Skriptum zur Vorlesung

Operatorentheorie

von

Richard Lechner
Institut für Analysis
Johannes Kepler Universität Linz

Sommersemester 2016

JOHANNES KEPLER
UNIVERSITÄT LINZ

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Vorbereitung

Dieses Kapitel ist zu großen Teilen aus [**Wer00**] entnommen.

1. Grundlegende Definitionen

Sei X ein Vektorraum. Eine Menge $H \subset X$ heißt *Hamelbasis* für X, genau dann wenn

(a) $\operatorname{span} H$, die (endliche) lineare Hülle von H, ist X, i.e. für jedes $x \in X$ existiert eine endliche Teilmenge $F \subset H$ sodass $x \in \operatorname{span} F$.
(b) H ist (endlich) linear unabhängig, i.e. für alle endlichen Teilmengen F von H muss gelten dass F linear unabhängig ist.

$(X, \|\cdot\|)$ heißt *normierter Raum*, falls X ein reeller Vektorraum ist, und $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_0^+$ ist so, dass für alle $x, y \in X$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) $\|x\| = 0$, genau dann wenn $x = 0$,
(b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$,
(c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Die Abbildung $\|\cdot\|$ heißt Norm des Vektorraums X. Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ heißt *vollständig*, genau dann wenn alle Cauchyfolgen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|$ in X konvergieren. Ein vollständiger normierter Raum heißt *Banachraum*. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und Y ein linearer Teilraum von X. Wenn nicht anders spezifiziert, dann fassen wir Y als normierten Raum ausgestattet mit der Norm $\|\cdot\|$ auf.

Seien X, Y normierte Räume. Dann bezeichnet $\mathcal{L}(X, Y)$ den *Raum der linearen stetigen Abbildungen* von X nach Y, i.e.

$$\mathcal{L}(X, Y) = \{T : X \to Y \mid T \text{ ist linear und stetig}\}$$

ausgestattet mit der Operatornorm $\|T\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y$. Ist $Y = X$ dann schreiben wir $\mathcal{L}(X)$ anstelle von $\mathcal{L}(X, X)$. Ist Y vollständig, so ist $\mathcal{L}(X, Y)$ vollständig. Für $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ schreiben wir X^* (X^* ist immer vollständig). Der Raum X^* heißt *Dualraum* von X.

Seien X, Y Vektorräume und $T : X \to Y$ linear. Dann heißt $\ker T$ der Kern von T und $\operatorname{im} T$ Bild von T, gegeben durch

$$\ker T = \{x \in X : Tx = 0\} \qquad \text{und} \qquad \operatorname{im} T = \{Tx : x \in X\}.$$

Sei X ein normierter Raum und $U \subset X$ ein Unterraum. Dann heißt X/U, gegeben durch

$$X/U = \{x + U : x \in X\}$$

Quotientenraum, und die lineare Abbildung $\omega : X \to X/U$, gegeben durch

$$\omega(x) = x + U$$

heißt *Quotientenabbildung.* Falls U abgeschlossen ist, so ist der Quotientenraum X/U ausgestattet mit der Norm $\|x+U\|_{X/U} = \inf_{u\in U} \|x+u\|$ ein normierter Raum und die Quotientenabbildung stetig.

ÜBUNGSAUFGABE 1. Seien X, Y normierte Räume und U ein abgeschlossener Teilraum von X. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $\|\cdot\|_{X/U} = \inf_{u\in U} \|x+u\|$ definiert eine Norm auf X/U.
(b) Die Quotientenabbildung $\omega : X \to X/U$ ist stetig.
(c) Ist X zusätzlich vollständig, so ist auch X/U vollständig.
Hinweis: Zeigen Sie dass in einem normierten Raum Y gilt dass Y vollständig ist genau dann wenn für jede Folge $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y$ für die $\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\| < \infty$ folgt dass $\sum_{n=1}^{\infty} y_n \in Y$.
(d) Ist $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, dann ist $\widehat{T} : X/\ker(T) \to \operatorname{im}(T)$ gegeben durch

$$\widehat{T}(x + \ker(T)) = Tx$$

wohldefiniert, linear, bijektiv und stetig.

2. Das Lemma von Zorn

LEMMA VON ZORN. *Sei $(A, \leq)$ eine partiell geordnete, nichtleere Menge, in der jede* Kette *(= eine total geordnete Teilmenge von A) eine obere Schranke in A besitzt. Dann liegt jedes Element von A unter einem* maximalen Element *$m \in A$, d.h. für alle $a \in A$ gilt*

$$a \geq m \implies a = m$$

PROPOSITION 2. *Sei X ein unendlichdimensionaler Banachraum. Dann existiert eine unbeschränkte lineare Abbildung $\ell : X \to \mathbb{R}$.*

BEWEIS. Wir werden die Existenz einer solchen Abbildung mit Hilfe des Lemmas von Zorn nachweisen. Sei dazu $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ eine Menge linear unabhängiger Vektoren mit $\|x_n\| = 1$. Sei nun

$$\mathcal{M} = \{M \subset X : M \supset Y \text{ und } M \text{ ist linear unabhängig}\},$$

und die partielle Ordnung $\leq$ auf $\mathcal{M}$ sei definiert durch $M_1 \leq M_2$ genau dann wenn $M_1 \subset M_2$. Weil $Y \in \mathcal{M}$ gilt $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Sei $\{M_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{M}$ eine Kette. Wir definieren nun $M := \bigcup_{i\in I} M_i$ und zeigen nun dass M linear unabhängig ist. Sei dazu $F \subset M$ endlich. Dann liegt F in endlich vielen Elementen der $\{M_i\}_{i\in I}$, und aufgrund ihrer linearen Ordnung gibt es einen Index $i_0 \in I$ existiert sodass $F \subset M_{i_0}$, und somit ist F linear unabhängig. Also haben wir gezeigt dass M linear unabhängig ist, und somit $M \in \mathcal{M}$. Aus dem Lemma von Zorn folgt nun die Existenz eines maximalen Elements $M_0 \in \mathcal{M}$. Wie man sich leicht überzeugt ist M_0 aufgrund der Maximalität eine Hamelbasis für X, welche per Definition Y enthält. Wir definieren

$$\ell(x_n) = n, n \in \mathbb{N} \qquad \text{und} \qquad \ell(m) = 0, m \in M_0 \setminus Y,$$

und setzen ℓ linear auf X fort. Es gilt $\|\ell\| \geq \sup_n |\ell(x_n)| = \infty$. □

ÜBUNGSAUFGABE 3. Zeigen Sie mit Hilfe des Lemmas von Zorn dass jeder Vektorraum eine Hamelbasis besitzt.

3. Der Satz von Hahn-Banach – Version der linearen Algebra

Sei X ein reeller Vektorraum. Eine Abbildung $p : X \to \mathbb{R}$ heißt *sublinear*, falls

(a) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ für alle $\lambda \geq 0$, $x \in X$,
(b) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ für alle $x, y \in X$.

Satz 4. *Sei X ein reeller Vektorraum, und sei U ein Unterraum von X. Weiters seien $p : X \to \mathbb{R}$ sublinear und $\ell : U \to \mathbb{R}$ linear, sodass*

$$\ell(u) \leq p(u), \qquad u \in U.$$

Dann existiert eine lineare Fortsetzung $L : X \to \mathbb{R}$, $L|U = \ell$ mit

$$L(x) \leq p(x), \qquad x \in X.$$

Beweis von Satz 4. **Step 1.** Wir betrachten zunächst den Fall, dass U *Kodimension 1 in X* hat, also

$$\dim X/U = 1 \quad \text{wobei} \quad X/U = \{x + U \ : \ x \in X\}. \tag{3.1}$$

Sei nun $x_0 \in X \setminus U$, dann besitzt jedes $x \in X$ die *eindeutige* Darstellung $x = u + \lambda x_0$, für ein $u \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir definieren für alle $r \in \mathbb{R}$

$$L_r(x) = \ell(u) + \lambda r.$$

L_r ist für jedes r linear und stimmt mit ℓ auf U überein. Wir werden nun r so wählen, dass

$$L_r(x) \leq p(x), \qquad x \in X. \tag{3.2}$$

Es sei bemerkt, dass (3.2) äquivalent ist zu

$$\ell(u) + \lambda r \leq p(u + \lambda x_0), \qquad u \in U,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Im Fall $\lambda = 0$ ist nichts zu zeigen. Für $\lambda > 0$ ist (3.2) äquivalent zu

$$\lambda r \leq p(u + \lambda x_0) - \ell(u), \qquad u \in U,\ \lambda > 0$$

und

$$r \leq p(\frac{u}{\lambda} + x_0) - \ell(\frac{u}{\lambda}), \qquad u \in U,\ \lambda > 0.$$

Setzen wir $v = \frac{u}{\lambda}$, so erhalten wir

$$r \leq \inf_{v \in U} p(v + x_0) - \ell(v).$$

Analoge Umformungen für $\lambda < 0$ ergeben

$$r \geq \sup_{w \in U} \ell(w) - p(w - x_0).$$

Also ist (3.2) äquivalent zu

$$\sup_{w \in U} \ell(w) - p(w - x_0) \leq r \leq \inf_{v \in U} p(v + x_0) - \ell(v).$$

Durch auflösen von inf und sup erhalten wir

$$\ell(v) + \ell(w) \leq p(v + x_0) + p(w - x_0), \qquad v, w \in U. \tag{3.3}$$

Diese Ungleichung ist aber stets erfüllt, denn für $v+w \in U$ ist nach Voraussetzung $\ell(v+w) \leq p(v+w)$ und $p(v+x_0+w-x_0) \leq p(v+x_0)+p(w-x_0)$.

