicht injektiv.*

Sprechweise: Entweder ist $\mathrm{Id} - F(z)$ nirgends ein Isomorphismus oder fast überall. In der Ausnahmemenge scheitert es an der Injektivität, d.h. sei $z \in S$, dann existiert ein $y \neq 0$, sodass $(\mathrm{Id} - F(z))(y) = 0 \Leftrightarrow y = F(z)y$. Der Operator F(z) hat somit einen Eigenwert.

Beweis. **Schritt 1:** Reduktion von kompakt auf endlichdimensional (Fredholm Determinanten): Aufgrund der Stetigkeit und der Kompaktheit von $F(z)$ gilt

$$\forall z_0 \in D \; \exists r > 0 \; \forall z \in D : |z - z_0| < r : \; \|F(z) - F(z_0)\| < \frac{1}{2},$$
$$\exists N \in \mathbb{N} \; \exists K \in L(H) : \dim K(H) < N : \; \|F(z_0) - K\| < \frac{1}{2}.$$

1. Auf $M_r := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ ist

$$(\mathrm{Id} - (F(z) - K)) \text{ invertierbar und } (\mathrm{Id} - (F(z) - K))^{-1} \in L(H), \tag{1.5.1}$$

weil

$$\begin{aligned} \operatorname{Id} - (F(z) - K) &= \operatorname{Id} - (F(z) - F(z_0) + F(z_0) - K) \\ \|F(z) - F(z_0) + F(z_0) - K\| &\leq \|F(z) - F(z_0)\| + \|F(z_0) - K\| \\ &< \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

Somit erhält man aus Bemerkung 1.5.2, dass die zugehörige Neumannreihe konvergent ist und $(\operatorname{Id} - (F(z) - K))$ invertierbar und die Inverse in $L(H)$ ist.

2. Auf $M_r := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ ist die Abbildung

$$z \mapsto (\operatorname{Id} - (F(z) - K))^{-1} \tag{1.5.2}$$

analytisch, weil $(\operatorname{Id} - (F(z) - K))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (F(z) - K)^n$.

3. zu F existieren 2 ONS: $\{x_i\}, \{y_i\}$, sodass

$$\forall x \in H: \; K(x) = \sum_{i=1}^{N} (x_i, x) y_i \text{ (Singulärwertzerlegung).} \tag{1.5.3}$$

4.

$$\begin{aligned} G(z) &= K(\operatorname{Id} - F(z) + K)^{-1} \\ G(z)(H) &\subseteq K(H) \Rightarrow \dim G(z)(H) < N \end{aligned} \tag{1.5.4}$$

5. $\forall x \in H$:

$$\begin{aligned} G(z)|_x &= \sum_{i=1}^{N} (x_i, (\operatorname{Id} - F(z) + K)^{-1}(x)) y_i \\ &= \sum_{i=1}^{N} ((\operatorname{Id} - F(z) + K)^{-1^*}(x_i), x) y_i \\ &= \sum_{i=1}^{N} (x_i(z), x) y_i, \text{ wobei} \\ x_i(z) &:= (\operatorname{Id} - F(z) + K)^{-1^*}(x_i). \end{aligned} \tag{1.5.5}$$

Reduktionsgleichung:

$$\begin{aligned} (\operatorname{Id} - G(z))(\operatorname{Id} - F(z) + K) &= \operatorname{Id} - F(z) + K - G(z)(\operatorname{Id} - F(z) + K) \\ &= \operatorname{Id} - F(z) + K - K \\ &= \operatorname{Id} - F(z). \end{aligned}$$

Da $(\operatorname{Id} - F(z) + K)$ eine Inverse besitzt, gilt: $\operatorname{Id} - G(z)$ ist Isomorphismus $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Id} - F(z)$ ist Isomorphismus und somit natürlich auch: $\operatorname{Id} - G(z)$ ist nicht injektiv $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Id} - F(z)$ ist nicht injektiv, d.h.

$$\exists y \neq 0 \in H: \; (\operatorname{Id} - F(z))y = 0 \Leftrightarrow \; \exists y \neq 0 \in H: \; (\operatorname{Id} - G(z))y = 0.$$

Schritt 2: Charakterisierung von Eigenlösungen von G(z).

$$G(z)(x) = \sum_{i=1}^{N} (x_i(z), x) y_i.$$

Wähle $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$ als Erweiterung von $\{y_m\}_{m=1}^{N}$. Sei $x \neq 0 \in H$ gegeben durch

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m y_m, \text{ wobei}$$
$$\beta_m = 0 \;\; m > N.$$

Dann gilt :

$$\begin{aligned}
&G(z)x = x \Longleftrightarrow \\
&\sum_{m=1}^{N} (x_m(z), \sum_{i=1}^{N} \beta_i y_i) y_m = \sum_{m=1}^{N} \beta_m y_m \Leftrightarrow \\
&\sum_{m=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} (x_m(z), \beta_i y_i) y_m = \sum_{m=1}^{N} \beta_m y_m \Leftrightarrow \\
&\sum_{i=1}^{N} \beta_i (x_m(z), y_i) = \beta_m \Leftrightarrow \\
&A(z)\beta = \beta,
\end{aligned}$$

wobei

$$A(z) = ((x_m(z), y_i))_{i,m=1}^{N}$$

und $\beta = (\beta_1, \cdots \beta_N) \neq 0$. Somit haben wir die Gleichung $G(z)x = x$ auf das endlichdimensionale Gleichungssystem $A(z)\beta = \beta$ reduziert. Es gilt für $\beta \neq 0 \in \mathbb{C}^N$

$$(\mathrm{Id} - A)\beta = 0 \Leftrightarrow \det(\mathrm{Id} - A(z)) \neq 0 \text{ (Fredholm Determinante) }.$$

3. Schritt: Sei

- $d(z) = \det(\mathrm{Id} - A(z))$
- $D_r = \{z \in M_r : z \mapsto d(z) \text{ ist analytisch } \}$
- $S_r = \{z \in D_r : d(z) = 0\}$.

Aus dem Identitätssatz für analytische Funktionen folgt, dass entweder $D_r = S_r$ oder $S_r \subseteq D_r$ diskret.

1. $D_r = S_r$, dann gilt $(\mathrm{Id} - F(z))$ ist kein Isomorphismus auf D_r.
2. $S_r \subseteq D_r$ diskret. Dann gilt $\forall z \in S_r :$ $\mathrm{Id} - F(z)$ ist nicht injektiv.

Zu zeigen ist nun noch, dass

$$\forall z \in D_r \setminus S_r : \operatorname{Id} - F(z) \text{ ist bijektiv.}$$

Wir wissen, dass $\operatorname{Id} - F(z)$ injektiv ist auf $D_r \setminus S_r$. Also benötigen wir noch Surjektivität. (Satz über Stetigkeit der Inversen: Aus stetig+injektiv+surjektiv folgt die Stetigkeit der Inversen für Operatoren zwischen Banachräumen.)

$$\operatorname{Id} - G(z) \text{ ist surjektiv } \Leftrightarrow \ \forall y \in H \ \exists x \in H : \ (\operatorname{Id} - G(z))x = y.$$

Formel für x:

$$x = y + \sum_{n=1}^{N} \beta_n y_n$$

und $\beta = (\beta_1, \cdots \beta_N)$ ist Lösung von

$$(\operatorname{Id} - A(z))(\beta_m)_{m=1}^N = ((x_m(z), y))_{m=1}^N .$$

□

Folgerungen aus dem Beweis:

Satz 1.5.22
$A \in L(H)$ kompakt und $\forall \lambda \neq 0 \in \mathbb{C}$ sei $(\lambda \operatorname{Id} - A)$ surjektiv. Dann gilt $(\lambda \operatorname{Id} - A)$ ist injektiv.

Beweis. Zu $F(\lambda) = \lambda^{-1} A$ bestimme $G(\lambda)$ sodass

$$G(\lambda) \in L(H) \text{ und } \dim G(\lambda) < \infty$$

und bestimmen $T(\lambda) \in L(H)$ Isomorphismus, sodass

$$(\operatorname{Id} - F(\lambda))(T(\lambda)) = \operatorname{Id} - G(\lambda).$$

$(\operatorname{Id} - F(\lambda))$ ist surjektiv $\Rightarrow$ $(\operatorname{Id} - G(\lambda))$ ist surjektiv. Aus dem Beweis zum Satz von Fredholm erhält man $(\operatorname{Id} - G(\lambda))$ ist surjektiv $\Leftrightarrow$ $\det(\operatorname{Id} - A(z)) \neq 0$ und das ist äquivalent dazu (gilt für Matrizen), dass $\operatorname{Id} - G(\lambda)$ injektiv ist und somit auch $\operatorname{Id} - F(\lambda)$.

□

Satz 1.5.23
$A \in L(H)$ kompakt. $\forall \lambda \neq 0 \in \mathbb{C}$ gilt, dass $(\lambda \operatorname{Id} - A)(H)$ abgeschlossen ist.

Beweis. Sei $F(\lambda) = \lambda^{-1} A$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&(\lambda \operatorname{Id} - A)(H) \text{ abgeschlossen } \Leftrightarrow \\
&\lambda \left(\operatorname{Id} - \frac{1}{\lambda} A \right) (H) \text{ abgeschlossen } \Leftrightarrow \\
&\lambda \left(\operatorname{Id} - F(\lambda) \right) (H) \text{ abgeschlossen } \Leftrightarrow \\
&\lambda \left(\operatorname{Id} - G(\lambda) \right) (H) \text{ abgeschlossen },
\end{aligned}$$

das ist wahr weil $\dim G(\lambda)(H) < \infty$ und die endlichdimensionale Störung der Identität abgeschlossen ist. □

Satz 1.5.24
$A \in L(H)$ kompakt. λ ist EW von $A \Rightarrow \overline{\lambda}$ ist EW von A^*.

Beweis. Da λ EW von A, ist $(\lambda \operatorname{Id} - A)$ nicht injektiv. Dann folgt aus Satz 1.5.22, dass $(\lambda \operatorname{Id} - A)$ nicht surjektiv ist. Aus Satz 1.5.23 wissen wir, dass $(\lambda \operatorname{Id} - A)(H)$ abgeschlossen ist, d.h.

$$\overline{(\lambda \operatorname{Id} - A)(H)}^{\perp} = (\lambda \operatorname{Id} - A)(H)^{\perp}$$

und somit

$$H = (\lambda \operatorname{Id} - A)(H)^{\perp} \oplus (\lambda \operatorname{Id} - A)(H).$$

Aufgrund der nicht erfüllten Surjektivität weiß man nun, dass ein $y \neq 0 \in (\lambda \operatorname{Id} - A)(H)^{\perp}$ existieren muss, sodass für alle $x \in H$ gilt

$$((\lambda \operatorname{Id} - A)x, y) = 0.$$

Weiters gilt dann für dieses y und alle $x \in H$

$$\begin{aligned} ((\lambda \operatorname{Id} - A)x, y) = 0 &\Leftrightarrow \\ (x, (\lambda \operatorname{Id} - A)^* y) = 0 &\Leftrightarrow \\ (x, (\overline{\lambda} \operatorname{Id} - A^*) y) = 0. \end{aligned}$$

Also existiert ein $y \neq 0 \in H$, sodass

$$(\overline{\lambda} \operatorname{Id} - A^*)(y) = 0.$$

□

Satz 1.5.25
$A \in L(H)$ kompakt und $\lambda \neq 0 \in \mathbb{C}$. Für alle $y \in H$ gilt:

$$\exists x \in H : \ (\lambda \operatorname{Id} - A)x = y \Leftrightarrow y \in \ker(\overline{\lambda} \operatorname{Id} - A^*)^{\perp}.$$

Beweis. Aus Satz 1.5.23 wissen wir, dass

$$\operatorname{im}(\lambda \operatorname{Id} - A) = \overline{\operatorname{im}(\lambda \operatorname{Id} - A)}^{H}.$$

Dann gilt

$$\operatorname{im}(\lambda \operatorname{Id} - A) = \left(\operatorname{im}(\lambda \operatorname{Id} - A)^{\perp}\right)^{\perp}.$$

Weiters gilt $\forall x, y \in H$

$$((\lambda \operatorname{Id} - A)x, y) = (x, (\lambda \operatorname{Id} - A)^* y) = (x, (\overline{\lambda} \operatorname{Id} - A^*) y).$$

und es gilt für alle $B \in L(H)$

$$\begin{aligned} y \in (\operatorname{im} B)^{\perp} &\Leftrightarrow \\ \forall x \in H : \ (Bx, y) = 0 &\Leftrightarrow \\ \forall x \in H : \ (x, B^* y) = 0 &\Leftrightarrow \\ B^* y = 0 &\Leftrightarrow \\ y \in \ker B^*. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\left(\mathrm{im}(\lambda \operatorname{Id} - A)^{\perp}\right)^{\perp} = \ker(\overline{\lambda} \operatorname{Id} - A^*)^{\perp}.$$

□

Satz 1.5.26
$A \in L(H)$ kompakt. Dann gilt

- *entweder* $\forall y \in H\ \exists! x \in H : (\operatorname{Id} - A)x = y$, *d.h.* $\operatorname{Id} - A$ *ist ein Isomorphismus*
- *oder* $\exists x \neq 0 \in H : (\operatorname{Id} - A)x = 0$, *d.h.* $\operatorname{Id} - A$ *nicht injektiv.*

Beweis. Anwendung der Fredholm'schen Alternative auf den Operator

$$F(z) = zA \text{ für } z \in \mathbb{C}.$$

$z \to F(z)$ ist analytisch in $\mathbb{C}$. Dann gilt für $|z| \leq \|A\|^{-1}$, dass wegen Bemerkung 1.5.2 $(\operatorname{Id} - F(z))$ invertierbar ist und $(\operatorname{Id} - F(z))^{-1} \in L(H)$. Somit ist die erste Alternative des Satzes von Fredholm falsch. Aus der zweiten Alternative erhält man, dass

$$(\operatorname{Id} - A) \text{ Isomorphismus ist, oder nicht injektiv.}$$

□

1.5.3 Riesz-Schauder Theorie

Satz 1.5.27 (Spektralsatz für kompakte Operatoren)
Sei $A \in L(H)$ kompakt. Dann gilt

1. *$\sigma(A)$ hat $\{0\}$ als einzigen Häufungspunkt.*
2. *$\lambda \in \sigma(A), \lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda$ ist Eigenwert.*

Beweis. Sei $A \in L(H)$. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} F : \mathbb{C} &\to L(H) \\ z &\mapsto zA \end{aligned}$$

Sei $|z| < \|A\|^{-1}$, dann gilt $\|zA\| < 1$ und die Neumannreihe konvergiert gegen $(\operatorname{Id} - zA)^{-1} \in L(H)$. Somit existiert ein $z_0 \in \mathbb{C}$, sodass

$$(\operatorname{Id} - F(z_0)) \text{ ist Isomorphismus.}$$

Damit ist die 1. Fredholm'sche Alternative ausgeschlossen. Also gilt die 2. Fredholm'sche Alternative.

$$\begin{aligned} &(\operatorname{Id} - F(z)) \text{ ist kein Isomorphismus } \Leftrightarrow \\ &(\operatorname{Id} - zA) = z(1/z \operatorname{Id} - A) \text{ ist kein Isomorphismus } \Leftrightarrow \\ &(1/z \operatorname{Id} - A) \text{ ist kein Isomorphismus } \Leftrightarrow \\ &\frac{1}{z} \in \sigma(A) \end{aligned}$$

Für alle $z \in \mathbb{C}$, für die $(\mathrm{Id} - F(z))$ kein Isomorphismus ist, wissen wir, dass es an der Injektivität scheitert, d.h.

$$\begin{aligned} \exists x \neq 0 \in H : (1/z \,\mathrm{Id} - A)x = 0 \Leftrightarrow \\ Ax = \frac{1}{z}x \Rightarrow \\ \frac{1}{z} \text{ ist EW von A.} \end{aligned}$$

Sei

$$S = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Id} - F(\lambda) \text{ ist kein Isomorphismus }\} = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : 1/z \in \sigma(A)\}.$$

S ist eine diskrete Menge und somit ist 0 der einzige Häufungspunkt im Spektrum $\sigma(T)$. $\square$

Bemerkung 1.5.28
Ist H unendlichdimensionaler Hilbertraum, dann ist $0 \in \sigma(T)$. Nimmt man nämlich an, dass $0 \in \rho(T)$, dann ist T stetig invertierbar und $\mathrm{Id} = TT^{-1}$ ist kompakt auf H. Dann gilt allerdings, dass H endlichdimensional sein muss, da gilt:

$$\mathrm{Id} : H \to H \text{ ist kompakt } \Leftrightarrow H \text{endlichdimensional.}$$

Kapitel 2

Distributionentheorie

Folgt dem Volesungsskriptum von J. Cigler [Cig].