Step 2. Wir zeigen nun den allgemeinen Fall, wofür wir das Lemma von Zorn benötigen werden. Wir definieren die nichtleere Menge (s. Übungsaufgabe 5),

$$A := \left\{ (V, L_V) : \begin{array}{c} \text{V ist Unterraum von } X \text{ und } V \supset U \\ L_V : V \to \mathbb{R} \text{ linear} \\ L_V \leq p|V \text{ und } L_V|U = \ell \end{array} \right\},$$

und darauf eine partielle Ordnungsrelation durch $(V_1, L_{V_1}) \leq (V_2, L_{V_2})$, genau dann wenn

$$V_1 \subset V_2 \quad \text{und} \quad L_{V_2}|V_1 = L_{V_1}.$$

Um das Lemma von Zorn anwenden zu können, müssen wir zeigen, dass jede Kette bezüglich dieser Ordnung eine obere Schranke besitzt.

Dazu sei $\{(V_i, L_{V_i})\}_{i\in I} \subset A$ total geordnet. Wir zeigen (V, L_V) ist eine obere Schranke, wobei

$$V = \bigcup_{i\in I} V_i \quad \text{und} \quad L_V(x) = L_{V_i}(x) \text{ für } x \in V_i.$$

L_V ist wohldefiniert (s. Übungsaufgabe 5), $(V, L_V) \in A$ und für alle $i \in I$ ist

$$(V_i, L_{V_i}) \leq (V, L_V).$$

Folglich erhalten wir mit dem Lemma von Zorn ein maximales Element (X_0, L_{X_0}) in A. Angenommen $X_0 \neq X$. Dann gibt es einen Vektorraum W, sodass

$$X_0 \subsetneq W \subset X \quad \text{und } X_0 \text{ hat Kodimension 1 in } W.$$

Wir wenden Schritt 1 an und erhalten $(W, L_W) \in A$, was eine echte Majorante von (X_0, L_{X_0}) ist. Weil dies im Widerspruch zur Maximalität von (X_0, L_{X_0}) steht, ist $X_0 = X$ und $L := L_{X_0}$ ist die gesuchte Erweiterung von ℓ auf ganz X.

□

ÜBUNGSAUFGABE 5.

(a) Warum ist $A \neq \emptyset$?
(b) Zeigen Sie dass L_V wohldefiniert ist.

PROPOSITION 6. *Es existiert eine lineare stetige Abbildung $L : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $L(x) \geq 0$ *falls* $x = (x_n)_n \in \ell^\infty$ *mit* $x_n \geq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.
(ii) $L((x_1, x_2, x_3, \ldots)) = L((x_2, x_3, \ldots))$, *für alle* $(x_n)_n \in \ell^\infty$.
(iii) $L((1, 1, 1, \ldots)) = 1$

BEMERKUNG 7. Eine Abbildung mit diesen Eigenschaften heißt *Banachlimes.*

BEWEIS. Wir bezeichnen mit X den Teilraum von ℓ^∞ gegeben durch

$$X = \{(x_n)_n \in \ell^\infty : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \text{ existiert}\}.$$

Sei $\ell : X \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\ell((x_n)_n) = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$. Wir definieren $p : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ als $p((x_n)_n) = \lim_n \sup_{m\geq n} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_k$ und halten fest dass p sublinear ist und es gilt $\ell(x) \leq p(x)$, $x \in X$. Mit dem Satz von Hahn-Banach (Satz 4) setzen wir ℓ

auf ganz ℓ^∞ zu L linear fort, sodass $L(x) \leq p(x)$, $x \in \ell^\infty$. Weil $(1,1,1,\dots) \in X$ so ist $L((1,1,1,\dots)) = \ell((1,1,1,\dots)) = 1$, und damit ist (iii) gezeigt. Also gilt auch

$$-L(x) = L(-x) \leq p(-x) = \lim_n \sup_{m \geq n} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m -x_k = -\lim_n \inf_{m \geq n} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_k,$$

d.h. $L(x) \geq \lim_n \inf_{m \geq n} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_k$, für alle $(x_n)_n \in \ell^\infty$. Wir halten also fest

$$\lim_n \inf_{m \geq n} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_k \leq L(x) \leq \lim_n \sup_{m \geq n} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_k, \qquad (x_n)_n \in \ell^\infty,$$

woraus $\|L\| = 1$ und (i) folgt. Sei nun $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell^\infty$ fixiert und wir setzen $y = (x_2, x_3, \dots)$. Dann gilt für $z = (z_k)_k = x - y$ dass

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n z_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k - x_{k+1} = \frac{x_1 - x_{n+1}}{n} \to 0,$$

also ist $z \in X$ und somit $L(z) = \ell(z) = 0$, d.h. $L(x) = L(y)$, und so ist auch (ii) gezeigt. □

4. Der Satz von Hahn-Banach – Fortsetzungsversion

SATZ 8. *Sei X ein normierter Raum, und sei U ein Unterraum von X. Zu jedem linearen stetigen Funktional $u^* : U \to \mathbb{R}$ existiert ein lineares stetiges Funktional $x^* : X \to \mathbb{R}$ mit*

$$x^*|U = u^* \qquad \textit{und} \qquad \|x^*\|_{X^*} = \|u^*\|_{U^*}.$$

BEWEIS. Sei $u^* \in U^*$ fixiert. Wir definieren die sublineare Abbildung $p : X \to \mathbb{R}$ durch

$$p(x) = \|u^*\|_{U^*} \|x\|_X, \qquad x \in X.$$

Es gilt

$$u^*(u) \leq p(u), \qquad u \in U.$$

Mit Satz 4 erhalten wir eine lineare Fortsetzung $x^* : X \to \mathbb{R}$ von u^*, sodass

$$x^*(x) \leq p(x), \quad x \in X.$$

Weil $p(-x) = p(x)$ folgt

$$|x^*(x)| \leq p(x) = \|u^*\|_{U^*} \|x\|_X, \quad x \in X,$$

also ist $\|x^*\|_{X^*} \leq \|u^*\|_{U^*}$. Weil $x^*|U = u^*$ gilt Gleichheit. □

KOROLLAR 9. *In jedem normierten Raum X existiert zu jedem $x \in X$, $x \neq 0$ ein $x^* \in X^*$, sodass*

$$\|x^*\|_{X^*} = 1 \qquad \textit{und} \qquad x^*(x) = \|x\|_X.$$

BEWEIS. Sei $x_0 \in X \setminus \{0\}$ und $U = \operatorname{span}\{x_0\}$. Wir definieren das lineares Funktional $u^* \in U^*$ durch

$$\lambda x_0 \mapsto \lambda \|x_0\|, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Es gilt $\|u^*\|_{U^*} = 1$ und $u^*(x_0) = \|x_0\|_X$. Aus Satz 8 erhalten wir eine Fortsetzung $x^* \in X^*$ von u^* mit den gewünschten Eigenschaften. □

BEMERKUNG 10. Aus Korollar 9 folgt dass für jeden normierten Raum $X \neq \{0\}$ gilt dass $X^* \neq \{0\}$.

Korollar 11. *In jedem normierten Raum X gilt*

$$\|x\|_X = \sup_{\|x^*\|_{X^*} \leq 1} |x^*(x)|.$$

Beweis. Für $x = 0$ ist nichts zu zeigen. Für $x \neq 0$ folgt aus Korollar 9 die Existenz eines linearen Funktionals $x^* \in X^*$ mit

$$\|x^*\|_{X^*} = 1 \quad \text{und} \quad x^*(x) = \|x\|_X.$$

Somit gilt

$$\|x\|_X \leq \sup_{\|x^*\|_{X^*} \leq 1} |x^*(x)|.$$

Die andere Ungleichung gilt per Definition der Norm in X^*. □

Korollar 12. *Sei X ein normierter Raum, $U \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum und $x_0 \notin U$. Dann existiert ein $x^* \in X^*$ mit $\|x^*\|_{X^*} = 1$, sodass*

$$x^*(x_0) \geq \mathrm{d}(x_0, U) \qquad \textit{und} \qquad x^*|U = 0.$$

Übungsaufgabe 13. Beweisen Sie Korollar 12. Hinweis: Betrachten Sie den Quotientenraum X/U.

5. Trennungssätze

Lemma 14. *Sei X ein normierter Raum und $V \subset X$ konvex und offen mit $0 \notin V$. Dann existiert ein $x^* \in X^*$, sodass*

$$x^*(v) < 0, \qquad v \in V.$$

Beweis. Sei x_0 so, dass $-x_0 \in V$. Wir definieren die offene Menge $U = V + x_0$ und stellen fest, dass $0 \in U$ und $x_0 \notin U$ (siehe Abbildung 1). Sei $\varepsilon > 0$ so, dass $B(0, \varepsilon) \subset U$. Das *Minkowskifunktional* $p_U : X \to [0, \infty)$ zu U ist gegeben durch

$$p_U(x) = \inf\{\lambda > 0 \,:\, x/\lambda \in U\}.$$

p_U ist wohldefiniert, sublinear, es gilt $p_U(x_0) \geq 1$ und $p_U(x) \leq \|x\|/\varepsilon$, $x \in X$ (s. Übungsaufgabe 15). Auf dem Unterraum $Y = \mathrm{span}\{x_0\}$ definieren wir das lineare Funktional y^* durch

$$y^*(tx_0) = tp_U(x_0), \qquad t \in \mathbb{R},$$

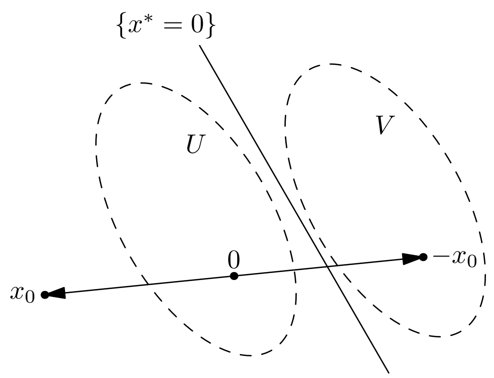

Abbildung 1. Darstellung von V, U und x_0.

und stellen fest, dass für alle $y \in Y$ gilt $y^*(y) \leq p_U(y)$. Wir setzen y^* mit Satz 4 linear auf den ganzen Raum fort, bezeichnen diese Fortsetzung mit x^* und halten fest, dass $x^*(x) \leq p_U(x)$, $x \in X$. Es gilt $x^* \in X^*$, denn

$$|x^*(x)| = \max\{x^*(x), -x^*(x)\} \leq \max\{p_U(x), p_U(-x)\} \leq \|x\|/\varepsilon.$$

Für jedes $v \in V$ existiert ein $u \in U$, sodass $v = u - x_0$, also

$$x^*(v) = x^*(u) - x^*(x_0) \leq p_U(u) - y^*(x_0) < 0.$$

Die letzte Ungleichung gilt, weil $y^*(x_0) \geq 1$ und $p_U(u) < 1$ für $u \in U$. $\square$

Übungsaufgabe 15. Zeigen Sie das Minkowskifunktional p_U (definiert im Beweis von Lemma 14) ist wohldefiniert, sublinear, $p_U(x_0) \geq 1$ und $p_U(x) \leq \|x\|/\varepsilon$, für alle $x \in X$.

Satz 16. *Sei X ein normierter Raum, $V_1, V_2 \subset X$ disjunkt, konvex und sei V_1 offen. Dann existiert ein $x^* \in X^*$ mit*

$$x^*(v_1) < x^*(v_2), \qquad v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2.$$

Beweis. Wir definieren die konvexe und offene Menge $V = V_1 - V_2$ (s. Übungsaufgabe 17), und halten fest, dass $0 \notin V$. Mit Lemma 14 folgt die Existenz eines $x^* \in X^*$, sodass für alle $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$ gilt $x^*(v_1 - v_2) < 0$. $\square$

Übungsaufgabe 17. Seien $V_1, V_2 \subset X$ konvexe Mengen im normierten Raum X, und $V = V_1 + V_2$. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(a) V ist konvex.
(b) Ist V_1 zusätzlich offen, so ist auch V offen.

Zeigen Sie das Minkowskifunktional p_U (definiert im Beweis von Lemma 14) ist wohldefiniert, sublinear, $p_U(x_0) \geq 1$ und $p_U(x) \leq \|x\|/\varepsilon$, für alle $x \in X$.

Satz 18. *Sei X ein normierter Raum, $V \subset X$ abgeschlossen, konvex und sei $x_0 \notin V$. Dann existieren ein $x^* \in X^*$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass*

$$x^*(v) \leq \alpha < x^*(x_0), \qquad v \in V.$$

Beweis. Weil V abgeschlossen ist, finden wir ein $\delta > 0$, sodass $B(x_0, \delta) \cap V = \emptyset$. Nach Satz 16 existiert ein $x^* \in X^*$ mit

$$x^*(v) < x^*(x), \qquad v \in V,\ x \in B(x_0, \delta).$$

D.h. für alle $v \in V$ und $\|y\|_X < \delta$ ist $x^*(v) < x^*(x_0) + x^*(y)$. Wir wählen $\|y\| < \delta$ so, dass $x^*(y) = -\|x^*\|_{X^*}\delta/2$, und erhalten

$$x^*(v) < x^*(x_0) - \|x^*\|_{X^*}\delta/2 < x^*(x_0). \qquad \square$$

KAPITEL 2

Kompaktheit in metrischen und normierten Räumen

Dieses Kapitel ist großteils aus [**DS88**] entnommen.

1. Metrische Räume – Grundlagen

Sei M eine nichtleere Menge und $d : M \times M \to [0, \infty)$. Dann heißt (M, d) *metrischer Raum*, wenn für alle $x, y, z \in M$ gilt

(a) $d(x, y) = 0$, genau dann wenn $x = y$,
(b) $d(x, y) = d(y, x)$,
(c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Wir bezeichnen die *offenen* bzw. *abgeschlossenen Kugeln* um x mit Radius ε mit

$$B_d(x, \varepsilon) = \{y \in M \,:\, d(x, y) < \varepsilon\}$$

bzw.

$$\overline{B}_d(x, \varepsilon) = \{y \in M \,:\, d(x, y) \leq \varepsilon\}.$$

Gelegentlich werden wir den Index d weglassen. Seien $A, B \subset M$. Der *Durchmesser* $\operatorname{diam}(A)$ von A ist gegeben durch $\sup\{d(x, y) \,:\, x, y \in A\}$. Der *Abstand* $\mathrm{d}(A, B)$ von A und B ist gegeben durch $\inf\{d(x, y) \,:\, x \in A,\, y \in B\}$. Falls $A = \{x\}$, so schreiben wir $\mathrm{d}(A, B) = \mathrm{d}(x, B)$.

Ein Punkt $x \in A$ heißt *innerer Punkt* von A, falls eine offene Kugel $B_d(x, \varepsilon)$ existiert, sodass $B_d(x, \varepsilon) \subset A$. Die Menge A heißt *offen*, wenn jeder Punkt $x \in A$ ein innerer Punkt ist. Die Menge A heißt *abgeschlossen*, wenn $M \setminus A$ offen ist. Gelegentlich schreiben wir auch A^c für $M \setminus A$. Jede Vereinigung offener Mengen ist offen, jeder Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen. Das *Innere* $\operatorname{int} A$ der Menge A ist definiert durch

$$\operatorname{int} A = \bigcup\{X \subset A \,:\, X \text{ ist offen}\}.$$

Der *Abschluss* $\operatorname{cl} A$ der Menge A ist definiert durch

$$\operatorname{cl} A = \bigcap\{X \supset A \,:\, X \text{ ist abgeschlossen}\}.$$

Sei $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ eine Folge in M. Dann konvergiert $\{x_n\}$ (bezüglich der Metrik d) gegen x, genau dann wenn $\lim_n d(x_n, x) = 0$. Wir schreiben $x_n \to x$ (für $n \to \infty$). Es gelten folgende Aussagen:

(i) $x \in \operatorname{int} A$, genau dann wenn x innerer Punkt von A ist.
(ii) $M \setminus \operatorname{cl} A = \operatorname{int}(M \setminus A)$.
(iii) $\operatorname{int} A \subset A$ und $\operatorname{cl} A \supset A$.
(iv) Der Abschluss einer Menge ist abgeschlossen, das Innere einer Menge ist offen.
(v) $x \in \operatorname{cl} A$, genau dann wenn eine Folge $\{x_n\}_n \subset A$ existiert, sodass $x_n \to x$.