Konzept von L.Schwartz
Distributionen können als eine Verallgemeinerung des Begriffs der Funktion angesehen werden. Diese sogennante „verallgemeinerte Funktionen“ spielen vor allem im Bereich der partiellen Differntialgleichungen und der Fourieranalyse eine große Rolle.

2.1 Definitionen: Testfuntkionen - Distributionen

Definition 2.1.1 (Raum der Testfunktionen)
Der Raum der Testfunktionen $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ sei die Menge aller komplexwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$, die unendlich oft differenzierbar sind und kompakten Träger besitzen.

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) = C_c^\infty(\mathbb{R}) = \{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}), \operatorname{supp}\varphi \subset K, K \subset \mathbb{R} \text{ kompakt}\}.$$

Bemerkung 2.1.2
$\mathcal{D}$ ist ein Vektorraum. Seine Elemente werden als Testfunktionen bzw. Grundfunktionen bezeichnet.

Beispiel 2.1.3 (Beispiele für Funktionen aus $\mathcal{D}(\mathbb{R})$)

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|}}, & \text{falls } |x| < 1 \\ 0, & \text{falls } |x| \geq 1. \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & \text{falls } |x| < 1 \\ 0, & \end{cases}$$

$$\rho_\alpha(x) = \frac{h(\frac{x}{\alpha})}{\int_{\mathbb{R}} h(\frac{x}{\alpha})dx} \qquad \alpha > 0.$$

Bemerkung 2.1.4

- $\rho_\alpha \geq 0$, $\operatorname{supp}\rho_\alpha \subseteq [-\alpha, \alpha]$

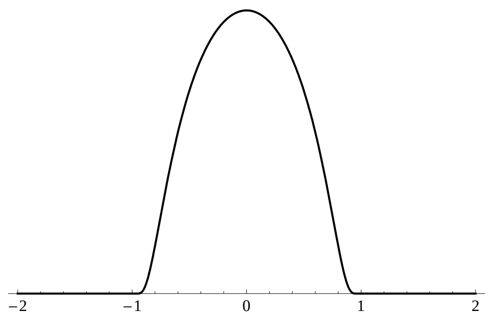

Abbildung 2.1: Testfunktion $h(x)$

- $\int_{\mathbb{R}} \rho_\alpha(x)dx = 1$

Proposition 2.1.5
Jede stetige Funktion mit kompaktem Träger lässt sich gleichmäßig durch Testfunktionen approximieren, d.h.

$$\forall \epsilon > 0 \; \forall f \in C_c(\mathbb{R}) \; \exists g \in C_c^\infty(\mathbb{R}) : sup_x |f(x) - g(x)| < \epsilon.$$

Bemerkung 2.1.6
$\mathcal{D}$ liegt also dicht in der Menge aller stetigen Funktionen mit kompaktem Träger bezüglich der gleichmäßigen Konvergenz.

Beweis. Kann nachgelesen werden in [Cig]. □

Proposition 2.1.7

$$\forall f \in C^\infty(\mathbb{R}) \; \forall [a,b] \; \exists \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : g|_{[a,b]} = f.$$

Beweis. Sei vorerst $f \equiv 1$. Sei h stetig mit kompaktem Träger und $h \equiv 1$ auf $[a-\alpha, b+\alpha]$, $\alpha > 0$ beliebig. Sei

$$\varphi_1(x) := \int_{\mathbb{R}} h(t)\rho_\alpha(x-t)dt \in \mathcal{D}.$$

Für $x \in [a,b]$ ist $\varphi_1(x) = 1$.

Ist nun $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, dann auch $f(x)\varphi_1(x)$. Somit gilt $f\varphi_1 \in \mathcal{D}$ und $f\varphi_1 \equiv f$ auf $[a,b]$. □

Wir führen nun auf D einen Konvergenzbegriff ein.

Definition 2.1.8 (Konvergenz der Testfunktionen)
Eine Folge $\varphi_n \in \mathcal{D}$ konvergiert in $\mathcal{D}$ gegen die Testfunktion φ, falls

1. $\exists$ kompaktes Intervall $[a,b]$ $\forall n \in \mathbb{N} : \operatorname{supp} \varphi_n \subseteq [a,b]$.

2. Für alle $l \in \mathbb{N}$ konvergieren die l-ten Ableitungen $\varphi_n^{(l)}$ gegen die l-ten Ableitungen der Grenzfunktion $\varphi^{(l)}$, d.h.

$$\forall \epsilon > 0 \; \forall l \in \mathbb{N} \; \exists N_l \; \forall n \geq N_l : \sup_x \left| \varphi_n^{(l)}(x) - \varphi^{(l)}(x) \right| < \epsilon.$$

Beispiel 2.1.9

1. Sei $\varphi \in \mathcal{D}$ und $\varphi_n(x) = \frac{1}{n}\varphi(x)$. Dann gilt $\varphi_n(x) \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$.

2. Sei $\varphi \in \mathcal{D}$ und $\varphi_n(x) = \frac{1}{n}\varphi(\frac{x}{n})$. Dann gilt $\varphi_n(x) \overset{\mathcal{D}}{\not\to} 0$, da die Elemente der Folge keinen gemeinsamen Träger besitzen.

Definition 2.1.10 (Cauchyfolge)
φ_n ist Cauchyfolge in $\mathcal{D}$, falls

1. $\exists$ kompaktes Intervall $[a, b]$ $\forall n \in \mathbb{N} : \operatorname{supp} \varphi_n \subseteq [a, b]$.

2. $\forall l \in \mathbb{N}$ ist die Folge $\varphi_n^{(l)}$ eine Cauchyfolge bezüglich der gleichmäßigen Konvergenz, d.h.

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n, m > N \; \forall l \in \mathbb{N} : \sup_x \left| \varphi_n^{(l)}(x) - \varphi_m^{(l)}(x) \right| < \epsilon.$$

Proposition 2.1.11
$\mathcal{D}$ ist vollständig, d.h. zu jeder Cauchyfolge in $\mathcal{D}$ existiert ein Grenzwert in $\mathcal{D}$.

Beweis. Sei $\varphi_n \in \mathcal{D}$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{D}$, dann ist $\varphi_n^{(l)}$ eine Cauchyfolge bezüglich der gleichmäßigen Konvergenz für alle $l \in \mathbb{N}_0$. Aus der Vollständigkeit von $(C(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ folgt, dass für alle $l \in \mathbb{N}_0$ eine stetige Funktion ψ_l existiert, sodass

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \varphi_n^{(l)} - \psi_l \right\|_\infty = 0.$$

Wir zeigen nun, dass $\psi_0 \in \mathcal{D}$ und $\psi_l = \psi_0^{(l)}$. ψ_0 hat kompakten Träger, da die φ_n für alle $n \in \mathbb{N}$ außerhalb eines kompakten Intervalls verschwinden.

$$\begin{aligned}
\psi_l(x) &= \lim_{n\to\infty} \varphi_n^{(l)} \\
&= \lim_{n\to\infty} [\varphi_n^{(l)}(0) + \int_0^x \varphi_n^{(l+1)}(t)dt] \\
&= \psi_l(0) + \int_0^x \psi_{l+1}(t)dt.
\end{aligned}$$

Somit gilt $\psi_l'(t) = \psi_{l+1}(t)$ und

$$\psi_0^{(l+1)} = \psi_1^{(l)} = \cdots = \psi_{l+1}.$$

□

Definition 2.1.12 (Distribution)
Unter einer Distribution versteht man ein lineares, stetiges Funktional F auf $\mathcal{D}$. Das ist eine Funktion $F : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$, die linear und stetig ist , d.h.

1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}\ \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D} :\ F(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha F(\varphi_1) + \beta F(\varphi_2)$.

2. $\forall \varphi_n \in \mathcal{D}, \varphi \in D : \varphi_n \overset{\mathcal{D}}{\to} \varphi \Rightarrow F(\varphi_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} F(\varphi)$.

Somit ist der Raum $\mathcal{D}'$ der stetigen, linearen Funktionale auf $\mathcal{D}$ der Raum der Distributionen.

Beispiel 2.1.13

1. (reguläre Distribution).
   Sei $f \in L^1_{lok}(\mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \int_K |f|dx < \infty\ \forall K \subset \mathbb{R} \text{ kompakt} \right\}$. Die Abbildung
   $$\begin{aligned} T_f : D &\to \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)dt \end{aligned}$$
   ist eine Distribution, genannt reguläre Distribution.

   - $x^m, e^x \in L^1_{lok}(\mathbb{R})$ und erzeugen somit reguläre Distributionen.
   - $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2} \notin L^1_{lok}(\mathbb{R})$.

2. (Heaviside Funktion - reguläre Distribution)
   $$H(t) = \begin{cases} 0, & \text{auf } (-\infty, 0) \\ 1, & \text{auf } [0, \infty) \end{cases}$$
   $H \in L^1_{lok}$ und definiert somit eine reguläre Distribution
   $$T_H(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} H(t)\varphi(t)dt.$$

3. (Dirac - Distribution). Die Abbildung
   $$\begin{aligned} \delta : D &\to \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto \varphi(0) \end{aligned}$$
   ist eine nicht reguläre Distribution.

Bemerkung 2.1.14
Im Folgenden schreiben wir anstelle von $F(\varphi)$ bzw. $T_f(\varphi)$ auch $\langle F, \varphi \rangle$ bzw. $\langle f, \varphi \rangle$.

Wir zeigen nun, dass durch die obige Abbildung T_f tatsächlich eine Distribution definiert wird.

Beweis. Es gilt

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)dt.$$

Da $\operatorname{supp}\varphi$ kompakt ist (sei $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [a,b]$) gilt

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)dt\right| &\leq \int_a^b |f(t)||\varphi(t)|dt \\ &\leq \sup_{t\in[a,b]} |\varphi(t)| \int_a^b |f(t)|dt < \infty.\end{aligned}$$

T_f existiert also für alle $\varphi \in \mathcal{D}$. T_f ist linear, zu zeigen ist Stetigkeit. Seien $\varphi_n \in \mathcal{D}$, $\varphi_n \to 0$ in $\mathcal{D}$. Dann gilt $\|\varphi_n\|_\infty \to 0$ und $\operatorname{supp}\varphi_n \subseteq [a,b]$.

$$\begin{aligned}|T_f(\varphi)| &= \left|\int_a^b f(t)\varphi_n(t)dt\right| \\ &\leq \|\varphi_n\|_\infty \int_a^b |f(t)|dt \\ &= K\|\varphi_n\|_\infty \to 0.\end{aligned}$$

□

2.2 Rechenregeln

$\mathcal{D}'$ ist ein Vektorraum (über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$) bezüglich der Operationen

$$\begin{aligned}\forall F_1, F_2 \in \mathcal{D}' &: \langle F_1 + F_2, \varphi\rangle := \langle F_1, \varphi\rangle + \langle F_2, \varphi\rangle \\ \forall \lambda \in \mathbb{C}\ \forall F \in \mathcal{D}' &: \langle \lambda F, \varphi\rangle := \lambda \langle F, \varphi\rangle .\end{aligned}$$

Für reguläre Distributionen stimmen diese Operationen mit den punktweisen Operationen der entsprechenden Funktion f überein, d.h.

$$\begin{aligned}\langle F_1 + F_2, \varphi\rangle &= \langle f_1 + f_2, \varphi\rangle \\ \langle \lambda F, \varphi\rangle &= \langle \lambda f, \varphi\rangle .\end{aligned}$$

Man kann zwar zwei Distributionen nicht miteinder multiplizieren, aber es lässt sich ein Produkt mit unendlichoft differenzierbaren Funktionen erklären.

Definition 2.2.1
Sei $F \in D'$, $a \in C^\infty(\mathbb{R})$. Dann ist die Distribution aF folgendermaßen definiert:

$$\langle aF, \varphi\rangle := \langle F, a\varphi\rangle \qquad \varphi \in \mathcal{D},$$

wobei $(a\varphi)(t) = a(t)\varphi(t)$

Diese Definition ist sinnvoll, da $\forall a \in C^\infty$ und $\forall \varphi \in D$ $a\varphi \in \mathcal{D}$ ist. Für reguläre F gilt

$$\langle aF, \varphi\rangle = \langle af, \varphi\rangle.$$

Wir zeigen, dass $aF \in D'$. Es gilt

$$\begin{aligned}\langle aF, \varphi_1 + \varphi_2 \rangle &= \langle F, a(\varphi_1 + \varphi_2) \rangle = \langle F, a\varphi_1 \rangle + \langle F, a\varphi_2 \rangle \\ &= \langle aF, \varphi_1 \rangle + \langle aF, \varphi_2 \rangle \\ \langle aF, \lambda\varphi \rangle &= \langle F, a(\lambda\varphi) \rangle = \lambda \langle F, a\varphi \rangle = \lambda \langle aF, \varphi \rangle.\end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass $\varphi_n \overset{\mathcal{D}}{\to} 0$. Somit existiert ein kompaktes Intervall $[-N, N]$, sodass $\forall n \in \mathbb{N}\ \operatorname{supp} \varphi_n \subseteq [-N, N]$. Dann gilt $\operatorname{supp} a\varphi_n \subseteq [-N, N]$. Nach der Leibniz'schen Regel gilt

$$(a\varphi_n)^{(k)} = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} a^{(l)} \varphi^{(k-l)}$$

Da alle $\varphi^{(k-l)}$ gleichmäßig gegen 0 streben und alle $a^{(l)}$ auf $[-N, N]$ beschränkt sind, gilt

$$(a\varphi_n)^{(k)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ gleichmäßig } \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Da $F \in \mathcal{D}'$ und somit stetig auf $\mathcal{D}$, folgt

$$\langle aF, \varphi_n \rangle = \langle F, a\varphi_n \rangle \to 0 \text{ falls } a\varphi_n \overset{\mathcal{D}}{\to} 0.$$

Somit gilt $\varphi_n \overset{\mathcal{D}}{\to} 0 \Leftrightarrow \langle aF, \varphi_n \rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. □

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

- $a(F_1 + F_2) = aF_1 + aF_2$
- $(a_1 + a_2)F = a_1F + a_2F$
- $a_1(a_2F) = (a_1a_2)F$
- $1 \cdot F = F$, wobei 1 die Funktion $a \equiv 1$ ist.
- Die Multiplikation mit einer Funktion $a \equiv \lambda$ ergibt dasselbe wie mit der komplexen Zahl λ.

Beispiel 2.2.2
$\langle a\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, a\varphi \rangle = a(0)\varphi(0) = \langle a(0)\delta, \varphi \rangle$. Somit gilt für alle $a \in C^\infty$ $a\delta = a(0)\delta$. Für $a(x) = x$ erhält man $x\delta = 0$.