Eine Folge $\{x_n\}_n \subset M$ heißt *Cauchyfolge*, genau dann wenn $\lim_n \sup_{k,m\geq n} d(x_k, x_m) = 0$. Ein metrischer Raum heißt *vollständig*, genau dann wenn jede Cauchyfolge konvergiert. Seien (M_1, d_1), (M_2, d_2) metrische Räume und $x \in M_1$. Dann heißt $f : M_1 \to M_2$ *stetig in* x, genau dann wenn für jede Folge $\{x_n\} \subset M_1$ mit $x_n \to x$ bezüglich d_1 gilt $f(x_n) \to f(x)$ bezüglich d_2.

2. Kompaktheit in metrischen Räumen

Ein metrischer Raum (M, d) heißt *(überdeckungs–)kompakt*, falls für jede offene Überdeckung $\{U_\alpha\}_\alpha$ von M eine endliche Teilüberdeckung $\{U_1, \ldots, U_n\}$ existiert.

Satz 19. *Sei (M, d) ein metrischer Raum, dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) M ist kompakt.
(ii) M ist vollständig und für jedes $\varepsilon > 0$ existieren $x_1, \ldots, x_n \in M$, sodass $M = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$.
(iii) Jede Folge in M besitzt eine konvergente Teilfolge.

Die Menge $\{x_1, \ldots, x_n\}$ in (ii) heißt endliches ε–Netz von M. Eigenschaft (iii) heißt M ist *folgenkompakt.*

Beweis. **Beweis (iii) $\Longrightarrow$ (ii).** Sei $\{x_n\}_n$ eine Cauchyfolge in M, dann existiert wegen (iii) eine Teilfolge $\{x_{n_k}\}_k \subset \{x_n\}_n$ und ein $x \in M$, sodass $x_{n_k} \to x$. Weil x_n eine Cauchyfolge ist, gilt auch $x_n \to x$. Wir haben soeben gezeigt, dass M vollständig ist. Angenommmen die Implikation ist falsch, also muß es ein $\varepsilon > 0$ geben, sodass für jede endliche Menge $\{x_1 \ldots x_n\} \subset M$ gilt

$$\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon) \subsetneq M.$$

Wähle $x_1 \in M$, dann ist $B(x_1, \varepsilon) \subsetneq M$. Also existiert ein $x_2 \in M \setminus B(x_1, \varepsilon)$ und es gilt $B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon) \subsetneq M$. Setzen wir diesen Prozess fort, erhalten wir die Folge $\{x_n\}_n$ mit der Eigenschaft, dass für alle $m \neq n \in \mathbb{N}$ gilt $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$

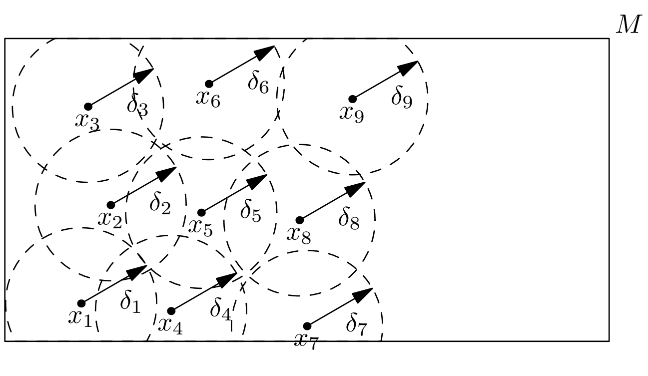

Abbildung 1. Konstruktion von $\{x_n\}_n$.

(s Abbildung 1). Insbesondere enthält $\{x_n\}_n$ keine konvergente Teilfolge, was im Widerspruch zu (iii) steht.

Beweis (ii) $\implies$ (iii)**.** Sei $\{x_n\}_n \subset M$ fixiert. Für jedes k existieren $y_{k,1}, \dots y_{k,n(k)} \in M$, sodass

$$M = \bigcup_{j=1}^{n(k)} B(y_{k,j}, 2^{-k}).$$

Also existieren eine Teilfolge $\{x_{1,n}\}_n \subset \{x_n\}$ und ein Index $j(1)$, sodass

$$\{x_{1,n}\}_n \subset B(y_{1,j(1)}, 1/2).$$

Wenn wir die Konstruktion mit $\{x_{1,n}\}$ statt $\{x_n\}_n$ wiederholen, so erhalten wir die Teilfolge $\{x_{2,n}\}_n \subset \{x_{1,n}\}_n$ und einen Index $j(2)$, sodass

$$\{x_{2,n}\}_n \subset B(y_{1,j(1)}, 1/2) \cap B(y_{2,j(2)}, 1/4).$$

Setzen wir diesen Prozess fort erhalten wir für jedes k eine Folge $\{x_{k,n}\}_n$ mit der Eigenschaft, dass

$$\operatorname{diam}(\{x_{k,n}\}_n) \leq 2^{-k+1}.$$

Für die Diagonalfolge $\{x_{m,m}\}_m \subset \{x_n\}_n$ gilt $\operatorname{diam}(\{x_{m,m}\}_{m\geq p}) \leq 2^{-p+1}$, also ist $\{x_{m,m}\}_m$ eine Cauchyfolge und nach (ii) konvergent.

Beweis (i) $\implies$ (ii)**.** Sei $\{x_n\}_n$ eine Cauchyfolge, dann gilt $\lim_n \operatorname{diam} \operatorname{cl}\{x_j : j \geq n\} = 0$. Angenommen $\bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname{cl}\{x_j : j \geq n\} = \emptyset$. Dann ist

$$M = M \setminus \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname{cl}\{x_j : j \geq n\} \Big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} M \setminus \operatorname{cl}\{x_j : j \geq n\}.$$

Die Mengen $M \setminus \operatorname{cl}\{x_j : j \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$ bilden eine offene Überdeckung von M, also existiert wegen (i) ein Index m, sodass

$$M = M \setminus \Big(\bigcap_{n=1}^{m} \operatorname{cl}\{x_j : j \geq n\} \Big) = M \setminus \operatorname{cl}\{x_j : j \geq m\},$$

was einen Widerspruch darstellt.

Für die Existenz eines endlichen ε–Netzes, betrachte die offene Überdeckung $\{B(x, \varepsilon) : x \in M\}$ von M.

Beweis (ii) & (iii) $\implies$ (i)**.** Sei $M = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma$, U_γ offen. Behauptung: es existiert ein $\delta > 0$, sodass für alle $x \in M$ ein Index $\beta = \beta(x) \in \Gamma$ existiert, sodass $B(x, \delta) \subset U_\beta$. Angenommen die Behauptung ist falsch.

Dann finden wir eine Folge $\{x_n\}_n \subset M$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\gamma \in \Gamma$ gilt

$$B(x_n, 1/n) \not\subset U_\gamma.$$

Nach (iii) gibt es eine Teilfolge $\{x_{n_k}\}_k \subset \{x_n\}_n$ und ein $x_0 \in M$, sodass $x_{n_k} \to x_0$. Sei $\beta \in \Gamma$ jener Index, für den $U_\beta \ni x_0$. Weil U_β offen ist, finden wir einen Index k_0, sodass für alle $k \geq k_0$ gilt

$$B(x_{n_k}, 1/n_k) \subset U_\beta,$$

was im Widerspruch zur Annahme steht.

Wegen (ii) finden wir Punkte $x_1, \dots, x_n$ so, dass $M = \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \delta)$. Daraus folgt aufgrund der Behauptung $M = \bigcup_{j=1}^{n} U_{\beta(x_j)}$.

$\square$

3. Kompaktheit in normierten Räumen

Jeder normierte Raum ist ein metrischer Raum mit Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$. Ist der (metrische) Raum (X, d) vollständig so heißt $(X, \|\cdot\|)$ *Banachraum.*

BEHAUPTUNG 20. Eine Teilmenge eines Banachraumes ist vollständig, genau dann wenn sie abgeschlossen ist.

ÜBUNGSAUFGABE 21. Beweisen Sie Behauptung 20.

PROPOSITION 22. *Sei S eine nichtleere Menge, dann ist*

$$\ell^\infty(S) = \{x : S \to \mathbb{R} \mid \sup_{s\in S} |x(s)| < \infty\}$$

ausgestattet mit der Norm $\|x\|_\infty = \sup_{s\in S} |x(s)|$ ein Banachraum.

ÜBUNGSAUFGABE 23. Beweisen Sie Proposition 22.