Es hat keinen Sinn vom Funktionswert einer Distribution F an einer Stelle x_0 zu sprechen. Man definiert die Gleichheit zweier Distributionen auf einer offenen Menge:

Definition 2.2.3

1. $F \in \mathcal{D}'$, (a, b) offenes Intervall in $\mathbb{R}$.

$$F \equiv 0 \text{ auf } (a, b) :\Leftrightarrow \ \forall \varphi \in \mathcal{D} \operatorname{supp} \varphi \subset (a, b) : \langle F, \varphi \rangle = 0.$$

2. $F_1, F_2 \in \mathcal{D}'$

$$F_1 \equiv F_2 \text{ auf } (a, b) :\Leftrightarrow F_1 - F_2 \equiv 0 \text{ auf } (a, b).$$

Beispiel 2.2.4

1. (Heaviside Funktion - reguläre Distribution) Man betrachte die reguläre Distribution

$$T_H = \langle H, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} H(t)\varphi(t)dt,$$

die durch die Heaviside Funktion

$$H(t) = \begin{cases} 0, & \text{auf } (-\infty, 0) \\ 1, & \text{auf } [0, \infty) \end{cases}$$

definiert ist. Es gilt für die Distribution T_H

$$\begin{aligned} \forall M \; T_H &\equiv 0 \text{ auf } (-M, 0) \\ T_H &\equiv 1 \text{ auf } (0, M). \end{aligned}$$

Denn, sei $\operatorname{supp} \varphi \subseteq (0, \infty)$, dann gilt

$$\langle H, \varphi \rangle = \int_0^{\infty} \varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)dt = \langle 1, \varphi \rangle.$$

Sei $\operatorname{supp} \varphi \subseteq (-\infty, 0)$, dann gilt

$$\langle H, \varphi \rangle = 0 = \langle 0, \varphi \rangle.$$

2. (δ Distriution) $\delta \equiv 0$ auf $R \setminus \{0\}$.

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) = 0 \Leftrightarrow 0 \notin \operatorname{supp} \varphi.$$

Man kann nun auch eine „lineare Variablentransformation“ für Distributionen definieren. Als Motivation betrachten wir die lineare Variablentransformation einer lokal integrierbaren Funktion und die Auswirkung auf die dadurch definierte reguläre Distribution. Sei $f \in L^1_{lok}$, $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ und $\lambda \neq 0$. Dann gilt für alle $\varphi \in \mathcal{D}$

$$T_f \varphi = \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)dt.$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(\lambda x + \mu)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(y)\varphi\left(\frac{y-\mu}{\lambda}\right)\frac{dy}{|\lambda|}.$$

Sei

$$\begin{aligned} f_{\lambda,\mu}(x) &:= f(\lambda x + \mu) \\ \varphi_{\lambda,\mu}(y) &:= \frac{1}{|\lambda|}\varphi\left(\frac{y-\mu}{\lambda}\right). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$T_{f_{\lambda,\mu}}\varphi = \langle f(\lambda \cdot + \mu), \varphi \rangle = \left\langle f, \frac{1}{|\lambda|}\varphi\left(\frac{\cdot - \mu}{\lambda}\right)\right\rangle = T_f \varphi_{\lambda,\mu}.$$

Definition 2.2.5
Sei $F \in \mathcal{D}'$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ und $\lambda \neq 0$. Dann bezeichnet $F(\lambda x + \mu)$ die folgende Distribution

$$\langle F(\lambda x + \mu), \varphi \rangle := \langle F(x), \varphi_{\lambda,\mu} \rangle.$$

Beispiel 2.2.6

$$\langle \delta(x - x_0), \varphi(x) \rangle = \varphi(x_0).$$
$$\delta(\lambda x) = \frac{1}{|\lambda|}\delta(x).$$

Definition 2.2.7
$F \in \mathcal{D}'$ heißt gerade Distribution, falls $F(-x) = F(x)$.
$F \in \mathcal{D}'$ heißt ungerade Distribution, falls $F(-x) = -F(x)$.

Beispiel 2.2.8
δ ist gerade.

2.3 Konvergenz von Distributionen

Definition 2.3.1 (Konvergenz von Distributionen in $\mathcal{D}'$)
Sei F_n eine Folge von Distributionen in $\mathcal{D}'$ und $F \in D'$.

$$F_n \overset{D'}{\to} F :\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} F_n = F \text{ in } \mathcal{D}' \Leftrightarrow \ \forall \varphi \in \mathcal{D} : \lim_{n\to\infty} \langle F_n, \varphi \rangle = \langle F, \varphi \rangle.$$

Beispiel 2.3.2
Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Funktionen

$$\sin_\lambda : t \mapsto \sin \lambda t$$
$$\cos_\lambda : t \mapsto \cos \lambda t$$
$$e_\lambda : t \mapsto e^{i\lambda t}$$

sind in L^1_{lok} und definieren somit reguläre Distributionen. Es gilt

$$\lim_{\lambda\to\infty} T_{\sin_\lambda} = \lim_{\lambda\to\infty} T_{\cos_\lambda} = \lim_{\lambda\to\infty} T_{e_\lambda} = 0 \text{ in } \mathcal{D}'.$$

Wir zeigen also

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} : \lim_{\lambda\to\infty} \langle \sin(\lambda t), \varphi(t) \rangle = \langle 0, \varphi(t) \rangle = 0.$$

$$\begin{aligned}
\forall \varphi \in \mathcal{D} : \langle \sin(\lambda t), \varphi(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\lambda t)\varphi(t)dt \\
&= \frac{\cos(\lambda t)\varphi(t)}{-\lambda}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\lambda t)\varphi'(t)dt, \text{ somit gilt}
\end{aligned}$$
$$\forall \varphi \in \mathcal{D} : |\langle \sin(\lambda t), \varphi(t) \rangle| \leq \frac{|\mathrm{supp}(\varphi)| \|\varphi'\|_\infty}{|\lambda|}.$$

Da $|\mathrm{supp}(\varphi)| \|\varphi'\|_\infty$ beschränkt ist, gilt $\lim_{\lambda\to\infty} \langle \sin(\lambda \cdot), \varphi(t) \rangle = 0$.

Konvergenz gegen die Delta-Distribution

Satz 2.3.3 (Dirac-Folge)
Sei $f_n \in L^1_{lok}(\mathbb{R})$ und

1. $\exists T > 0, K < \infty\ \forall n \in \mathbb{N} \int_{-T}^{T} |f_n(t)| dt \leq K$,
2. $\forall \tau > 0$:
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\{\tau \leq |t| \leq \frac{1}{\tau}\}} |f_n(t)| = 0$$
d.h. $f_n(t)$ konvergiert gleichmäßig gegen 0 auf jeder Menge der Gestalt $\{t \in \mathbb{R} : \tau \leq |t| \leq \frac{1}{\tau}\}$,
3. $\forall \tau > 0 :\ \lim_{n\to\infty} \int_{-\tau}^{\tau} f_n(t) dt = 1$.

Dann gilt
$$\forall \varphi \in \mathcal{D} : \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) f_n(t) dt \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(0),$$
d.h. die reguläre Distribution erzeugt durch f_n konvergiert gegen die Delta Distribution in $\mathcal{D}'$, d.h. $T_{f_n} \overset{\mathcal{D}'}{\to} \delta$.

Bemerkung 2.3.4
Die Voraussetzungen des Satzes stellen sich den Voraussetzungen des Satzes von Lebesgue (Satz von der dominierten Konvergenz) entgegen, in dem Sinn, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine integrierbare Majorante besitzt:
$$\int \sup_n |f_n(t)| dt = \infty.$$
Die Limiten und Integrale können nicht vertauscht werden.

Beweis. Sei $\varphi \in \mathcal{D}$, $\tau > 0$, $n \in \mathbb{N}$.
$$\begin{aligned}\langle f_n, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} f_n(t)\varphi(t) dt \\ &= \int_{|t|<\tau} f_n(t)\varphi(t) dt + \int_{|t|\geq\tau} f_n(t)\varphi(t) dt \\ &= \underbrace{\varphi(0) \int_{|t|<\tau} f_n(t) dt}_{I_1} + \underbrace{\int_{|t|<\tau} f_n(t)(\varphi(t) - \varphi(0)) dt}_{I_2} + \underbrace{\int_{|t|\geq\tau} f_n(t)\varphi(t) dt}_{I_3}.\end{aligned}$$
Es gilt $\forall \tau > 0$
$$I_1 = \varphi(0) \int_{|t|<\tau} f_n(t) dt \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(0).$$
Es gilt
$$|\varphi(t) - \varphi(0)| = \left| \int_0^t \varphi'(x) dx \right| \leq \|\varphi'\|_\infty |t|.$$

Somit gilt $\forall \tau \leq T$

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \int_{|t|<\tau} \|\varphi'\|_\infty |t||f_n(t)|dt \\ &\leq \tau \|\varphi'\|_\infty \int_{-\tau}^{\tau} |f_n(t)|dt \\ &\leq K\tau \|\varphi'\|_\infty. \end{aligned}$$

Ist $\epsilon > 0$, dann wähle $\tau > 0$ so klein, dass $\tau \leq T$ und $K\tau\|\varphi'\|_\infty < \epsilon$ und $\operatorname{supp}\varphi \subseteq \left[-\frac{1}{\tau}, \frac{1}{\tau}\right]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |I_3| &= \left| \int_{|t|\geq\tau} f_n(t)\varphi(t)dt \right| \\ &\leq \int_{\tau\leq|t|\leq\frac{1}{\tau}} |f_n(t)\varphi(t)|dt \\ &\leq \sup_{\tau\leq|t|\leq\frac{1}{\tau}} |f_n(t)| \int |\varphi(t)|dt. \end{aligned}$$

Zu $\epsilon > 0$ wähle $N_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass für alle $n > N_0$ $|I_3| < \epsilon$ und $|I_1 - \varphi(0)| < \epsilon$. Dann gilt

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N_0 : |\langle f_n, \varphi \rangle - \varphi(0)| < \epsilon.$$

□

Korollar 2.3.5
Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = 1$. Sei $f_n(t) = \lambda_n f(\lambda_n t)$ und $\lambda_n \to \infty$. Dann gilt

$$f_n \overset{D'}{\to} \delta, \text{ für } n \to \infty.$$

Bemerkung 2.3.6
Wir schreiben $f_n \overset{D'}{\to} \delta$ und meinen, dass die reguläre Distribution T_{f_n} erzeugt durch f_n konvergiert gegen die Delta Distribution.

Beweis. Mit der Variablentransformation $\lambda t = x$ und der Bedingung $\int f dt = 1$ erhält man

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbb{R}} \lambda f(\lambda t)\varphi(t)dt - \varphi(0) \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(\frac{x}{\lambda})dx - \varphi(0) \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(x)(\varphi(\frac{x}{\lambda}) - \varphi(0))dx \right| \\ &\leq \int_{|x|<\tau} |f(x)| \left|\varphi(\frac{x}{\lambda}) - \varphi(0)\right| dx + \int_{|x|\geq\tau} |f(x)| \left|\varphi(\frac{x}{\lambda}) - \varphi(0)\right| dx \\ &\leq \sup_{|x|<\tau} \left|\varphi(\frac{x}{\lambda}) - \varphi(0)\right| \int_{|x|<\tau} |f(x)|dx + \sup_{|x|\geq\tau} \left|\varphi(\frac{x}{\lambda}) - \varphi(0)\right| \int_{|x|\geq\tau} |f(x)|dx \\ &\leq \sup_{|x|<\tau} \left|\varphi(\frac{x}{\lambda}) - \varphi(0)\right| \int_{|x|<\tau} |f(x)|dx + 2\|\varphi\|_\infty \int_{|x|\geq\tau} |f(x)|dx. \end{aligned}$$

Sei $\epsilon > 0$. Man wählt nun zuerst τ so groß, dass

$$\int_{|x|>\tau} |f(x)|dx < \frac{\epsilon}{4\|\varphi\|_\infty}$$

und dann λ_0 so groß, dass

$$\left|\varphi(\frac{x}{\lambda_0}) - \varphi(0)\right| < \frac{\epsilon}{2\|f\|_1} \ \forall |x| < \tau.$$

Dann gilt

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \lambda_0 > 0 \ \forall \lambda > \lambda_0 : \ \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)(\varphi(\frac{x}{\lambda}) - \varphi(0))dx\right| < \epsilon.$$

□

Beispiel 2.3.7

1. (Boxkern) $n \cdot 1_{[0,1/n]} \overset{\mathcal{D}'}{\to} \delta$.
   Die Funktion $f(t) = 1_{[0,1]}(t)$ und die Folge $\lambda_n = n$ erfüllen die Voraussetzungen von Korollar 2.3.5.

2. (Poissonkern) Sei $p_t(x) = \frac{1}{\pi}\frac{t}{x^2+t^2}$. Es gilt $p_t \overset{\mathcal{D}'}{\to} \delta$ für $t \to 0$. Ersetzt man $\lambda_t = \frac{1}{t}$, so erhält man
   $$\frac{1}{\pi}\frac{\lambda_t}{1+\lambda_t^2 x^2} = \lambda_t f(\lambda_t x)$$
   für $f(x) = p_1(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{x^2+1}$. Es gilt
   $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{\pi} \arctan t \Big|_{-\infty}^{\infty} = 1.$$
   Somit sind die Voraussetzungen von Korollar 2.3.5 erfüllt.

3. (Gaußkern) Es gilt $\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{\frac{-x^2}{4t}} \overset{\mathcal{D}'}{\to} \delta$ für $t \to 0$. Setzt man nämlich $\lambda_t = \frac{1}{2\sqrt{t}}$, so erhält man
   $$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} = \lambda_t f(\lambda_t x)$$
   für $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$. Es gilt
   $$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1.$$
   Somit sind die Voraussetzungen von Korollar 2.3.5 erfüllt.

Satz 2.3.8
$\mathcal{D}'$ ist schwach folgenvollständig.

Beweis. Sei $F_n \in \mathcal{D}'$ ein Cauchyfolge von Distributionen, d.h. $\langle F_n, \varphi\rangle$ ist eine Cauchyfolge komplexer Zahlen für jedes $\varphi \in \mathcal{D}$. Da $\mathbb{C}$ vollständig ist, existiert ein Grenzwert in $\mathbb{C}$. Sei $F := \lim_{n\to\infty} F_n$ (in $\mathcal{D}'$).

Wir zeigen $F \in D'$. Natürlich gilt, dass $F : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ linear ist. Zu zeigen bleibt die Stetigkeit, d.h. wir zeigen:

$$\forall \varphi_k \in \mathcal{D} : \varphi_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ (in } \mathcal{D}) \Rightarrow \langle F, \varphi_k\rangle \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ (in } \mathbb{C}).$$

Wir nehmen an, dass die Aussage falsch ist, somit existiert eine Folge $\varphi_i \in \mathcal{D}$ mit $\varphi_i \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ und $\langle F, \varphi_i \rangle > 2$. Da die φ_i und jede ihrer Ableitungen gleichmäßig gegen 0 konvergiert, existiert eine Teilfolge ψ_i von φ_i, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
|\psi_1(x)| &\leq \frac{1}{2} \\
|\psi_2(x)| &\leq \frac{1}{4} \text{ und } \left|\psi_2'(x)\right| \leq 1/4 \\
|\psi_3(x)| &\leq \frac{1}{8} \text{ und } \left|\psi_3'(x)\right| \leq 1/8 \text{ und } \left|\psi_3''(x)\right| \leq 1/8 \\
&. \\
&. \\
&. \\
\left|\psi_n^{(l)}(x)\right| &\leq 2^{-n} \quad (\forall 0 \leq l \leq n-1).
\end{aligned}$$

Es gilt $\psi_i \to 0$ in $\mathcal{D}$. Es existiert ein N, sodass für alle i: $\operatorname{supp} \psi_i \subset [-N, N]$ und für alle l gilt $\left\|\psi_i^{(l)}\right\|_\infty \to 0$. Weiters gilt

$$\begin{aligned}
\forall k : \lim_{i \to \infty} \langle F_k, \psi_i \rangle &= 0, \text{ weil } F_k \in \mathcal{D}'. \\
\forall i : \lim_{k \to \infty} \langle F_k, \psi_i \rangle &> 2 \text{ (Annahme).}
\end{aligned}$$

Wir konstruieren nun eine Teilfolge G_k von F_k und eine Teilfolge w_k von ψ_k nach folgender Vorschrift:

1. Setze $w_1 := \psi_1$
2. Wähle G_1, sodass $\langle G_1, w_1 \rangle > 1$.
3. Wähle w_2, sodass $|\langle G_1, w_2 \rangle| \leq \frac{1}{2^2}$.
4. Wähle G_2, sodass $\langle G_2, w_1 \rangle > 1$ und $\langle G_2, w_2 \rangle > 1$.
5. Wähle w_3, sodass $|\langle G_1, w_3 \rangle| \leq \frac{1}{2^3}$ und $|\langle G_2, w_3 \rangle| \leq \frac{1}{2^3}$
6. usw.

Es gelten somit folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
w_i : \forall k < i : \ |\langle G_k, w_i \rangle| &\leq \frac{1}{2^i}. \\
G_k : \forall i \leq k : \ \langle G_k, w_i \rangle &> 1.
\end{aligned}$$

Weiters gilt

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^{n} w_i$$

konvergiert gegen ein $\varphi \in \mathcal{D}$ für $n \to \infty$. Die Partialsummen φ_n besitzen einen gemeinsamen Träger (beachte Auswahlkriterum der ψ_i und w_i ist Teilfolge von ψ_i). Weiters gilt $\forall l \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{i>l} \left|w_i^{(l)}(x)\right| \leq \sum_{i>l} \frac{1}{2^i}.$$

Somit konvergiert $\sum w_i^{(l)}$ gleichmäßig für jedes l. Aus der Hypothese erhält man, dass

$$\lim_{k\to\infty} \langle G_k, \varphi\rangle = \langle F, \varphi\rangle \ (G_k \text{ ist Teilfolge von } F_k).$$

Allerdings

$$\begin{aligned}\langle G_k, \varphi\rangle &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle G_k, w_i\rangle = \sum_{i=1}^{k} \langle G_k, w_i\rangle + \sum_{i=k+1}^{\infty} \langle G_k, w_i\rangle \\ &\geq k - \sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{-i}.\end{aligned}$$

Somit haben wir ein $\varphi \in \mathcal{D}$ konstruiert, sodass

$$\langle G_k, \varphi\rangle \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Somit haben wir einen Widerspruch erzeugt und es gilt $\langle F, \varphi_i\rangle \stackrel{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$. □

2.4 Ableitung

Jede Distribution hat ein Ableitung (im distributionellen Sinn) und der Limes der Ableitungen ist die Ableitung des Limes, d.h.

$$\lim F_n' = (\lim F_n)'.$$

Beachte: $\mathcal{D}' \supset L^1_{lok}(\mathbb{R}) \supset L^1(\mathbb{R})$.

Vorbereitungen

Sei $F \in \mathcal{D}'$. $F(\lambda t + \mu)$ ist folgendermaßen definiert:

$$\langle F(\lambda t + \mu), \varphi\rangle = \left\langle F, \frac{1}{|\lambda|}\varphi\left(\frac{\cdot - \mu}{\lambda}\right)\right\rangle.$$

Somit ist für alle $h \in \mathbb{R}$

$$\frac{F(t+h) - F(t)}{h} \in \mathcal{D}'$$

wohldefiniert ($\lambda = 1, \mu = h$):

$$\left\langle \frac{F(t+h) - F(t)}{h}, \varphi\right\rangle = \left\langle F, \frac{\varphi(t-h) - \varphi(t)}{h}\right\rangle. \tag{2.4.1}$$

Satz 2.4.1
Für alle $F \in \mathcal{D}'$ gilt

$$F' := \lim_{h\to 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h}$$

existiert in $\mathcal{D}'$ und es gilt

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} : \langle F', \varphi\rangle = -\langle F, \varphi'\rangle.$$

Beweis. Mit der schwachen Folgenvollständigkeit genügt es zu zeigen, dass die $\mathbb{C}$- Limiten

$$\lim_{h\to 0}\left\langle \frac{F(t+h)-F(t)}{h},\varphi\right\rangle$$

existieren. Wegen Gleichung 2.4.1 benötigen wir den Limes von

$$\varphi_h(t) := \frac{\varphi(t-h)-\varphi(t)}{h}$$

in $\mathcal{D}$. Man zeige $\varphi_h \overset{h\to 0}{\longrightarrow} -\varphi'$, d.h. es existiert ein N, sodass $\operatorname{supp}\varphi_h \subset [-N,N]$ und $\varphi_h^{(l)} \overset{h\to 0}{\longrightarrow} -\varphi^{(l+1)}$ gleichmäßig für alle $l \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\lim_{h\to 0}\langle F,\varphi_h\rangle = -\big\langle F,\varphi'\big\rangle.$$

Somit existiert ein $H \in \mathcal{D}'$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}$, sodass

$$\langle H,\varphi\rangle = -\big\langle F,\varphi'\big\rangle,$$

wobei $H = \lim_{h\to 0}\frac{F(t+h)-F(t)}{h}$. □

Korollar 2.4.2
Sei F_n eine Folge in $\mathcal{D}'$ und $F_n \overset{\mathcal{D}'}{\to} F \in \mathcal{D}'$. Dann gilt $F_n' \overset{\mathcal{D}'}{\to} F' \in D'$

Beweis.

$$\big\langle F_n',\varphi\big\rangle = -\big\langle F_n,\varphi'\big\rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\big\langle F,\varphi'\big\rangle = \big\langle F',\varphi\big\rangle.$$

□

Wie sieht nun die Ableitung einer regulären Distribution aus, wenn die Funktion im klassischen Sinne nicht überall differenzierbar ist, oder wenn die Funktion zwar differenzierbar ist, aber die Ableitung nicht mehr lokal integrierbar ist?

Einige Eigenschaften der distributionellen Ableitung

reguläre Distribution
Seien $G, F \in L^1_{lok}$ sodass

$$F(t) = F(0) + \int_0^t G(s)ds.$$

Dann gilt für die zugehörigen Distributionen $(T_F)' = T_{F'} = T_G$ Mittels partieller Integration und Definition der distributionellen Ableitung erhält man:

$$\langle T_{F'},\varphi\rangle = \int \left(F(0) + \int_0^t G(s)ds\right)'\varphi(t)dt = -\int F(t)\varphi'(t)dt = -\big\langle T_F,\varphi'\big\rangle = \big\langle T_F',\varphi\big\rangle.$$

$$\langle T_G,\varphi\rangle = \int G(t)\varphi(t)dt = F(t)\varphi(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int F(t)\varphi'(t)dt = -\big\langle T_F,\varphi'\big\rangle.$$

Beispiel 2.4.3

a) $(T_{x_+})' = T_{1_+} = T_H$.

$$x_+ = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ 0, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

b) $(T_H)' = (T_{1_+})' = \delta$. Es gilt nämlich

$$\left\langle T'_{1_+}, \varphi \right\rangle = -\left\langle T_{1_+}, \varphi' \right\rangle = -\int_0^\infty \varphi'(t)dt = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

Die distributionelle Ableitung der durch die Heaviside Funktion definierte Distribution ist also die $\delta-$Distribution.

c) $\langle \delta', \varphi \rangle = -\langle \delta, \varphi' \rangle = -\varphi'(0)$. Somit gilt $\delta'(-x) = -\delta'(x)$, δ' ist also ungerade und im Nullpunkt konzentriert. (vgl. Definition 2.2.7 und Bsp. 2.2.8).

Linearitätseigenschaft. Seien $F, G \in \mathcal{D}'$ und λ ein Skalar. Dann gilt

$$(F+G)' = F' + G'$$
$$(\lambda F)' = \lambda F'.$$

Diese Eigenschaften folgen direkt aus der Definition

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \left\langle F', \varphi \right\rangle = -\left\langle F, \varphi' \right\rangle.$$

Mit Korollar 2.4.2 ergibt sich daraus, dass Reihen von Distributionen gliedweise differenziert werden können: $(\sum F_k)' = \sum F'_K$, genauer:

Korollar 2.4.4
$\lim_{n\to\infty} (\sum^n F_k)$ *existiert in* $\mathcal{D}'$ $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} (\sum^n F'_k)$ *existiert in* D'.

Produktregel. Sei $a \in C^\infty(\mathbb{R}), F \in \mathcal{D}'$. Dann gilt $(a \cdot F) \in \mathcal{D}'$ (vgl. Seite 57) und $(a \cdot F)' = a'F + aF'$. Denn es gilt

$$\left\langle (aF)', \varphi \right\rangle = -\left\langle aF, \varphi' \right\rangle = -\left\langle F, a\varphi' \right\rangle.$$
$$\left\langle aF', \varphi \right\rangle = \left\langle F', a\varphi \right\rangle = -\left\langle F, (a\varphi)' \right\rangle = -\left\langle F, a'\varphi \right\rangle - \left\langle F, a\varphi' \right\rangle.$$

Somit gilt $\langle (aF)', \varphi \rangle = \langle aF', \varphi \rangle + \langle a'F, \varphi \rangle$.

Beispiel 2.4.5 $x \in C^{\infty(\mathbb{R})}$. Es gilt $x \cdot \delta \equiv 0$, weil

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}: \ \langle x \cdot \delta, \varphi \rangle = \langle \delta, x\varphi \rangle = (x\varphi)|_0 = 0.$$

dann gilt auch $(x \cdot \delta)' \equiv 0$. Daraus erhält man

$$x\delta' + x'\delta = 0 \Leftrightarrow x \cdot \delta' = -\delta.$$

Beispiel 2.4.6

$$n \cdot 1_{[0,\frac{1}{n}]} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta \text{ vgl. Beispiel 2.3.7 1.}$$

Somit gilt mit Korollar 2.4.2

$$(n \cdot 1_{[0,\frac{1}{n}]})' \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta'.$$

Was ist $(n \cdot 1_{[0,\frac{1}{n}]})'$?

$$1_{[0,\frac{1}{n}]}(t) = H(t) - H(t - \frac{1}{n}).$$

Wir wissen bereits $T_H' = \delta$. Somit gilt

$$(n \cdot 1_{[0,\frac{1}{n}]})' = n(\delta - \delta(t - \frac{1}{n})) \to \delta'.$$

Kettenregel. Für die Distribution $F(\lambda x + \mu)$, $\lambda \neq 0$ gilt

$$(F(\lambda x + \mu))' = \lambda F'(\lambda x + \mu).$$

Beweis.

$$\langle F(\lambda x + \mu), \varphi(x)\rangle = \frac{1}{|\lambda|}\left\langle F(x), \varphi(\frac{x-\mu}{\lambda})\right\rangle.$$

$$\big\langle (F(\lambda x + \mu))', \varphi(x)\big\rangle = -\big\langle F(\lambda x + \mu), \varphi'(x)\big\rangle = -\frac{1}{|\lambda|}\left\langle F(x), \varphi'(\frac{x-\mu}{\lambda})\right\rangle.$$

$$\begin{aligned}\big\langle \lambda F'(\lambda x + \mu), \varphi\big\rangle &= \frac{\lambda}{|\lambda|}\left\langle F'(x), \varphi(\frac{x-\mu}{\lambda})\right\rangle = -\frac{\lambda}{|\lambda|}\left\langle F(x), \frac{d}{dx}\varphi(\frac{x-\mu}{\lambda})\right\rangle \\ &= -\frac{1}{|\lambda|}\left\langle F(x), \varphi'(\frac{x-\mu}{\lambda})\right\rangle.\end{aligned}$$

□

Beispiel 2.4.7 (fast überall differenzierbare Funktion)
Die Funktion $f(t)$ sei stetig differenzierbar bis auf endlich viele Sprungstellen $t_1, \cdots, t_n$. Die Höhe des Sprunges an der Stelle t_k sei s_k. In den Intervallen

$$]-\infty, t_1], [t_1, t_2], \cdots, [t_n, \infty[$$

sei f, wenn man die Funktionswerte an den Endpunkten der Intervalle durch Grenzwerte aus dem Intervallinneren ersetzt, stetig differenzierbar. Man kann f dann in der Gestalt

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} s_k H(t - t_k) + g(t)$$

schreiben, wobei $g(t)$ stetig ist und die Ableitung g' (im klassischen Sinne) stückweise stetig ist. Dann gilt

$$T_f' = g' + \sum_{k=1}^{n} s_k \delta(t - t_k).$$

Dasselbe gilt für unendlich viele Sprungstellen, welche keinen Häufungspunkt im Endlichen besitzen.

$$f(t) = \lfloor t \rfloor$$
$$T_f'(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t-k).$$

Beispiel 2.4.8 (Stetige, nirgends differenzierbare Funktionen)

1.

$$f_1(x) = \begin{cases} |x|, \text{ falls } |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0, \text{ sonst.} \end{cases}$$
$$f_1(x) = f_1(x+1)$$
$$f_n(x) = \frac{1}{4^{n-1}} f_1(4^{n-1}x).$$

Sei $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Da die Reihe gleichmäßig konvergiert, ist $f(x)$ stetig.

Satz 2.4.9
Sei $\phi = \{x : f'(x)$ *existiert* $\}$, *wobei* $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \in \mathbb{R}$. *Dann gilt* $\phi = \emptyset$.

Die Funktion f ist im klassischen Sinne nirgends differenzierbar, allerdings gilt $f \in C(\mathbb{R}) \subset L^1_{lok}(\mathbb{R})$. Somit definiert f eine reguläre Distribution und ist im distributionellen Sinne differenzierbar.

$$T_f' = \lim_{n\to\infty} \sum^{n} f_k'.$$

Da $f = \lim_{n\to\infty} \sum^n f_k$ in $\mathcal{D}'$ existiert, folgt mit Korollar 2.4.4, dass auch T_f' in $\mathcal{D}'$ existiert.

2. Sei $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$. Diese Funktion ist für $0 < a < 1, b \in \mathbb{N}, ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ stetig, aber nirgends differenzierbar. Die distributionelle Ableitung existiert:

$$T_f' = -\sum_{n=1}^{\infty} a^n b^n \pi \sin(b^n \pi x) \in \mathcal{D}' \Leftrightarrow$$
$$\lim_{n\to\infty} \left\langle -\sum_{n=1}^{\infty} a^n b^n \pi \sin(b^n \pi x), \varphi \right\rangle \text{ existiert.}$$

.

2.5 Stammdistributionen

Jede Distribution ist differenzierbar. Somit stellt sich nun die Frage, ob zu jeder Distribution eine „Stammdistribution“ existiert. Um das zu zeigen benötigt man eine Hilfsüberlegung:

Lemma 2.5.1
Sei $\varphi \in \mathcal{D}$. Dann gibt es genau dann ein $\psi \in \mathcal{D}$ mit $\psi' = \varphi$, wenn

$$\langle 1, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)dt = 0.$$

Beweis. Ist $\varphi = \psi'$, dann gilt $\langle 1, \varphi \rangle = \langle 1, \psi' \rangle = \langle 0, \psi \rangle = 0$. Sei umgekehrt $\langle 1, \varphi \rangle = 0$, dann ist $\psi(x) := \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$ als Stammfunktion von φ unendlich of differenzierbar. Da $\varphi(t) = 0$ für $t \geq N$, gilt

$$\int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)dt = 0$$

für $x \geq N$. Somit gilt $\psi \in D$ und $\psi' = \varphi$. □

Satz 2.5.2
Zu jedem $F \in \mathcal{D}'$ existiert eine Distribution G mit $G' = F$.