Der Banachraum $\ell^\infty(S)$ ist universell für metrische Räume in folgendem Sinne.

SATZ 24 (Kuratowski Einbettung). *Sei (M, d) ein metrischer Raum, dann existiert eine Abbildung $f : (M, d) \to (\ell^\infty(M), \|\cdot\|_\infty)$, sodass*

$$\|f(m) - f(m')\|_\infty = d(m, m'), \qquad m, m' \in M.$$

Eine solche Abbildung heißt *Isometrie.*

BEWEIS. Sei $m_0 \in M$ fixiert. Betrachte die Abbildung $f(m) = x \mapsto d(m, x) - d(x, m_0)$. □

Ein metrischer Raum (M, d) heißt *separabel*, genau dann wenn M eine abzählbare, dichte Teilmenge enthält.

SATZ 25. *Ein metrischer Raum (M, d) ist* separabel*, genau dann wenn alle Teilräume separabel sind.*

ÜBUNGSAUFGABE 26. Beweisen Sie Satz 25.

SATZ 27. *Der Raum $\ell^\infty := \ell^\infty(\mathbb{N})$ ist* nicht *separabel.*

BEWEIS. Sei $A = \{x \in \ell^\infty : x(i) \in \{\pm 1\}, i \in \mathbb{N}\} \subset \ell^\infty$. Wir wissen, A ist überabzählbar. Angenommen B sei eine abzählbare, dichte Teilmenge von A. Für alle $x, y \in A$ ist $\|x - y\|_\infty \in \{0, 1, 2\}$, also gilt für alle $x \in A$, dass $\{y \in B : \|x - y\| \leq 1/2\} = \{x\}$. Dies impliziert $A \subset B$, was jedoch unmöglich ist, denn B ist abzählbar und A ist überabzählbar. □

SATZ 28. *Sei X ein endlichdimensionaler normierter Raum, und $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf X. Dann sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent, d.h. es existiert eine Konstante $C > 0$ sodass*

$$\frac{1}{C}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1, \qquad x \in X.$$

ÜBUNGSAUFGABE 29. Beweisen Sie Satz 28.
Hinweis: Sei $\{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Basis für X. Betrachten Sie die Norm

$$\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\| := \sum_{i=1}^n |a_i|$$

und zeigen Sie dass jede andere Norm auf X äquivalent zu X ist.

KOROLLAR 30. *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(i) *Endlichdimensionale normierte Räume sind vollständig.*
(ii) *Endlichdimensionale Teilräume normierter Räume sind abgeschlossen.*
(iii) *Eine Teilmenge eines endlichdimensionalen Raumes ist kompakt genau dann wenn Sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

ÜBUNGSAUFGABE 31. Beweisen Sie Korollar 30.

SATZ 32. *Sei X ein Banachraum. Dann ist $\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ kompakt genau dann wenn X endlichdimensional ist.*

Wir beweisen Satz 32 mit dem folgenden Lemma.

LEMMA 33 (Lemma von Riesz). *Sei X ein Banachraum, $U \neq X$ ein abgeschlossener Unterraum von X und $0 < \delta < 1$. Dann existiert ein $x_0 \in X$ mit $\|x_0\| = 1$, sodass*

$$\mathrm{d}(x, U) \geq 1 - \delta.$$

BEWEIS. Sei $y \in X \setminus U$, dann gilt aufgrund der Abgeschlossenheit von U, dass $\mathrm{d}(y, U) > 0$. Sei $u_0 \in U$ so, dass $\|y - u_0\| \leq \mathrm{d}(y, U)/(1 - \delta)$, dann gilt für $x_0 := (y - u_0)/\|y - u_0\|$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(x_0, U) &= \inf_{u \in U} \left\| \frac{y - u_0}{\|y - u_0\|} - u \right\| = \frac{1}{\|y - u_0\|} \inf_{u \in U} \|y - u_0 - \|y - u_0\| u\| \\ &= \frac{\mathrm{d}(y, U)}{\|y - u_0\|} \geq 1 - \delta. \end{aligned}$$

□

BEWEIS VON SATZ 32. Sei $\overline{B}_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ kompakt, dann folgt aus Satz 19, es existieren $x_1 \ldots, x_n \in \overline{B}_X$, sodass $\overline{B}_X = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, 1/2)$. Definiere den abgeschlossenen (Behauptung 20) Unterraum $U = \mathrm{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$ von X. Angenommen $U \neq X$, dann folgt aus Lemma 33 es existiert ein $x_0 \in X$ mit $\|x_0\| = 1$, sodass $\|x_0 - x_i\| > 1/2$ für alle $1 \leq i \leq n$ – ein Widerspruch. □

LEMMA 34. *Sei X ein Banachraum und $K \subset X$ abgeschlossen und beschränkt. Dann ist K kompakt genau dann wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein endlichdimensionaler Teilraum Y von X existiert, sodass für alle $x \in K$ gilt $\mathrm{d}(x, Y) < \varepsilon$.*

BEWEIS. Sei $\varepsilon > 0$, $K \subset \overline{B}_X$ abgeschlossen und Y ein endlichdimensionaler Raum, für den $\sup_{x \in K} \mathrm{d}(x, Y) < \varepsilon/4$ gilt. Erstens stellen wir fest dass K vollständig ist (Behauptung 20). Zweitens, für jedes $x \in K$ existiert ein $y \in Y$ sodass $\|x - y\| < \varepsilon/4$. Für diese y gilt $\|y\| < 1 + \varepsilon/4$, also

$$\sup_{x \in K} \mathrm{d}(x, \overline{B}_Y(0, 1 + \varepsilon/4)) < \varepsilon/4,$$

wobei $\overline{B}_Y(0, 1+\varepsilon/4) = \{y \in Y : \|y\| \leq 1+\varepsilon/4\}$. Aus Satz 32 folgt dass $\overline{B}_Y(0, 1+\varepsilon/4)$ kompakt ist, und mit Satz 19 erhalten wir ein endliches $\varepsilon/4$–Netz $\{y_1, \ldots, y_n\}$ von $\overline{B}_Y(0, 1 + \varepsilon/4)$. Wir haben bisher gezeigt

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n} B_X(y_j, \varepsilon/2),$$

wobei $\{y_1, \ldots, y_n\} \subset \overline{B}_Y$. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung, finden wir sofort ein ε–Netz in K, und so impliziert Satz 19 die Kompaktheit von K. □

ÜBUNGSAUFGABE 35. Beweisen Sie die fehlende Implikation im Beweis von Lemma 34.

SATZ 36 (Arzela–Ascoli für $\ell^\infty(S)$). *Sei $K \subset \ell^\infty(S)$. Folgende Aussagen sind äquivalent.*

(i) K ist kompakt.
(ii) K ist beschränkt, abgeschlossen, und für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine endliche Partition $\{S_1, \ldots, S_m\}$ von S, sodass

$$\sup_{f \in K} \max_{1 \le j \le m} \sup_{s,t \in S_j} |f(s) - f(t)| \le \varepsilon.$$

BEWEIS. $\ell^\infty(S)$ ist nach Satz 22 vollständig, also ist K nach Behauptung 20 abgeschlossen, genau dann wenn K vollständig ist. Des Weiteren sind sowohl kompakte Mengen von $\ell^\infty(S)$, als auch Mengen welche ein endliches ε–Netz besitzten, beschränkt. Somit folgt mit Satz 19, dass K kompakt ist, genau dann wenn K abgeschlossen ist, und für jedes $\varepsilon > 0$ ein endliches ε–Netz besitzt.