Beweis. Sei $\chi \in \mathcal{D}$ mit $\langle 1, \chi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t)dt = 1$. Ist $\varphi \in \mathcal{D}$ beliebig, dann ist $\psi = \varphi - \langle 1, \varphi \rangle \chi \in \mathcal{D}$ und besitzt in $\mathcal{D}$ eine Stammfunktion ξ, weil $\langle 1, \psi \rangle = 0$. Wir definieren $G : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ durch

$$\langle G, \varphi \rangle := -\langle F, \xi \rangle = -\left\langle F, \int_{-\infty}^{x} \varphi(t) - \langle 1, \varphi \rangle \chi(t) dt \right\rangle.$$

Es gilt

$$\langle G, \varphi_1 + \varphi_2 \rangle = \langle G, \varphi_1 \rangle + \langle G, \varphi_2 \rangle.$$

Wir zeigen nun noch Stetigkeit von G. Sei $\varphi_n \to 0 \in \mathcal{D}$, d.h. es existiert ein kompaktes Intervall, das für alle n die Träger $\operatorname{supp} \varphi_n$ enthält.

$$\xi_n : x \mapsto \int_{-\infty}^{x} \varphi_n(t) - \langle 1, \varphi_n \rangle \chi(t) dt$$

hat Träger enthalten in $[-N_0, N_0]$, weil ein N_0 existiert, sodass für alle n: $\operatorname{supp} \chi + \operatorname{supp} \varphi_n \subset [-N_0, N_0]$.

$$\begin{aligned}
&\xi_n^{(l)} = \varphi_n^{(l-1)} - \langle 1, \varphi_n \rangle \chi^{(l-1)}. \\
&\varphi_n^{(l-1)} \overset{\mathcal{D}}{\to} 0 \\
&\langle 1, \varphi_n \rangle \overset{\mathbb{R}}{\to} 0. \\
&\chi^{(l-1)} \in \mathcal{D}.
\end{aligned}$$

Somit gilt für alle $l \in \mathbb{N}_0$:

$$\left\| \xi_n^{(l)} \right\|_\infty \to 0$$

und somit

$$\xi_n \overset{\mathcal{D}}{\to} 0.$$

Es gilt nun

$$\langle G, \varphi_n \rangle = -\langle F, \xi_n \rangle \overset{\xi_n \overset{\mathcal{D}}{\to} 0}{\longrightarrow} 0.$$

Wir müssen nun noch zeigen: $G' = F$.

$$\begin{aligned}\langle G', \varphi \rangle &= -\langle G, \varphi' \rangle \\ &= \left\langle F, \int_{-\infty}^{x} \varphi'(t) - \langle 1, \varphi' \rangle \chi(t) dt \right\rangle \\ &= \left\langle F, \int_{-\infty}^{x} \varphi'(t) dt \right\rangle \\ &= \langle F, \varphi \rangle.\end{aligned}$$

□

Eigenschaften von Stammdistributionen

Lemma 2.5.3
Sei $F \in \mathcal{D}'$. $F = c \Leftrightarrow F' = 0$.

Beweis. Sei $F = c$, dann gilt $\langle F', \varphi \rangle = c\langle 1', \varphi \rangle = 0$. Sei umgekehrt $F' = 0$, $\varphi \in \mathcal{D}$. Sei $\psi = \varphi - \langle 1, \varphi \rangle \chi$, wobei χ wie im Beweis zu Satz 2.5.2. Dann gilt

$$\langle F, \psi \rangle = \langle F, \varphi \rangle - \langle 1, \varphi \rangle \langle F, \chi \rangle.$$

Nun ist

$$\langle F, \psi \rangle = \langle F, \xi' \rangle = -\langle F', \xi \rangle = 0.$$

Dann gilt

$$\langle F, \varphi \rangle = \langle 1, \varphi \rangle \langle F, \chi \rangle = c\langle 1, \varphi \rangle = \langle c, \varphi \rangle.$$

□

Satz 2.5.4
Je zwei Stammdistributionen von $F \in \mathcal{D}'$ unterscheiden sich um eine additive Konstante.

Beweis. Sei $G_1' = G_2' = F$, dann gilt $(G_1 - G_2)' = G_1' - G_2' = 0$. Daraus folgt $G_1 - G_2 = c$ und somit $G_1 = G_2 + c$. □

Die Gleichung $x^n F = 0$, $n \geq 1 \in \mathbb{N}$

Lemma 2.5.5
Sei $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$. Dann existiert ein $\beta \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= \alpha(0) + x\beta(x) \\ \beta(0) &= \alpha'(0).\end{aligned}$$

Beweis. Setzte $\beta(x) := \int_0^1 \alpha'(xt) dt$ ist unendlich oft differenzierbar und

$$x\beta(x) = \int_0^1 x\alpha'(xt) dt = \int_0^x \alpha'(s) ds = \alpha(x) - \alpha(0).$$

□

Achtung: $\alpha \in \mathcal{D} \not\Rightarrow \beta \in \mathcal{D}$.

Lemma 2.5.6
$\exists \gamma \in \mathcal{D} : \gamma(0) = 1 \; \forall \alpha \in \mathcal{D} \; \exists \widetilde{\beta} \in \mathcal{D} : \alpha(x) = \alpha(0)\gamma(x) + x\widetilde{\beta}(x)$.

Beweis. Fixiere $\gamma \in \mathcal{D}$, s.d. $\gamma(0) = 1$. Definiere

$$\widetilde{\alpha}(x) = \alpha(x) - \alpha(0)\gamma(x) \in \mathcal{D}.$$

Dann ist $\widetilde{\alpha}(0) = 0$. Nach vorigem Lemma existiert $\widetilde{\beta} \in C^\infty$, sodass

$$\widetilde{\alpha}(0) + x\widetilde{\beta}(x).$$

Dann gilt

$$x\widetilde{\beta}(x) = \alpha(x) - \alpha(0)\gamma(x)$$

hat kompakten Träger, da $\alpha \in \mathcal{D}$ und $\gamma \in \mathcal{D}$. □

Satz 2.5.7
$F \in \mathcal{D}'$ erfüllt die Gleichung $xF = 0$ genau dann, wenn $F = c\delta$ für eine Konstante c.

Beweis. Ist $F = c\delta$, dann gilt

$$\langle xF, \varphi \rangle = \langle F, x\varphi \rangle = c\langle \delta, x\varphi \rangle = 0.$$

Ist umgekehrt $xF = 0$, dann gilt aufgrund des vorhergeheneden Lemmas:

$$\exists \gamma \in \mathcal{D} : \gamma(0) = 1 \; \forall \varphi \; \exists \psi \in \mathcal{D} : \; \varphi(x) = \varphi(0)\gamma(x) + x\psi(x).$$

$$\begin{aligned}
\langle F, \varphi \rangle &= \langle F, \varphi(0)\gamma(x) + x\psi(x) \rangle \\
&= \langle F, \gamma \rangle \varphi(0) + \langle F, x\psi \rangle \\
&= \langle F, \gamma \rangle \varphi(0) + \langle xF, \psi \rangle \\
&= \langle F, \gamma \rangle \varphi(0) \\
&= c\langle \delta, \varphi \rangle + 0 \\
&= c\langle \delta, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.5.8
(Vgl. Beispiel 2.4.5) Es gilt $x\delta = 0$. Somit gilt

$$(x\delta)' = 0 \Leftrightarrow x'\delta + x\delta' = 0 \Leftrightarrow -\delta = x\delta'.$$

$$(x\delta)^{(n)} = 0 \Leftrightarrow ((x\delta)')^{(n-1)} = 0 \Leftrightarrow x\delta^{(n)} + n\delta^{(n-1)} = 0 \Leftrightarrow -n\delta^{(n-1)} = x\delta^{(n)}.$$

Satz 2.5.9
Sei $n \in \mathbb{N}$. $F \in \mathcal{D}'$ erfüllt die Gleichung $x^n F = 0$ genau dann, wenn Konstanten $c_1, \cdots, c_{n-1}$ existieren, sodass

$$F = c_0\delta + c_1\delta' + \cdots + c_{n-1}\delta^{(n-1)}.$$

Beweis. Beweis per Induktion. Sei $n = 1$, so gilt Satz 2.5.7. Wir nehmen an, dass die Aussage des Satzes 2.5.9 für n gilt und zeigen die Aussage für $n + 1$. Es gilt

$$x^{(n+1)}F = 0 \Leftrightarrow x^n(xF) = 0.$$

Da für n die Aussage gilt hat xF folgende Darstellung:

$$xF = c_0\delta + c_1\delta' + \cdots + c_{n-1}\delta^{(n-1)}.$$

Mit obiger Bemerkung erhält man

$$xF = c_0(-x\delta') + c_1(-x\delta'') + \cdots + c_{n-1}(-x\delta^{(n)}).$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} & x^{n+1}F = 0 \Leftrightarrow x^n(xF) = 0. \Rightarrow \\ & x(F + c_0\delta' + \cdots + c_{n-1}\delta^n) = 0 \Leftrightarrow \\ & F + c_0\delta' + \cdots + c_{n-1}\delta^n = c\delta \end{aligned}$$

□

Beispiel 2.5.10
Für welches $y \in \mathcal{D}'$ ($y \in L^1_{lok}$) gilt

$$xy'(x) = 0 \in \mathcal{D}' \Leftrightarrow \ \forall \varphi \in \mathcal{D} : \ \langle xy', \varphi \rangle = 0?$$

Sei $y' \in D'$. Setze $F = y'$ und wende vorhergehenden Satz an. Dann gilt

$$xF = 0 \Rightarrow F = c\delta \Leftrightarrow y' = c\delta \Leftrightarrow y = c_0 1_{\mathbb{R}_+} + c1.$$

Satz 2.5.11
$\forall G \in \mathcal{D}' \ \exists F \in \mathcal{D}' : xF = G.$

Beweis. Fixiere $\tau \in \mathcal{D}$, sodass $\tau(0) = 1$. $\forall \varphi \in \mathcal{D} \ \exists \psi \in D$, sodass

$$\varphi(x) = \varphi(0)\tau(x) + x\psi(x).$$

Definiere:

$$\langle F, \varphi \rangle = \varphi(0)c + \left\langle G, \frac{\varphi(x) - \varphi(0)\tau(x)}{x} \right\rangle.$$

Behauptung: $F \in \mathcal{D}'$, $\forall \varphi \in \mathcal{D} \ \langle xF, \varphi \rangle = \langle G, \varphi \rangle$.
Sei $\varphi_n \to 0 \in \mathcal{D}$.

$$\psi_n(x) = \frac{\chi_n(x)}{x} = \frac{\varphi_n(x) - \varphi_n(0)\tau(x)}{x} \xrightarrow{\mathcal{D}} 0,$$

weil

$$\begin{aligned} \psi_n(t) &= \int_0^1 \chi_n'(tx)dx \\ \psi_n^{(k)}(t) &= \int_0^1 t^k \chi_n^{(k+1)}(tx)dx \text{ und} \\ \left\| \psi_n^{(k)} \right\|_\infty &\leq \left\| \chi_n^{(k+1)} \right\|_\infty \overset{n \to \infty}{\to} 0 \ \ \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\langle F, \varphi_n \rangle = \left\langle G, \frac{\varphi_n(x) - \varphi_n(0)\tau(x)}{x} \right\rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$$\begin{aligned}\langle xF, \varphi \rangle = \langle F, x\varphi \rangle &= c(x\varphi)|_{x=0} + \left\langle G, \frac{x\varphi(x) - (x\varphi)|_{x=0}\tau(x)}{x} \right\rangle \\ &= 0 + \left\langle G, \frac{x\varphi(x)}{x} \right\rangle \\ &= \langle G, \varphi \rangle.\end{aligned}$$

□

Problem der Konsistenz

Die Funktion $\log|x| \in L^1_{lok}(\mathbb{R})$ hat 2 Ableitungen: die klassische Ableitung $(\log|x|)' = \frac{1}{x}$ und die Ableitung im distributionellen Sinne.

Problem: Definiere Distributionen x^{-1}, x^{-n} $\forall \in \mathbb{N}$ konsistent, sodass

$$\begin{aligned} x(x^{-n}) &= x^{-n+1} \\ (x^{-n})' &= -nx^{-n-1} \\ x^{-1} &= (\log|x|)'. \end{aligned}$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+i0} &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{x+i\epsilon} \\ \frac{1}{x-i0} &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{x-i\epsilon}, \end{aligned}$$

Die obigen Limiten sind Limiten der regulären Distributionen

$$\begin{aligned} \varphi &\to \int_R R\varphi(t)\frac{dt}{t+i\epsilon} \\ \varphi &\to \int_R R\varphi(t)\frac{dt}{t-i\epsilon}. \end{aligned}$$

$\frac{1}{x+i\epsilon} \in L^1_{lok}(\mathbb{R})$, aber existiert $\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{x+i\epsilon}$ in $\mathcal{D}'$?

Lemma 2.5.12

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}:\ \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t)}{t+i\epsilon}dt = -i\pi\langle \delta, \varphi \rangle + \int_0^\infty \frac{\varphi(t)-\varphi(-t)}{t}dt.$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}:\ \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t)}{t+i\epsilon}dt = i\pi\langle \delta, \varphi \rangle + \int_0^\infty \frac{\varphi(t)-\varphi(-t)}{t}dt.$$

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Es gilt also

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}}\varphi(t)\left(\frac{1}{t+i\epsilon}-\frac{1}{t-i\epsilon}\right)=-2\pi i\varphi(0).$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}}\varphi(t)\left(\frac{1}{t+i\epsilon}+\frac{1}{t-i\epsilon}\right)=2\int_0^\infty\frac{\varphi(t)-\varphi(-t)}{t}dt=2\left\langle\frac{1}{x},\varphi\right\rangle.$$

Definition 2.5.13

$$\frac{1}{x}:\varphi\to\int_0^\infty\frac{\varphi(t)-\varphi(-t)}{t}dt$$
$$x^{-n-1}:=\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}.$$

Es gilt

$$\frac{1}{x^{n+1}}=-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x^n}\right)'.$$
$$x^{-n-1}=\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=-\frac{1}{n}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)}\right)'=-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x}n\right)'$$

Satz 2.5.14

$$x\frac{1}{x^{n+1}}=\frac{1}{x^n}.$$

Beweis per Induktion. Sei $n=0$. Zu zeigen ist:

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}:\ \left\langle x\frac{1}{x},\varphi\right\rangle=\langle 1,\varphi\rangle\Leftrightarrow$$
$$\left\langle\frac{1}{x},x\varphi\right\rangle=\langle 1,\varphi\rangle\Leftrightarrow$$
$$\int_0^\infty\frac{t\varphi(t)-(-t)\varphi(-t)}{t}dt=\int_{-\infty}^\infty\varphi(t)dt.$$

Annahme: $x\left(\frac{1}{x^n}\right)=\left(\frac{1}{x^{n-1}}\right)$.

$$\begin{aligned}x\frac{1}{x^{n+1}}&=x\left(-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{x^n}\right)'=\left(-\frac{1}{n}\right)x\left(\frac{1}{x^n}\right)'\\&=\left(-\frac{1}{n}\right)\left[\left(x\frac{1}{x^n}\right)'-1\left(\frac{1}{x^n}\right)\right]\\&=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{x^n}-\left(\frac{1}{x^{n-1}}\right)'\right]\\&=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{x^n}+(n-1)\left(\frac{1}{x^n}\right)\right]\\&=\frac{1}{n}\frac{n}{x^n}\\&=\frac{1}{x^n}.\end{aligned}$$

□

Überprüfung der Konstistenz: Wir zeigen nun

$$(\log |x|)' = \frac{1}{x}$$

im distributionellen Sinn, d.h. Für alle $\varphi \in \mathcal{D}$ gilt

$$-\int_{\mathbb{R}} \log |x| \varphi'(x) = \int_0^\infty \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t} dt.$$

$$\begin{aligned}
-\int \log |x| \varphi'(x) &= -\int_0^\infty \log t(\varphi'(t) - \varphi'(-t)) dt \\
&= -\log t(\varphi(t) - \varphi(-t))\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{t}(\varphi(t) - \varphi(-t)) dt \\
&= 0 + \int_0^\infty \frac{1}{t}(\varphi(t) - \varphi(-t)) dt.
\end{aligned}$$

2.6 Fourierreihen von Distributionen

Definition 2.6.1 (Schwach wachsende Folge)
Eine Folge $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ heißt schwach wachsend, falls ein $p \in \mathbb{N}$ und ein $a > 0$ existiert, sodass

$$|c_k| \leq a|k|^p$$

für alle $k \neq 0$.

Satz 2.6.2
Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine schwach wachsende Folge. Dann gilt: Die Reihe

$$F_N = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{2\pi i k t}$$

definiert eine 1-periodische Distribution

$$F = \lim_{N\to\infty} F_N \qquad \text{in } \mathcal{D}'.$$

Kürzer: $F = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i k t}$, Konvergenz und Gleichheit in $\mathcal{D}'$.

Beweis. Zu zeigen: $\forall \varphi \in \mathcal{D} : \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \left\langle e^{2\pi i k \cdot}, \varphi(\cdot)\right\rangle$ konvergiert in $\mathbb{R}$. Wir betrachten die Funktion

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} c_k \frac{1}{(2\pi i k)^{p+2}} e^{2\pi i k t}.$$

Dann ist $\left|\frac{c_k}{k^{p+2}}\right| \leq a\frac{1}{k^2}$. Die Reihe kovergiert also absolut und gleichmäßig. Daher ist $f(t)$ stetig mit Periode 1. Fasst man diese Gleichung als Gleichung für reguläre Distributionen auf (wegen gleichmäßiger Konvergenz möglich), dann kann man (p+2)-mal gliedweise differenzieren und es gilt

$$(T_f)^{(p+2)}(t) = T_{f^{(p+2)}}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} c_k e^{2\pi ikt}.$$

Die Reihe konvergiert also in D' und $F = f^{(p+2)} + c_0$ ist periodisch mit Periode 1. $\square$

Satz 2.6.3
Sei $F \in \mathcal{D}'$, $F(x+1) = F(x)$. Dann existiert eine eindeutige (schwach wachsende) Folge $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$, sodass

$$F = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi ikt} \qquad \textit{Konvergenz und Gleichheit in } \mathcal{D}'.$$

Lemma 2.6.4
Sei F eine Distribution, $[a,b]$ ein kompaktes Intervall. Dann existiert eine Konstante $C > 0$ und ein $k \geq 0$, sodass für alle $\varphi \in \mathcal{D}$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [a,b]$ gilt

$$|\langle F, \varphi\rangle| \leq C \sup_{0\leq p\leq k} \left|\varphi^{(p)}(x)\right| =: C\|\varphi\|_k.$$

Beweis. Angenommen die Behauptung ist falsch, dann gibt es zu jeder natürlichen Zahl m ein $\varphi_m \in \mathcal{D}$ mit $\operatorname{supp}\varphi_m \subseteq [a,b]$ und

$$|\langle F, \varphi_m\rangle| > m\|\varphi_m\|_m.$$

Sei nun $\psi_m = \frac{\varphi_m}{m\|\varphi_m\|_m}$. Dann gilt

$$|\langle F, \psi_m\rangle| > 1,\ \operatorname{supp}\psi_m \subseteq [a,b],\ ,\|\psi_m\|_m = \frac{1}{m}.$$

Für jedes feste p strebt $\psi_m^{(p)}$ gleichmäßig gegen 0 für $m \to \infty$, da für $m \geq p$ gilt

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\psi_m^{(p)}(x)\right| \leq \|\psi_m\|_m = \frac{1}{m} \to 0.$$

Dann gilt $\psi_m \overset{\mathcal{D}}{\to} 0$ und somit $\langle F, \psi_m\rangle \to 0$, das ist aber ein Widerspruch zu $|\langle F, \psi_m\rangle| > 1$. $\square$

Lemma 2.6.5
Sei F eine Distribution und $\alpha \in \mathcal{D}$. Dann existiert eine Konstante $C > 0$ und ein $p > 0$, sodass

$$\left|\left\langle F, \alpha(x)e^{-2\pi ikx}\right\rangle\right| \leq C|k|^p$$

für alle $k \neq 0$.

Beweis. $\operatorname{supp}\alpha e^{-2\pi ikx} \subseteq \operatorname{supp}\alpha \subseteq [a,b]$. Nach Lemma 2.6.4 gibt es eine Konstante $C_1 > 0$, $p \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|\left\langle F, \alpha e^{-2\pi ikx}\right\rangle\right| \leq C_1 \left\|\alpha e^{-2\pi ikx}\right\|_p \leq |k|^p C.$$

$\square$

Sei nun F eine periodische Distribution ($F(x+1) = F(x)$). Sei $\alpha \in \mathcal{D}$ mit

$$\alpha^*(t) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha(t+k) \equiv 1.$$

So ein α existiert. Sei $\varphi \in \mathcal{D}$ mit

$$\varphi(t) \geq \begin{cases} \delta > 0, & \text{für } |t| \leq 1 \\ 0, & \text{für } t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Dann ist $\varphi^*(t) \geq \delta$ auf ganz $\mathbb{R}$ (die Summe ist für jedes t eine endliche Summe, weil $\operatorname{supp}\varphi$ kompakt ist.) $\alpha(t) := \frac{\varphi(t)}{\varphi^*(t)}$ erfüllt dann $\alpha^* \equiv 1$.

Lemma 2.6.6
Sei F eine Distribution mit Periode 1 und $\alpha \in \mathcal{D}$ mit $\alpha^*(t) \equiv 1$. Dann ist die komplexe Zahl $\langle F, \alpha(t)e^{-2\pi ikt}\rangle$ unabhängig von der speziellen Wahl von α und im Fall einer regulären Distribution stimmt sie mit dem k-ten Fourierkoeffizienten der zugehörigen lokalintegrierbaren Funktion überein ($\langle F, \alpha(t)e^{-2\pi ikt}\rangle$ ist wohldefiniert.)

Beweis. Seien α_1 und α_2 Testfunktionen mit $\alpha_i^* \equiv 1$, $i = 1, 2$. Dann ist

$$\begin{aligned} \left\langle F(t), \alpha_1(t)e^{-2\pi ikt}\right\rangle &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left\langle F(t), \alpha_2(t-n)\alpha_1(t)e^{-2\pi ikt}\right\rangle \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left\langle F(t+n), \alpha_2(t)\alpha_1(t+n)e^{-2\pi ik(t+n)}\right\rangle \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left\langle F(t), \alpha_1(t+n)\alpha_2(t)e^{-2\pi ikt}\right\rangle \\ &= \left\langle F(t), \alpha_2(t)e^{-2\pi ikt}\right\rangle. \end{aligned}$$

Sei $f \in L^1_{lok}$ mit $f(t+1) = f(t)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left\langle f(t), \alpha(t)e^{-2\pi ikt}\right\rangle &= \int_{\mathbb{R}} f(t)\alpha(t)e^{-2\pi ikt}dt \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(t)\alpha(t)e^{-2\pi ikt}dt \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(t+n)\alpha(t+n)e^{-2\pi ik(t+n)}dt \\ &= \int_0^1 f(t)e^{-2\pi ikt}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha(t+n)dt \\ &= \int_0^1 f(t)e^{-2\pi ikt}dt \\ &= \widehat{f}(k). \end{aligned}$$

□

Satz 2.6.7
Sei F eine Distribution mit Periode 1, $\alpha \in \mathcal{D}$ mit $\alpha^*(t) \equiv 1$ und

$$\hat{F}(k) := \left\langle F, \alpha(t)e^{-2\pi ikt} \right\rangle.$$

Dann konvergiert die Reihe

$$G = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{F}(k)e^{2\pi ikx} \text{ in } \mathcal{D}'$$

und $G = F \in \mathcal{D}'$; Jede periodische Distribution besitzt also eine eindeutige Darstellung als Fourierreihe.

Lemma 2.6.8
Sei $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\psi(t+1) = \psi(t)$. Dann gilt für jedes $p \in \mathbb{N}_0$:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{|k|\le n} \hat{\psi}(k)e^{2\pi ikt} \right)^{(p)} = \psi^{(p)}(t)$$

gleichmäßig auf $\mathbb{R}$.

Beweis. Wir zeigen, dass

$$\left(\sum_{|k|\le n} \hat{\psi}(k)e^{2\pi ikt} \right)^{(p)}$$

gleichmäßig konvergiert, das ist äquivalent zur gleichmäßigen Konvergenz von

$$\sum_{|k|\le n} \hat{\psi}(k)(2\pi ik)^p e^{2\pi ikt}. \tag{2.6.1}$$

Durch wiederholtes partielles Integrieren erhält man

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(k) &= \int_0^1 \psi(t)e^{-2\pi ikt}dt \\ &= \frac{1}{(2\pi ik)^{p+2}} \int_0^1 \psi^{(p+2)}(t)e^{-2\pi ikt}dt. \end{aligned}$$

Somit

$$\begin{aligned} \left|\hat{\psi}(k)\right| &\le (2\pi k)^{-p-2} \int_0^1 \left|\psi^{(p+2)}(t)\right| dt \\ &= (2\pi k)^{-p-2} \|\psi\|_{(p+2)} < \infty. \end{aligned} \tag{2.6.2}$$

Es gilt $\left|\hat{\psi}(k)(2\pi ik)^p e^{2\pi ikt}\right| \le \left|\hat{\psi}(k)\right|(2\pi|k|)^p$. Die gleichmäßige Konvergenz von (2.6.1) folgt aus der Konvergenz von

$$\sum_{|k|\le n} \left|\hat{\psi}(k)\right|(2\pi|k|)^p.$$

Diese wiederum folgt aus (2.6.2):

$$\begin{aligned}\sum_{|k|\le n}\left|\hat{\psi}(k)\right|(2\pi|k|)^p &\le \sum_{|k|\le n}(2\pi k)^{-p-2}\|\psi\|_{(p+2)}(2\pi|k|)^p\\ &= \frac{1}{4\pi^2}\|\psi\|_{(p+2)}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{k^2} < \infty.\end{aligned}$$

□

Beweis zu Satz 2.6.7. Dass die Reihe eine Distribution F definiert wissen wir bereits aus Satz 2.6.2. Wir zeigen $G = F :\Leftrightarrow \langle G,\varphi\rangle = \langle F,\varphi\rangle$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}$. Sei $\varphi \in \mathcal{D}$.

$$\begin{aligned}\left\langle e^{2\pi ikx},\varphi\right\rangle &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_n^{n+1} e^{2\pi ikx}\varphi(x)dx\\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^1 e^{2\pi ikx}\varphi(x+n)dx\\ &= \int_0^1 e^{2\pi ikx}\varphi^*(x)dx\\ &= \widehat{\varphi^*}(-k).\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}\langle G,\varphi\rangle &= \left\langle \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left\langle F,\alpha e^{-2\pi ikt}\right\rangle e^{2\pi ikt},\varphi\right\rangle\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left\langle F,\alpha e^{-2\pi ikt}\right\rangle\left\langle e^{2\pi ikt},\varphi\right\rangle\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left\langle F,\alpha e^{-2\pi ikt}\right\rangle\widehat{\varphi^*}(-k)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left\langle F,\alpha(t)\widehat{\varphi^*}(-k)e^{-2\pi ikt}\right\rangle\\ &= \left\langle F,\sum_{k\in\mathbb{Z}}\alpha(t)\widehat{\varphi^*}(-k)e^{-2\pi ikt}\right\rangle\\ &= \langle F,\alpha(t)\varphi^*\rangle,\end{aligned}$$

wegen Lemma 2.6.8 und $\varphi^* \in C^\infty(\mathbb{R})$. Es gilt dann

$$\begin{aligned}
\langle F, \alpha(t)\varphi^* \rangle &= \left\langle F, \alpha(t) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(t+n) \right\rangle \\
&= \left\langle F, \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha(t+n)\varphi(t) \right\rangle \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle F, \alpha(t)\varphi(n+t) \rangle \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle F, \alpha(t+n)\varphi(t) \rangle \\
&= \left\langle F, \varphi(t) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha(t+n) \right\rangle \\
&= \langle F, \alpha^*(t)\varphi(t) \rangle \\
&= \langle F, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

□

2.7 Fouriertransformation auf $\mathcal{S}$

Sei $\varphi \in \mathcal{D}$, $F \in \mathcal{D}'$. Naheliegende Definition der Fouriertransformation auf $\mathcal{D}'$:

$$\langle \mathcal{F}F, \varphi \rangle := \langle F, \mathcal{F}\varphi \rangle.$$

Problem:

$$(\mathcal{F}\varphi)(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi ixt} f(x)dx \notin \mathcal{D}.$$

Wir müssen den Raum der Testfunktionen erweitern, um die Fouriertransformation auf diese Weise definieren zu können:

Definition 2.7.1 (Schwartz-Raum)
$\mathcal{S}$ sei die Menge aller Funktionen $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die unendlich oft differenzierbar sind und für die $\lim_{|x|\to\infty} \left|x^k \psi^{(l)}(x)\right| = 0$ ist für alle $k, l \in \mathbb{N}_0$.

Bemerkung 2.7.2

$$\begin{aligned}
\varphi \in \mathcal{S} \Leftrightarrow\ & \forall l, k \in \mathbb{N}_0\ \exists c_{l,k}\ \forall x \in \mathbb{R} \left|x^k \psi^{(l)}(x)\right| < c_{l,k} \\
\Leftrightarrow\ & \forall l, k \in \mathbb{N}_0\ \exists c_{l,k}\ \forall x \in \mathbb{R} \left|1 + x^k\right| \left|\psi^{(l)}(x)\right| < c_{l,k}
\end{aligned}$$

Satz 2.7.3
$\varphi \in \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{F}\varphi = \hat{\varphi} \in \mathcal{S}.$

Satz 2.7.4
Für $\varphi \in \mathcal{S}$ gilt:

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(t) e^{2\pi ixt} dt.$$

Satz 2.7.5
Die Fouriertransformation

$$\mathcal{F} : \varphi \to \hat{\varphi} = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{2\pi ixt} dx$$

ist eine bijektive Abbildung auf $\mathcal{S}$. Die inverse Abbildung $\mathcal{F}^{-1}$ ist gegeben durch

$$\hat{\varphi} \to \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(t) e^{2\pi ixt} dt.$$

Satz 2.7.6 (Plancherel)
Es gilt für alle $\varphi \in \mathcal{S}$:

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \hat{\varphi(t)} \right|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^2 dx$$

bzw.

$$\left\langle \hat{\varphi}, \hat{\psi} \right\rangle = \langle \varphi, \psi \rangle,$$

wobei

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx.$$

Die Fouriertransformation ist eine unitäre Abbildung auf $\mathcal{S}$. Durch $\langle \varphi, \psi \rangle := \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\overline{\psi(x)}dx$ wird auf $\mathcal{S}$ ein inneres Produkt definiert und durch $\|\varphi\|_2 := \sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle}$ eine Norm.

Es gilt:

- $\mathcal{F}(\mathcal{D}) \nsubseteq \mathcal{D}$.
- $\mathcal{F}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$.

2.8 Eigenfunktionen der Fouriertransformation

Wir betrachten die lineare Abbildung $A : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, die definiert ist durch

$$A(\psi)(x) = \frac{2\pi x \psi(x) - \psi'(x)}{2\sqrt{\pi}}.$$

Der bezüglich dem auf L^2 definierten Skalarprodukt adjungierte Operator $A^* : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ zu A ist gegeben durch

$$A^*(\varphi)(x) = \frac{2\pi x \varphi(x) + \varphi'(x)}{2\sqrt{\pi}}$$

Es gilt

$$A^*A - AA^* = Id.$$

Der Operator A bzw. der Operator A^* werden oft als Erzeugungs-bzw. Vernichtungsoperator bezeichnet. Mit Hilfe des Erzeugungsoperators A werden wir nun die Hermitefunktionen definieren. Die nullte Hermitefunktion ist gegeben durch

$$h_0(x) = e^{-\pi x^2}.$$

$h_0(x) \in \mathcal{S}$ und es gilt

$$\|h_0\|_2 = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}.$$

Dann ist

$$\widetilde{h}_0(x) = c_0 h_0(x) = \sqrt[4]{2} h_0(x) \in \mathcal{S} \text{ und } \|\widetilde{h}_0\|_2 = 1.$$

Definition 2.8.1
Wir definieren die n-te Hermitefunktion als

$$h_n(x) = A^n h_0(x),$$

wobei A^n die n-fache Hintereinanderausführung des Erzeugungsoperators A ist.

$$\begin{aligned}
h_0(x) &= e^{-\pi x^2} \\
h_1(x) &= 2e^{-\pi x^2}\sqrt{\pi}x \\
h_2(x) &= e^{-\pi x^2}\left(-1 + 4\pi x^2\right) \\
h_3(x) &= 2e^{-\pi x^2}\sqrt{\pi}x\left(-3 + 4\pi x^2\right) \\
h_4(x) &= e^{-\pi x^2}\left(3 - 24\pi x^2 + 16\pi^2 x^4\right) \\
h_5(x) &= 2e^{-\pi x^2}\sqrt{\pi}x\left(15 - 40\pi x^2 + 16\pi^2 x^4\right) \\
h_6(x) &= e^{-\pi x^2}\left(-15 + 180\pi x^2 - 240\pi^2 x^4 + 64\pi^3 x^6\right).
\end{aligned}$$

Man kann erkennen, dass die Hermitefunktionen die Form $h_n(x) = H_n(x)e^{-\pi x^2}$ haben, wobei $H_n(x)$ ein Polynom vom Grad n ist. Da $\mathcal{S}$ abgeschlossen ist bezüglich der Multiplikation mit Polynomen ist $h_n(x) \in \mathcal{S}$. Sei $c_n = \frac{1}{\|h_n\|_2}$. Dann kann man die normalisierten Hermitefunktionen

$$\widetilde{h}_n(x) = c_n h_n(x),$$

definieren.