Seien $S_1 \ldots, S_m$ Teilmengen von S, sodass $\bigcup S_j = S$. Für jedes $\sigma : \{1, \ldots, m\} \to \{\pm 1\}$ definieren wir

$$S_\sigma = \bigcap_{j=1}^m \sigma(j) S_j, \qquad \text{wobei } +S_j = S_j \text{ und } -S_j = S \setminus S_j.$$

Dann gilt

$$S_\sigma \cap S_{\sigma'} = \emptyset, \ \sigma \neq \sigma' \qquad \text{und} \qquad \bigcup_\sigma S_\sigma = S.$$

Sei nun $f \in \ell^\infty(S)$, $\|f\|_\infty \le 1$, $\varepsilon > 0$ und $N > 2/\varepsilon$. Wir definieren $S_n = \{s : (n-1)\varepsilon < f(s) \le n\varepsilon\}$ und

$$g := \sum_{n=-N}^{N} n\varepsilon \, \mathbb{1}_{S_n}, \qquad \text{wobei } \mathbb{1}_{S_n}(s) = \begin{cases} 1 & s \in S_n, \\ 0 & s \notin S_n. \end{cases}$$

Die Mengen S_n sind paarweise disjunkt und $\bigcup_n S_n = S$, also

$$\|f - g\|_\infty = \sup_{s \in S} |f(s) - g(s)| = \sup_n \sup_{s \in S_n} |f(s) - g(s)| \le \varepsilon.$$

Sei $K \subset \ell^\infty(S)$ kompakt und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $\varepsilon/2$–Netz $\{g_1, \ldots, g_n\}$ aus Funktionen der Form $g_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} \mathbb{1}_{S_j}$, wobei $S_j \subset S$, sodass $\bigcup_{j=1}^m S_j = S$. Aus $\{S_1, \ldots, S_m\}$ erhalten wir die paarweise disjunkte Familie $\{S_\sigma\}_\sigma$. Jede der Funktionen $g_1, \ldots, g_n$ ist konstant auf jeder der Mengen $S_1, \ldots, S_m$. Also gilt für alle σ, alle $f \in K$ und alle $1 \le i \le n$, dass

$$\sup_{s,t \in S_\sigma} |f(s) - f(t)| = \sup_{s,t \in S_\sigma} |f(s) - g_i(s) + g_i(t) - f(t)| \le 2\|f - g_i\|_\infty.$$

Bilden wir das Minimum über i, folgt die Behauptung, weil $\{g_i\}_{i=1}^n$ ein $\varepsilon/2$–Netz ist.

Sei $K \subset B_{\ell^\infty(S)}(0,1)$ abgeschlossen, $\varepsilon > 0$ und $S_1, \ldots, S_m$ eine Partition von S, sodass

$$\sup_{f \in K} \max_{1 \le j \le m} \sup_{s,t \in S_j} |f(s) - f(t)| \le \varepsilon.$$

Dann gilt für den endlichdimensionalen Teilraum $F = \operatorname{span}\{\mathbb{1}_{S_j}\}_{j=1}^m$ von $\ell^\infty(S)$

$$\mathrm{d}(f, F) \le \varepsilon, \qquad f \in K.$$

Wir beenden den Beweis mit Proposition 22 und Lemma 34. □

PROPOSITION 37. *Sei (S,d) ein kompakter metrischer Raum. Dann ist*

$$C(S) = \{f : S \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig und } \|f\|_\infty < \infty\}$$

ausgestattet mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$ ein Banachraum.

ÜBUNGSAUFGABE 38. Beweisen Sie Proposition 37.
Hinweis: zeigen Sie $C(S) \subset \ell^\infty(S)$ ist abgeschlossen.

SATZ 39 (Arzela–Ascoli klassisch). *Sei (S,d) ein kompakter metrischer Raum und $K \subset C(S)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) K ist kompakt.
(ii) K ist beschränkt, abgeschlossen, und für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass für alle $f \in K$ und $s,t \in S$ mit $d(s,t) < \delta$ gilt $|f(s) - f(t)| \leq \varepsilon$.

BEWEIS. **Beweis (ii) $\implies$ (i).** Sei $K \subset C(S)$ und $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$, sodass für alle $f \in K$ und $s,t \in S$ mit $d(s,t) < \delta$ gilt $|f(s) - f(t)| \leq \varepsilon$. Weil S kompakt ist, besitzt die offene Überdeckung $\{B(s_0,\delta) : s_0 \in S\}$ von S eine endliche Teilüberdeckung $\{B(s_1,\delta),\dots,B(s_m,\delta)\}$. Diese Teilüberdeckung erzeugt eine $\{B(s_1,\delta),\dots,B(s_m,\delta)\}$ verfeinernde Partition $\{S_1,\dots,S_n\}$ von S (s. Beweis von Satz 36), für die gilt

$$\sup_{f\in K} \max_{1\leq j\leq n} \sup_{s,t\in S_j} |f(s) - f(t)| \leq \varepsilon.$$

Wir wenden Satz 36 an um diesen Beweisteil zu beenden.

Beweis (i) $\implies$ (ii). Sei $K \subset C(S)$ kompakt. Wir zeigen zunächst: für jedes $\varepsilon > 0$ und $s_0 \in S$, existiert ein $\delta > 0$, sodass

$$\sup_{f\in K} \sup_{s,t\in B(s_0,\delta)} |f(s) - f(t)| \leq \varepsilon. \tag{3.1}$$

Dazu seien ε und s_0 fixiert. Nach Satz 36 finden wir eine Partition $S_1,\dots,S_m$ von S, sodass

$$\sup_{f\in K} \max_{1\leq j\leq m} \sup_{s,t\in S_j} |f(s) - f(t)| \leq \varepsilon/2.$$

Weil jedes $f \in K$ stetig ist, gilt sogar

$$\sup_{f\in K} \max_{1\leq j\leq m} \sup_{s,t\in \operatorname{cl} S_j} |f(s) - f(t)| \leq \varepsilon/2.$$

Wir definieren die nichtleere endliche Indexmenge $\mathcal{J}_0 = \{j : s_0 \in \operatorname{cl} S_j\}$, und sehen, dass für $T_0 = \bigcup_{j\in\mathcal{J}_0} \operatorname{cl} S_j$ gilt

$$\sup_{f\in K} \sup_{s,t\in T_0} |f(s) - f(t)| \leq \varepsilon.$$

Die Menge $T_1 = S \setminus \bigcup_{j\notin\mathcal{J}_0} \operatorname{cl} S_j$ ist offen, $T_1 \subset \bigcup_{j\in\mathcal{J}_0} \operatorname{cl} S_j$ und $s_0 \in T_1$. Daher existiert ein $\delta > 0$, sodass $B(s_0,\delta) \subset T_1$, und wir erhalten (3.1).

Angenommen (ii) ist falsch. Dann existieren ein $\varepsilon > 0$, Folgen $\{s_n\}_n, \{t_n\}_n \subset S$ und $\{f_n\}_n \subset K$, sodass

$$d(s_n,t_n) \to 0 \quad \text{und für alle } n \text{ gilt} \quad |f_n(s_n) - f_n(t_n)| \geq \varepsilon.$$

Weil S und K kompakt sind, können wir durch Übergang zu einer geeigneten Teilfolge (Satz 19) annehmen, die Folgen konvergieren. Also gilt $s_n, t_n \to x$, $f_n \to f$ für ein $x \in S$ und $f \in K$, und wir erhalten für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\begin{aligned}
0 < \varepsilon &\leq |f_n(s_n) - f_n(t_n)| \\
&\leq |f_n(s_n) - f(s_n)| + |f(s_n) - f(x)| + |f(x) - f(t_n)| + |f(t_n) - f_n(t_n)| \\
&\leq \|f_n - f\|_\infty + |f(s_n) - f(x)| + |f(x) - f(t_n)| + \|f - f_n\|_\infty.
\end{aligned}$$

Für $n \to \infty$ geht die rechte Seite gegen 0, und wir erhalten einen Widerspruch.

□

KAPITEL 3

Hauptsätze für Operatoren

Dieses Kapitel stammt aus [**Wer00**].

1. Der Bairesche Kategoriensatz für vollständige, metrische Räume

SATZ 40 (Bairescher Kategoriensatz). *Sei X ein vollständiger, metrischer Raum, und seien $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ abgeschlossene Teilmengen von X mit $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Dann existieren $m \in \mathbb{N}$, $x \in X$ und $\delta > 0$, sodass $B(x, \delta) \subset F_m$.*

BEWEIS. Angenommen für jedes $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$ und $\delta > 0$ gilt $B(x, \delta) \not\subset F_n$.

Sei $x_1 \in X$, dann ist per Annahme $B(x_1, 1) \setminus F_1$ nichtleer und offen. Also existiert ein $x_2 \in X$ und ein $0 < \delta_2 < 1/2$, sodass $\overline{B}(x_2, \delta_2) \subset B(x_1, 1) \setminus F_1$. Aufgrund unserer Annahme gilt, die Menge $B(x_2, \delta_2) \setminus F_2$ ist nichtleer und offen. Setzen wir diesen Prozess fort, so erhalten wir eine Folge $\{x_n\}_n \subset X$ und $\delta_n < 1/n$ (siehe Abbildung 1), sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\overline{B}(x_n, \delta_n) \subset B(x_{n-1}, \delta_{n-1}) \qquad \text{und} \qquad \overline{B}(x_n, \delta_n) \cap F_{n-1} = \emptyset.$$

Einerseits garantiert die erste Bedingung zusammen mit der Vollständigkeit von X, dass ein $x \in X$ existiert mit $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}(x_n, \delta_n)$, andererseits folgt aus der zweiten Bedingung, dass $x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = X$. □

ÜBUNGSAUFGABE 41. Zeigen Sie dass jede Hamelbasis eine unendlichdimensionalen Banachraums überabzählbar sein muss.
Hinweis: Verwenden Sie den Baireschen Kategoriensatz und Satz 32.