Proposition 2.8.2
Es gilt $\|h_n\|_2 = \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt[4]{2}}$.

Beweis. Sei $c_n = \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{n!}}$. Dann müssen wir für $\widetilde{h}_n(x) = c_n h_n(x)$ zeigen, dass

$$\|\widetilde{h}_n\|_2 = \langle \widetilde{h}_n, \widetilde{h}_n \rangle_{L^2} = 1.$$

Zunächst folgt aus der Definition der Hermitefunktionen

$$A\widetilde{h}_n = c_n A h_n = c_n A A^n h_0 = c_n A^{n+1} h_0 = \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{n!}} h_{n+1} = \sqrt{n+1}\widetilde{h}_{n+1}. \tag{2.8.1}$$

Aus der Definition von A^* folgt

$$A^* h_0 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(2\pi x e^{-\pi x^2} - 2\pi x e^{-\pi x^2}) = 0. \tag{2.8.2}$$

Aus $A^*A - AA^* = \mathrm{Id}$ folgt mit Hilfe von vollständiger Induktion

$$A^*A^n - A^nA^* = nA^{n-1}. \tag{2.8.3}$$

Wir nehmen an, dass $A^*A^n - A^nA^* = nA^{n-1}$, z.z. ist $A^*A^{n+1} - A^{n+1}A^* = (n+1)A^n$.

$$\begin{aligned} A^*A^{n+1} - A^{n+1}A^* =& A^*A^nA - A^{n+1}A^* + (A^nA^*A - A^nA^*A) \\ =& (A^*A^n - A^nA^*)A + A^nA^*A - A^{n+1}A^* \\ =& nA^{n-1}A + A^n(A^*A - AA^*) \\ =& (n+1)A^n. \end{aligned}$$

Somit folgt aus (2.8.2) und (2.8.3)

$$\begin{aligned} A^*\widetilde{h}_n &= c_n A^* A^n h_0 = c_n(nA^{n-1} + A^nA^*)h_0 = c_n n A^{n-1} h_0 \\ &= \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{n!}} n A^{n-1} h_0 = \sqrt{n}\widetilde{h}_{n-1}. \end{aligned} \tag{2.8.4}$$

Daraus folgt mit (2.8.1)

$$AA^*\widetilde{h}_n = n\widetilde{h}_n. \tag{2.8.5}$$

Somit erhält man aus (2.8.4) und (2.8.5)

$$\begin{aligned} \left\langle \widetilde{h}_n, \widetilde{h}_n \right\rangle_{L^2} &= \frac{1}{n}\left\langle AA^*\widetilde{h}_n, \widetilde{h}_n \right\rangle_{L^2} = \frac{1}{n}\left\langle A^*\widetilde{h}_n, A^*\widetilde{h}_n \right\rangle_{L^2} = \frac{1}{n}\left\langle \sqrt{n}\widetilde{h}_{n-1}, \sqrt{n}\widetilde{h}_{n-1} \right\rangle_{L^2} \\ &= \left\langle \widetilde{h}_{n-1}, \widetilde{h}_{n-1} \right\rangle_{L^2}. \end{aligned}$$

Da $\left\langle \widetilde{h}_0, \widetilde{h}_0 \right\rangle_{L^2} = 1$ folgt $\left\langle \widetilde{h}_n, \widetilde{h}_n \right\rangle_{L^2} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Satz 2.8.3
Die normalisierten Hermitefunktionen $(\widetilde{h}_n)_{n=0}^\infty$ *bilden ein ONS in* $\mathcal{S}$*, d.h.* $\left\langle \widetilde{h}_i, \widetilde{h}_j \right\rangle_{L^2} = \delta_{i,j}$.

Beweis. Sei $m \neq n$. Dann erhält man aus (2.8.4) und (2.8.5)

$$\begin{aligned} \left\langle \widetilde{h}_m, \widetilde{h}_n \right\rangle_{L^2} &= \frac{1}{m}\left\langle AA^*\widetilde{h}_m, \widetilde{h}_n \right\rangle_{L^2} = \frac{1}{m}\left\langle A^*\widetilde{h}_m, A^*\widetilde{h}_n \right\rangle_{L^2} = \frac{1}{m}\left\langle \widetilde{h}_m, AA^*\widetilde{h}_n \right\rangle_{L^2} \\ &= \frac{n}{m}\left\langle \widetilde{h}_m, \widetilde{h}_n \right\rangle_{L^2}. \end{aligned}$$

Daraus folgt $\left\langle \widetilde{h}_n, \widetilde{h}_m \right\rangle_{L^2} = 0$. □

Satz 2.8.4
Die Hermitefunktionen $(\widetilde{h}_n)_{n=0}^{\infty}$ *sind Eigenfunktionen der Fouriertransformation auf* $\mathcal{S}$.

$$\mathcal{F}(\widetilde{h}_n) = (-i)^n \widetilde{h}_n.$$

Beweis. Sei n=0.

$$\mathcal{F}(\widetilde{h}_0)(\xi) = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \widehat{e^{-\pi x^2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} d\xi = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} e^{-\pi x^2}.$$

Durch Nachrechnen erhält man für $\psi \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned}
(\widehat{x\psi(x)}) &= \frac{i}{2\pi} \widehat{\psi}'(\xi), \\
(\widehat{\psi'(x)}) &= 2\pi i \xi \widehat{\psi}(\xi).
\end{aligned}$$

Unter Ausnutzung dieser Identitäten erhält man

$$\begin{aligned}
(\widehat{A\psi(x)})(\xi) = \mathcal{F}&\left(\frac{2\pi x \psi(x) - \psi'(x)}{2\sqrt{\pi}} \right) \\
=& \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(2\pi \widehat{x\psi(x)} - \widehat{\psi'(x)} \right) \\
=& \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(i\widehat{\psi}'(\xi) - 2\pi i \xi \widehat{\psi}(\xi) \right) \\
=& \frac{-i}{2\sqrt{\pi}} \left(2\pi \xi \widehat{\psi}(\xi) - \widehat{\psi}'(\xi) \right) \\
=& - i(A\widehat{\psi})(\xi).
\end{aligned} \tag{2.8.6}$$

Mit dieser Identität erhält man mittels Induktion über n die Aussage des Satzes: Wir nehmen an, dass $\mathcal{F}(\widetilde{h}_n) = (-i)^n \widetilde{h}_n$ gilt. Zu zeigen ist, dass $\mathcal{F}(\widetilde{h}_{n+1}) = (-i)^{n+1} \widetilde{h}_{n+1}$. Aus der Definition der normalisierten Hermitepolynome erhält man

$$\widehat{\widetilde{h}_{n+1}} = c_{n+1} \widehat{A^{n+1} h_0} = c_{n+1} \widehat{A h_n} = \frac{c_{n+1}}{c_n} \widehat{A \widetilde{h}_n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \widehat{A \widetilde{h}_n}. \tag{2.8.7}$$

Unter Anwendung der Identität (2.8.6) und der Induktionshypothese erhält man

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \widehat{A \widetilde{h}_n} = \frac{-i}{\sqrt{n+1}} A(\widehat{\widetilde{h}_n}) = \frac{-i}{\sqrt{n+1}} A((-i)^n \widetilde{h}_n) = \frac{(-i)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} A \widetilde{h}_n. \tag{2.8.8}$$

Aus (2.8.1) erhält man

$$\frac{(-i)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} A \widetilde{h}_n = (-i)^{n+1} \widetilde{h}_{n+1}. \tag{2.8.9}$$

Setzt man (2.8.7), (2.8.8) und (2.8.9) zusammen, dann erhält man

$$\widehat{\widetilde{h}_{n+1}} = (-i)^{n+1} \widetilde{h}_{n+1}.$$

□

2.9 Hermitepolynome

Wir wissen bereits, dass

$$A^n h_0(x) = A^n e^{-\pi x^2} = h_n(x).$$

Somit sind die Funktionen $A^n e^{-\pi x^2}$ gleich den (nicht normalisierten) Hermitefunktionen h_n. Weiters wissen wir, dass die Hermitefunktionen die Gestalt

$$h_n(x) = H_n(x) e^{-\pi x^2}$$

haben, wobei $H_n(x)$ ein Polynom vom Grad n ist. Zusammen erhält man

$$A^n e^{-\pi x^2} = H_n(x) e^{-\pi x^2}$$

Wir interessieren uns nun dafür, welche Gestalt dieses Polynom $H_n(x)$ hat. Für $\psi \in \mathcal{S}$ gilt

$$(A\psi)(x) = e^{\pi x^2} \frac{(-1)}{2\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \left(e^{-\pi x^2} \psi(x) \right),$$

denn

$$\frac{d}{dx}(e^{-\pi x^2}\psi(x)) = (-2\pi x \psi(x) + \psi'(x)) e^{-\pi x^2}.$$

Daraus erhält man

$$(A^n \psi)(x) = e^{\pi x^2} \left(\frac{-1}{2\sqrt{\pi}} \right)^n \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-\pi x^2} \psi(x) \right)$$

und somit

$$A^n e^{-\pi x^2} = e^{\pi x^2} \left(\frac{-1}{2\sqrt{\pi}} \right)^n \frac{d^n}{dx^n} e^{-2\pi x^2}.$$

Daraus erhalten wir das Polynom

$$H_n(x) = e^{2\pi x^2} \left(\frac{-1}{2\sqrt{\pi}} \right)^n \frac{d^n}{dx^n} e^{-2\pi x^2}. \tag{2.9.1}$$

H_n heißt **n-tes Hermitepolynom.** Wir haben nun also einen Zusammenhang zwischen Hermitefunktionen und Hermitepolynomen hergestellt. Es gilt

$$H_n(x) = h_n(x) e^{\pi x^2} \tag{2.9.2}$$

und

$$H_n(x) = \widetilde{h}_n(x) \frac{1}{c_n} e^{\pi x^2}. \tag{2.9.3}$$

2.10 Temperierte Distributionen $\mathcal{S}'$

Definition 2.10.1 (Konvergenz auf $\mathcal{S}$)
$\varphi_n \overset{\mathcal{S}}{\to} \varphi :\Leftrightarrow$

$$\forall l,k\ \exists c_{l,k}\ \forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R} : \left| x^k \varphi_n^{(l)}(x) - x^k \varphi^{(l)}(x) \right| < c_{l,k}.$$

Äquivalent dazu

$$\forall l,k : \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^k \varphi_n^{(l)}(x) - x^k \varphi^{(l)}(x) \right| = 0.$$

Definition 2.10.2 (Cauchyfolge in $\mathcal{S}$)
Eine Folge (φ_n) heißt Cauchyfolge in S, falls

1. $\forall l,k\ \exists C_{l,k}\ \forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R} : \left|x^k \varphi_n^{(l)}(x)\right| \leq C_{l,k}$

2. $\varphi_n^{(l)}$ ist für jedes feste l eine Cauchyfolge bezüglich der gleichmäßigen Konvergenz.

Satz 2.10.3
Der Raum $\mathcal{S}$ ist vollständig.

Beweis. Sei φ_n eine Cauchyfolge in $\mathcal{S}$. Analog zum Beweis der Vollständigkeit von $\mathcal{D}$ (Proposition 2.1.11) ergibt sich

$$\varphi_n^{(l)} \to \varphi^{(l)}$$

glm. auf $\mathbb{R}$ für alle $l \in \mathbb{N}_0$ für eine Funktion $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Wegen $\left|x^k \varphi_n^{(l)}(x)\right| \leq C_{k,l}$ ist auch $\left|x^k \varphi^{(l)}(x)\right| \leq C_{k,l}$ und somit $\varphi \in \mathcal{S}$ und $\varphi_n \to \varphi$ in $\mathcal{S}$.

□

Definition 2.10.4
Der Raum $\mathcal{S}' = \{f : \mathcal{S} \to \mathbb{C} :\ \text{linear und stetig}\ \}$ heißt Raum der temperierten Distributionen.

Es gilt $F \in \mathcal{S}' \Leftrightarrow F : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ linear und stetig: Sei $\varphi_n \in \mathcal{S}$ und $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0 \Rightarrow \langle F, \varphi_n \rangle \to 0$ in $\mathbb{C}$.

Satz 2.10.5
$\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$ und die jeweiligen Einbettungen sind stetig. Außerdem ist $\mathcal{D}$ dicht in $\mathcal{S}$.

Beispiel 2.10.6 (Beispiel für eine nichttemperierte Distribution)

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{n^2} \delta(x-n) \in \mathcal{D}',$$

aber es existiert ein $\varphi_0 = e^{-x^2} \in \mathcal{S}$, sodass

$$\left\langle \sum_{n=1}^{\infty} e^{n^2} \delta(x-n), e^{-x^2} \right\rangle = \sum e^{n^2} e^{-n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$$

konvergiert nicht.

Da $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$, kann man alle Operationen, die wir für Distributionen eingeführt haben, auch auf temperierte Distributionen übertragen. Es kann allerdings passieren, dass man dabei aus $\mathcal{S}'$ herauskommt. Ist das nicht der Fall, dann heißt $\mathcal{S}'$ abgeschlossen bezüglich dieser Operation, z.B.

1. Addition, Multiplikation mit Konstanten. $\mathcal{S}'$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{C}$.

2. Lineare Transformation

3. Differentiation. Es gilt $F \in \mathcal{S}' \Rightarrow F^{(l)} \in \mathcal{S}'$ für alle l.

4. Bildung einer Stammdistribution

Dagegen ist $\mathcal{S}'$ nicht abgeschlossen gegenüber Multiplikation mit $C^\infty(\mathbb{R})$ - Funktionen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta(x-n) \in \mathcal{S}',$$

aber

$$e^{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \delta(x-n) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{n^2} \delta(x-n) \notin \mathcal{S}'.$$

Satz 2.10.7
$\mathcal{S}'$ ist schwach folgenvollständig.

Beweis. Analoges Vorgehen wie beim Beweis zur schwach-Folgenvollständigkeit von $\mathcal{D}'$ (Satz 2.3.8). Man muss nur anstelle $\left|\psi_i^{(k)}\right| \leq \frac{1}{2^i}$, $k = 0, 1, \ldots, i-1$ fordern, dass $|x^m|\left|\psi_i^{(k)}(x)\right| \leq \frac{1}{2^i}$, $k, m = 0, \ldots, i-1$ gilt. □

Auf den temperierten Distributionen lässt sich die Fouriertransformation auf $\mathcal{S}'$ folgendermaßen definieren:

Definition 2.10.8
Für $F \in \mathcal{S}'$ ist die Fouriertransformation $\mathcal{F}F$ folgendermaßen definiert:

$$\langle \mathcal{F}F, \varphi \rangle := \langle F, \mathcal{F}\varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

Die Fouriertransformation $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ ist eine bijektive, lineare, stetige Abbildung.

Charakterisierung von $\mathcal{S}$ und $\mathcal{S}'$ durch Hermiteentwicklung

Seien $(h_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ im folgenden normalisierte Hermitefunktionen.

Satz 2.10.9
Sei $\varphi \in \mathcal{S}$, dann strebt $\langle \varphi, h_n \rangle$ stark gegen 0 ($:\Leftrightarrow\ \forall k \in \mathbb{N} : \lim_{n\to\infty} n^k \langle \varphi, h_n \rangle = 0$) und es gilt

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi, h_n \rangle h_n(x),$$

mit Konvergenz in $\mathcal{S}$. Ist umgekehrt (c_n) eine stark fallende Nullfolge, d.h. $\forall k \lim_{n\to\infty} n^k c_n = 0$. Dann existiert ein $\varphi \in \mathcal{S}$, sodass

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n h_n$$

und $c_n = \langle \varphi, h_n \rangle$.

Beweis. 1. Zu zeigen ist:$\varphi \in \S \Rightarrow \langle \varphi, h_n \rangle \to 0$ stark. Mit $\varphi \in \mathcal{S}$ ist auch $(AA^*)^k \varphi \in \mathcal{S}$. Es gilt $(AA^*)^k h_n = n^k h_n$. Somit gilt

$$\begin{aligned} n^k |\langle \varphi, h_n \rangle| &= \left| \left\langle \varphi, (AA^*)^k h_n \right\rangle \right| \\ &= \left| \left\langle (A^*A)^k \varphi, h_n \right\rangle \right| \\ &\leq \left\| (A^*A)^k \varphi \right\|_2 \|h_n\|_2. \\ &= K_k. \end{aligned}$$

Somit gilt $\sup_n n^k \langle \varphi, h_n \rangle < K_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $\langle \varphi, h_n \rangle$ ist schnell fallend.

2. Wir zeigen nun

$$\forall k \; (c_n n^k \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0) \Rightarrow \sum_{n=0}^{m} c_n h_n \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \psi \in \mathcal{S}.$$

Zu zeigen ist die Konvergenz in $\mathcal{S}$:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \left(\psi - \sum_{n=0}^{m} c_n h_n \right)^{(l)} (x) x^k \right| \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \;\forall l, k \in \mathbb{N}.$$

Wir benötigen zuerst eine Abschätzung, dass die h_n nicht zu schnell wachsen: Sei $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\|\alpha\|_2 < \infty$ und $\|\alpha'\|_2 < \infty$.

$$\begin{aligned} |\alpha(x)|^2 = \left|\alpha^2(x)\right| &= \left| \int_{-\infty}^{x} (\alpha^2(t))' dt \right| \\ &\leq 2 \int_{\mathbb{R}} |\alpha(t)| \left|\alpha'(t)\right| dt \\ &\leq \|\alpha\|_2 \left\|\alpha'\right\|_2. \end{aligned}$$

Man kann die Ableitung von $\varphi \in \mathcal{S}$ mittels den Operatoren A und A^* ausdrücken:

$$\begin{aligned} A^*\varphi &= \frac{2\pi x \varphi(x) + \varphi'(x)}{2\sqrt{\pi}} \\ A\varphi &= \frac{2\pi x \varphi(x) - \varphi'(x)}{2\sqrt{\pi}} \\ &\Rightarrow \varphi'(x) = (A^* - A)\varphi(x)\sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Es gilt für $\alpha = h_n \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned} |h_n(x)|^2 &\leq \|h_n\|_2 \left\|h_n'\right\|_2 \\ &= 2\sqrt{\pi} \|(A^* - A) h_n\|_2 \\ &= 2\sqrt{\pi} \left\| \sqrt{n} h_{n-1}(x) - \sqrt{n+1} h_{n+1}(x) \right\| \\ &\leq 2\sqrt{\pi}\sqrt{n+1} (\|h_{n-1}(x)\| + \|h_{n+1}(x)\|) \\ &= C\sqrt{n+1}. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$(h_n(x))^2 \le C\sqrt{n+1}.$$

Da c_n stark gegen 0 geht, konvergieren die Reihen

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n h_n(x)$$

und

$$\psi'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n h_n'(x).$$

absolut und gleichmäßig. Durch analoge Überlegungen gilt das für beliebige Ableitungen l:

$$\psi^{(l)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n h_n^{(l)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n h_n(x),$$

wobei d_n wiederum starke Nullfolge ist. Wir betrachten nun $x^k h_n(x)$. Es gilt

$$x^k h_n(x) = \left(\frac{A + A^*}{2\sqrt{\pi}}\right)^k h_n(x).$$

Das ist eine Linearkombination von h_{n+i}, $|i| \le k$ mit nur schwach wachsenden Koeffizienten. Somit gilt

$$x^k \psi^{(l)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^k h_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n h_n(x),$$

wobei b_n eine starke Nullfolge ist. Daher ist $x^k \psi^{(l)}$ für jedes $k, l \in \mathbb{N}$ beschränkt und $\psi \in \mathcal{S}$.

3. Wir zeigen nun, dass die Koeffizienten der Reihe $\psi = \sum c_n h_n$ durch ψ eindeutig bestimmt sind : $c_n = \langle \psi, h_n \rangle$.

$$\begin{aligned} \langle \psi, h_k \rangle &= \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} c_n h_n, h_k \right\rangle \\ &= c_k. \end{aligned}$$

Zu verifizieren ist, dass Summe und Integral vertauscht werden dürfen.

4. Wir zeigen: $\varphi \in \mathcal{S} \Rightarrow \varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi, h_n \rangle h_n$. Wir haben bereits gezeigt, dass für $\varphi \in \mathcal{S}$ die Reihe

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi, h_n \rangle h_n(x) \in \mathcal{S}$$

und

$$\langle \varphi, h_n \rangle = \langle \psi, h_n \rangle.$$

Dass $\varphi = \psi$ ist, folgt aus dem folgenden Lemma. □

Lemma 2.10.10 (Hermitefunktionen sind vollständig)
Ist $\varphi \in \mathcal{S}$ *und* $\langle \varphi, h_n \rangle = 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$. *Dann ist* $\varphi \equiv 0$.

Beweis. Es gilt $x^k e^{-\pi x^2} \in \operatorname{lin}\{h_1, \ldots, h_{k+1}\}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\varphi(x)e^{-\pi x^2})(t) &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x t} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)e^{-\pi x^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2\pi i t x)^k}{k!} dx \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2\pi i t)^k}{k!} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)e^{-\pi x^2} x^k dx \\
&= 0,
\end{aligned}$$

weil $\left\langle \varphi, x^k e^{-\pi x^2} \right\rangle = 0$ ist für jedes $k \in \mathbb{N}_0$. Aus dem Satz von Plancherel erhält man

$$\begin{aligned}
0 &= \left\| \mathcal{F}(\varphi e^{-\pi x^2}) \right\|_2 \\
&= \left\| \varphi e^{-\pi x^2} \right\|_2 .
\end{aligned}$$

Somit gilt $\varphi(x) = 0, \ \forall x$. □

Satz 2.10.1 (Reihendarstellung temperierter Distributionen)

1. *Jedes* $F \in \mathcal{S}'$ *hat eine Reihendarstellung*

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k h_k(x) \qquad \text{„Konvergenz und Gleichheit in } \mathcal{S}'\text{“},$$

wobei die Folge (a_k) *schwach wachsend ist (vgl. Definition 2.6.1) und eindeutig gegeben durch*

$$a_k = \langle F, h_k \rangle.$$

2. *Sei* (a_k) *eine schwach wachsende Folge komplexer Zahlen, dann konvergiert die Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k h_k(x)$$

in $\mathcal{S}'$ *und definiert eine temperierte Distribution, d.h.* $\forall \varphi \in \mathcal{S}$ *gilt*

$$\langle F, \varphi \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \langle h_k, \varphi \rangle.$$

Zum Beweis diese Satzes benötigt man folgende 4 Lemmata:

Lemma 2.10.11
Sei $F \in \mathcal{S}'$, dann gilt

$$\sum_{k=0}^{m} \langle F, h_k \rangle h_k \overset{\mathcal{S}'}{\to} F$$

für $m \to \infty$.

Beweis. Wir wissen, dass für $\varphi \in \mathcal{S}$ gilt $(c_k) = (\langle h_k, \varphi \rangle)$ ist stark fallend und $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h_k(x) \in \mathcal{S}$. Da die Reihe in $\mathcal{S}$ konvergiert und F ein stetiges Funktional auf $\mathcal{S}$ ist, gilt

$$\langle F, \varphi \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \langle h_k, \varphi \rangle \langle F, h_k \rangle.$$

Nun gilt für alle $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \langle h_k, \varphi \rangle \langle F, h_k \rangle &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \langle h_k, \varphi \rangle \langle F, h_k \rangle \\ &= \lim_{m\to\infty} \left\langle \sum_{k=0}^{m} h_k \langle F, h_k \rangle, \varphi \right\rangle.\end{aligned}$$

□

Lemma 2.10.12
Sei $F \in \mathcal{S}'$, dann ist die Folge $(a_k) = (\langle F, h_k \rangle)$ schwach wachsend.

Beweis. z.z.: $\exists N \in \mathbb{N}\ \exists C > 0\ \forall k \in \mathbb{N}_0 : |a_k| \leq Ck^N$. Wir nehmen an, dass die Behauptung falsch ist, d.h.

$$\forall N\ \forall C\ \exists k |a_k| \geq Ck^N.$$

Es gibt also für alle n ein k_n mit $a_{k_n} > nk_n^n$. O.B.d.A. sei $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$. Betrachte

$$c_k = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \neq k_n \\ \frac{\operatorname{sgn} a_{k_n}}{nk_n^n}, & \text{falls } k = k_n. \end{cases}$$

Behauptung: $(c_k)_{k=0}^{\infty}$ ist stark fallend. Sei $p \in \mathbb{N}$ fixiert. Dann ist

$$k^p c_k = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \neq k_n \\ k_n^p \frac{\operatorname{sgn} a_{k_n}}{nk_n^n}, & \text{falls } k = k_n. \end{cases}$$

Es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{k_n^p}{nk_n^n} = 0$ und somit ist c_k stark fallende Nullfolge. Wir können somit bilden:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h_k \in \mathcal{S}.$$

$$\begin{aligned}
\langle F, \varphi \rangle &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} c_k \langle F, h_k \rangle \\
&= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{\operatorname{sgn} a_{k_n}}{n k_n^n} \langle F, h_{k_n} \rangle \\
&= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{|a_{k_n}|}{n k_n^n} \\
&\geq \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} 1 = \infty.
\end{aligned}$$

Somit haben wir einen Widerspruch erhalten und wissen, dass a_k schwach wachsend ist. □

Lemma 2.10.13
Sei (c_n) stark fallend und (a_n) schwach wachsend, dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n a_n| n^2 < \infty,$$

d.h. (c_n, a_n) ist stark fallend.

Beweis.

$$\begin{aligned}
\exists N \ \exists C \ \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq C n^N. \\
\exists C_{N+4} \ \forall n \in \mathbb{N} : n^{N+4} |c_n| \leq C_{N+4}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt $|c_n| \leq \frac{C}{n^{N+4}}$ und $|a_n||c_n| \leq n^N n^{-N-4}$ und somit $\sum \left| c_n a_n n^2 \right| \leq \sum n^{-2} < \infty$. □

Lemma 2.10.14
Sei (a_k) schwach wachsend, $F_n := \sum_{k=0}^{n} a_k h_k \in \mathcal{S}'$. Dann konvergiert F_n in $\mathcal{S}'$ und es existiert ein $F \in \mathcal{S}' : \lim_{n\to\infty} F_n = F$.

Beweis. Sei c_k stark fallend und

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h_k(x) \in \mathcal{S}.$$

Dann gilt

$$\langle F_n, \varphi \rangle = \sum_{k=0}^{n} a_k c_k.$$

Aus Lemma 2.10.13 erhält man, dass $\sum_{k=0}^{\infty} a_k c_k > \infty$. Somit existiert für jedes $\varphi \in \mathcal{S}$ der folgende Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} \langle F_n, \varphi \rangle =: \langle F, \varphi \rangle.$$

Aus dem Satz über die schwach Folgenvollständigkeit von $\mathcal{S}'$ erhält man, dass F eine temperierte Distribution ist. Man kann aber auch direkt zeigen, dass $F \in \mathcal{S}'$. Sei $H \in \mathcal{S}'$, $\varphi \in \mathcal{S}$. Wir definieren $AH \in \mathcal{S}'$ folgendermaßen:

$$\langle AH, \varphi \rangle := \langle H, A^* \varphi \rangle.$$

Wir zeigen, dass $A^*H \in \mathcal{S}'$: für alle $\varphi \in \mathcal{S}$ gilt

$$\langle A^*H, \varphi \rangle = \langle H, A\varphi \rangle$$

und $A\varphi \in \mathcal{S}$ somit $A^*H \in \mathcal{S}'$ und $A^*AH \in \mathcal{S}'$. Wenn $H = \sum a_k h_k$ dann erhält man $A^*AF = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_k h_k$, weil $A^*Ah_k = (k+1)h_k$. Wir wissen, dass (a_k) schwach wachsend ist und somit $|a_k| \leq C(k)^p$ für ein $p \in \mathbb{N}$. Man erhält aus dem Beweis zu Satz 2.10.9, dass $|h_k(x)| \leq C\sqrt[4]{k+1}$. Daraus folgt nun, dass

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k h_k(x)}{(k+1)^{p+2}} \right| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{a_k}{(k+1)^{p+2}} \right| |h_k(x)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{-2+\frac{1}{4}} < \infty.$$

Diese Reihe konvergiert daher absolut und gleichmäßig gegen eine stetige, beschränkte Funktion.Somit

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k h_k(x)}{(k+1)^{p+2}} \to \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k h_k(x)}{(k+1)^{p+2}} \in \mathcal{S}'.$$

Wende A^*A p+2 mal an, dann erhält man

$$(A^*A)^{p+2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k h_k(x) \in \mathcal{S}'.$$

$\square$

Literatur zu Spektraltheorie: allgemeine Literatur

[Ahl66] Lars V. Ahlfors. *Complex analysis: An introduction of the theory of analytic functions of one complex variable.* Second edition. McGraw-Hill Book Co., New York, 1966.

[FB93] Eberhard Freitag and Rolf Busam. *Funktionentheorie.* Springer-Lehrbuch. [Springer Textbook]. Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[Heu06] Harro Heuser. *Funktionalanalysis.* Mathematische Leitfäden. [Mathematical Textbooks]. B. G. Teubner, Stuttgart, fourth edition, 2006. Theorie und Anwendung. [Theory and application].

[Wer00] Dirk Werner. *Funktionalanalysis.* Springer-Verlag, Berlin, extended edition, 2000.

[Wid69] Harold Widom. *Lectures on integral equations.* Notes by David Drazin and Anthony J. Tromba. Van Nostrand Mathematical Studies, No. 17. Van Nostrand, 1969.

Spektralanalyse des Laplace Operators

[Bas95] Richard F. Bass. *Probabilistic techniques in analysis.* Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York, 1995.

[Dav90] E. B. Davies. *Heat kernels and spectral theory*, volume 92 of *Cambridge Tracts in Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[Fel71] William Feller. *An introduction to probability theory and its applications.* John Wiley & Sons Inc., New York, 1971.

[PS78] Sidney C. Port and Charles J. Stone. *Brownian motion and classical potential theory.* Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1978. Probability and Mathematical Statistics.

[Sim05] Barry Simon. *Functional integration and quantum physics.* AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, second edition, 2005.

Literatur zu Distributionentheorie

[Cig] J. Cigler. Skriptum Distributionentheorie.

[Hör09] Lars Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. IV.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2009. Fourier integral operators, Reprint of the 1994 edition.

[Lec] R. Lechner. Skriptum lokalkonvexe R äume und Distributionen.

[Pas] M. Passenbrunner. Skriptum Pseudodifferntial- und Fourierintegraloperatoren.

[Str94] Robert S. Strichartz. *A guide to distribution theory and Fourier transforms.* Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1994.

[Tri72] H. Triebel. *Höhere Analysis*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1972. Hochschulbücher für Mathematik, Band 76.