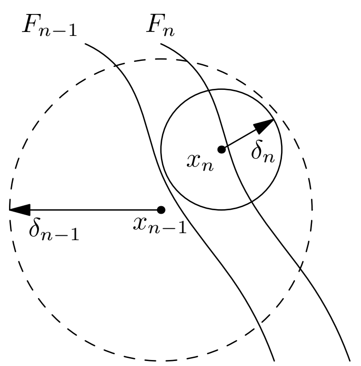

ABBILDUNG 1. Konstruktion von $\{x_n\}_n$.

2. Der Satz von der offenen Abbildung

Sei X ein Banachraum. Eine Menge $C \subset X$ heißt *σ–konvex*, falls für alle beschränkten Folgen $\{x_n\}_n \subset C$ und für alle $t_n \geq 0$ mit $\sum_n t_n = 1$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n \in C.$$

Sei $\{e_n\}_n$ die Standard Einheitsvektorbasis in ℓ^2 und $C = \mathrm{co}\{e_n\}_n$ die konvexe Hülle. Dann gilt für die unendliche Konvexkombination $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} e_n \notin C$, also ist C konvex aber nicht σ–konvex.

SATZ 42. *Sei X ein Banachraum, $C \subset X$ beschränkt und σ–konvex. Dann gilt für jede offene Menge U mit $U \subset \mathrm{cl}\, C$ sogar $U \subset C$.*

BEWEIS. Es ist zu zeigen, dass aus $B(\overline{x}, \delta) \subset \mathrm{cl}\, C$ folgt $B(\overline{x}, \delta) \subset C$. Beachte, dass $B(\overline{x}, \delta) \subset \mathrm{cl}\, C$ äquivalent ist zu $B(0, \delta) \subset \mathrm{cl}(C - \overline{x})$ (s. Übungsaufgabe 43). Das heißt wir können annehmen $\overline{x} = 0$.

Sei $\|x\| < \delta$, so existiert ein η, sodass $\|x\| < \eta < \delta$. Wir definieren $y = \delta x / \eta$ und stellen fest, dass weil $\|y\| < \delta$, so ist $y \in \mathrm{cl}\, C$. Also existiert ein $x_0 \in C$, sodass

$$\|y - x_0\| < \alpha\delta,$$

wobei $0 < \alpha < 1$ so, dass $(1-\alpha)\delta = \eta$. Also ist $\|\frac{y-x_0}{\alpha}\| < \delta$, und wir wiederholen den soeben durchgeführten Schritt. So erhalten wir ein $x_1 \in C$ mit $\|\frac{y-x_0}{\alpha} - x_1\| < \alpha\delta$, d.h. $\|y - x_0 - \alpha x_1\| < \alpha^2 \delta$ (siehe Abbildung 2). Setzen wir diesen Prozess fort, erhalten wir eine Folge $\{x_n\}_n \subset C$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\|y - \sum_{j=0}^{n} \alpha^j x_j\| < \alpha^{n+1} \delta.$$

Weil $\sum_j \alpha^j = 1/(1-\alpha)$, folgt aus der σ–Konvexität

$$x = (1-\alpha) y = \sum_{j=0}^{\infty} (1-\alpha) \alpha^j x_j \in C. \qquad \square$$

ÜBUNGSAUFGABE 43. Zeigen Sie dass $B(\overline{x}, \delta) \subset \mathrm{cl}\, C$ äquivalent zu $B(0, \delta) \subset \mathrm{cl}(C - \overline{x})$ ist.

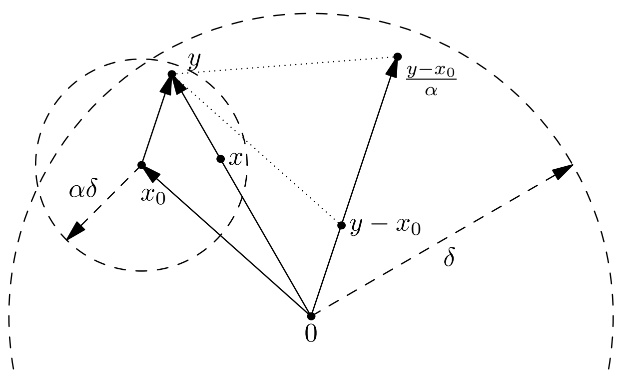

ABBILDUNG 2. Weil $\|y\| < \delta$ finden wir $x_0 \in C$, sodass $B(x_0, \alpha\delta) \ni y$. Die Konstruktion wird wiederholt mit $(y - x_0)/\alpha$.

BEHAUPTUNG 44. Seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Die Menge $C \subset X$ sei beschränkt und σ–konvex. Dann ist $T(C)$ σ–konvex.

ÜBUNGSAUFGABE 45. Zeigen Sie Behauptung 44.

Seien X, Y Banachräume. Eine lineare Abbildung $T : X \to Y$ heißt *offen*, falls $T(B_X)$ offen ist.

SATZ 46 (Satz von der offene Abbildung). *Seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ surjektiv. Dann ist T offen.*

BEWEIS. Es genügt zu zeigen, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass $B_Y(0, \varepsilon) \subset T(B_X)$ (s. Übungsaufgabe 47). Definiere $C_n = \operatorname{cl} T(B_X(0, n))$, dann gilt weil T surjektiv ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = Y$. Nun folgt aus dem Baireschen Kategoriensatz (Satz 40), dass ein $m \in \mathbb{N}$, ein $y_0 \in Y$ und ein $\delta > 0$ existieren, sodass $B_Y(y_0, \delta) \subset C_m$. Weil C_m symmetrisch ist (eine Menge A ist symmetrisch, falls $A = \{-a : a \in A\}$), so folgt $B_Y(-y_0, \delta) \subset C_m$. Aus der Konvexität von C_m folgern wir

$$B_Y(0, \delta) \subset C_m = \operatorname{cl} T(B_X(0, m)).$$

Weil B_X σ–konvex ist, folgt mit Behauptung 44 und Satz 42, dass $B_Y(0, \delta) \subset T(B_X(0, m))$, und durch Skalierung die Behauptung. □

ÜBUNGSAUFGABE 47. Zeigen Sie dass $T(B_X)$ genau dann offen ist, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass $B_Y(0, \varepsilon) \subset T(B_X)$.

KOROLLAR 48 (Satz von der stetigen Inversen). *Seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ bijektiv. Dann ist $T^{-1} : Y \to X$ stetig.*

NOTATION. $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ heißt Isomorphismus falls $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

BEWEIS VON KOROLLAR 48. Weil T nach Satz 46 offen ist, existiert ein $\delta > 0$, sodass

$$B_Y(0, \delta) \subset T(B_X).$$

D.h. für alle $\|y\|_Y < \delta$ gilt $\|T^{-1}y\|_X \leq 1$, und die Behauptung folgt mittels Skalierung. □

KOROLLAR 49. *Sei X ein linearer Raum und seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ Normen auf X. Falls $(X, \|\cdot\|_1)$ und $(X, \|\cdot\|_2)$ vollständig sind, dann existiert eine Konstante $C > 0$ sodass*

$$\frac{1}{C}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1, \qquad x \in X.$$

BEWEIS. Man betrachte die Abbildung $T : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ gegeben durch $Tx = x$ und verwende Korollar 48. □

NOTATION. Sei X ein Vektorraum und seien Y, Z lineare Teilräume von X mit $X = Y + Z$ und $Y \cap Z = \{0\}$. Dann sagen wir X ist die direkte Summe von Y und Z und wir schreiben

$$X = Y \oplus Z.$$

KOROLLAR 50. *Sei X ein Banachraum und seien Y und Z abgeschlossene Teilräume von X sodass $X = Y + Z$ und $Y \cap Z = \{0\}$, also $X = Y \oplus Z$. Dann ist die Abbildung $T : Y \times Z \to X$, $T(x, y) = x + y$ ein Isomorphismus.*

BEMERKUNG 51. Die Menge $Y \times Z$ (mit koordinatenweiser Addition und Skalarmultiplikation) ist ein linearer Vektorraum, und ausgestattet mit der Norm $\|(y, z)\| = \|y\|_Y + \|z\|_Z$ ein Banachraum.

Beweis von Korollar 50. T ist in $\mathcal{L}(Y \times Z, X)$ und bijektiv, also nach Korollar 48 ein Isomorphismus. □

Notation. Sei U ein Teilraum des linearen Raumes X, dann ist die Kodimension $\operatorname{codim} U$ definiert als $\operatorname{codim} U = \dim(X/U)$, wobei $X/U = \{x + U : x \in X\}$ wie üblich den Quotientenraum bezeichnet.

Korollar 52. *Sei X ein Banachraum und sei Y ein abgeschlossener Teilraum von X. Falls Y endliche Dimension oder Kodimension besitzt, so existiert ein Teilraum Z von X sodass $X = Y \oplus Z$.*

Beweis. Sei zunächst Y endlichdimensional und $\{y_i\}_{i=1}^n$ eine Basis für Y. Die Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to Y$, sei definiert durch

$$L(a_i)_{i=1}^n = \sum_{i=1}^n a_i y_i.$$

Die lineare Abbildung L ist linear, bijektiv und stetig (s. Übungsaufgabe 53), also nach Korollar 48 ein Isomorphismus. D.h. die Abbildung $L^{-1} : Y \to \mathbb{R}^n$, gegeben durch

$$L^{-1}(\sum_{i=1}^n a_i y_i) = (a_i)_{i=1}^n$$

ist stetig, also ist sie koordinatenweise stetig, d.h. $\ell_j : Y \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\ell_j(\sum_{i=1}^n a_i y_i) := a_j$$

ist stetig. Wir halten fest dass die Funktionen $\{\ell_j\}_{j=1}^n$ eine Basis für Y^* bilden. Wir setzen jede der Funktionen $\{\ell_j\}_{j=1}^n$ mit dem Satz von Hahn-Banach auf ganz X fort, siehe Satz 8, und definieren $P : X \to X$ durch

$$Px = \sum_{j=1}^n \ell_j(x) y_j.$$

Die Abbildung P ist linear, stetig, $\operatorname{im}(P) = Y$ und es gilt $P^2 = P$, also $P(Px) = Px$ für alle $x \in X$ (s. Übungsaufgabe 53). Man kann leicht zeigen dass $\ker(P) = \operatorname{im}(\operatorname{Id} - P)$ (s.Übungsaufgabe 53). Daher ist $Z = \operatorname{im}(\operatorname{Id} - P)$ als Kern eines stetigen Operators abgeschlossen und somit $X = Y \oplus Z$.

Sei nun X/Y endlichdimensional und $\{y_i\}_{i=1}^n$ eine Basis für X/Y. Wähle $\{x_i\}_{i=1}^n$ so dass $x_i + Y = y_i$, $1 \le i \le n$. Definiere den endlichdimensionalen (und somit abgeschlossenen) Teilraum $Z = \operatorname{span}\{x_i\}_{i=1}^n$. Wir zeigen $Y \oplus Z = X$. Sei dazu $x \in Z$, also $x = \sum_{i=2}^n a_i x_i$ dann ist $x + Y = \sum_{i=1}^n a_i(x_i + Y) = \sum_{i=1}^n a_i y_i$. Ist x nun auch in Y, dann folgt $\sum_{i=1}^n a_i y_i = 0$ und aus der linearen Unabhängigkeit von $\{y_i\}_{i=1}^n$ erhalten wir $x = 0$. Sei nun $x \in X$, dann ist

$$x + Y = \sum_{i=1}^n a_i y_i = \big(\sum_{i=1}^n a_i x_i\big) + Y =: z + Y,$$

mit $z \in Z$, $y := x - z \in Y$ und $y + z = x$. □

Notation. Sei X ein Banachraum, dann heißt $P \in \mathcal{L}(X)$ *Projektion* falls $P^2 = P$.

Übungsaufgabe 53. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) L (definiert im Beweis von Korollar 52) ist linear, bijektiv und stetig.

(b) Für P (definiert im Beweis von Korollar 52) gilt $P^2 = P$, $(\mathrm{Id} - P)^2 = \mathrm{Id} - P$ und $\ker P = \mathrm{im}(\mathrm{Id} - P)$.

KOROLLAR 54. *Seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ sodass* $\mathrm{im}\, T$ *endliche Kodimension besitzt. Dann ist* $\mathrm{im}\, T$ *abgeschlossen.*

BEWEIS. Wir definieren $N = \ker T$ und $E = \mathrm{im}\, T$. Die Abbildung $\widehat{T} : X/N \to E$,

$$\widehat{T}(x + N) = Tx.$$

ist wohldefiniert und linear. N ist als Kern eines stetigen Operators abgeschlossen, und somit ist X/N ausgestattet mit der Quotientennorm $\|x + N\| = \inf_{n \in N} \|x + n\|$ ein Banachraum. Man überzeugt sich leicht dass $\widehat{T} \in \mathcal{L}(X/N, Y)$. Wie im Beweis von Korollar 52 finden wir einen endlichdimensionalen Raum $F \subset Y$ mit $E + F = Y$ und $E \cap F = \{0\}$. F ist als endlichdimensionaler Raum abgeschlossen, und somit ist Y/F ausgestattet mit der üblichen Quotientennorm ein Banachraum. Sei $\omega : Y \to Y/F$ die Quotientenabbildung gegeben durch $y \mapsto y + F$, dann ist $\omega \in \mathcal{L}(Y, Y/F)$. Offenbar ist $S := \omega \circ \widehat{T} \in \mathcal{L}(X/N, Y/F)$ bijektiv, also nach Korollar 48 ein Isomorphismus. Sei nun $R : E \to X/N$ gegeben durch

$$Tx \mapsto x + N.$$

Es läßt sich leicht zeigen dass R wohldefiniert und linear ist. Weil $S^{-1}(Tx + F) = x + N$ folgt $R \in \mathcal{L}(E, X/N)$, denn

$$\begin{aligned} \|RTx\|_{X/N} &= \|x + N\|_{X/N} = \|S^{-1}(Tx + F)\|_{X/N} \\ &\leq \|S^{-1}\| \|Tx + F\|_{Y/F} \leq \|S^{-1}\| \|Tx\|_Y. \end{aligned}$$

Man beachte dass $R \circ \widehat{T} = \mathrm{Id}_{X/N}$ und $\widehat{T} \circ R = \mathrm{Id}_E$, d.h. E und der Banachraum X/N sind isomorph, insbesondere ist E abgeschlossen. ☐

BEMERKUNG 55. Wir haben in Korollar 54 soeben gezeigt dass wenn ein Teilraum U mit endlicher Kodimension Bild eines stetigen, linearen Operators, so ist U abgeschlossen. Dass nicht alle Teilräume mit endlicher Kodimension abgeschlossen sein müssen zeigt folgendes Beispiel.

Sei X ein Banachraum und $\ell : X \to \mathbb{R}$ linear. Dann gilt ℓ ist stetig genau dann wenn $\ker \ell$ abgeschlossen ist (s. Übungsaufgabe 56). Sei nun $\ell : X \to \mathbb{R}$ unbeschränkt. Dann ist $\ker \ell$ nicht abgeschlossen, jedoch hat $\ker \ell$ Kodimension 1 in X. Wie man ein solches ℓ konstruiert findet sich in Proposition 2.

ÜBUNGSAUFGABE 56. Sei X ein Banachraum und $\ell : X \to \mathbb{R}$ linear. Zeigen Sie ℓ ist stetig genau dann wenn $\ker \ell$ abgeschlossen ist.

3. Der Satz vom abgeschlossenen Graphen

BEHAUPTUNG 57. Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ vollständige, metrische Räume und sei $f : X \to Y$ stetig. Dann ist der *Graph* von f

$$\mathrm{graph}(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$$

abgeschlossen in dem vollständigen metrischen Raum $(X \times Y, d_{X \times Y})$, wobei

$$d_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2).$$

ÜBUNGSAUFGABE 58. Beweisen Sie Behauptung 57.

Satz 59 (Satz vom abgeschlossen Graphen). *Seien X, Y Banachräume und $T : X \to Y$ linear. Dann ist T stetig, genau dann wenn* $\operatorname{graph}(T)$ *abgeschlossen in $(X \times Y, \|\cdot\|_{X\times Y})$ ist, wobei $\|(x,y)\|_{X\times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$ für alle $(x,y) \in X \times Y$.*

Beweis. In Hinblick auf Behauptung 57 müssen wir nur zeigen, dass ein abgeschlossener Graph Stetigkeit impliziert. Sei der lineare Teilraum $Z = \operatorname{graph}(T)$ von $X \times Y$ abgeschlossen. Also ist Z ein Banachraum. Sei die lineare Abbildung $P : Z \to X$ gegeben durch $P(x, Tx) = x$. Dann ist P bijektiv und $\|P(x,Tx)\|_X = \|x\|_X \le \|(x,Tx)\|_{X\times Y}$. Nach Korollar 48 ist die Inverse $Q = P^{-1} : X \to Z$ gegeben durch $Qx = (x, Tx)$ beschränkt, also haben wir

$$\|x\|_X + \|Tx\|_Y = \|Qx\|_{X\times Y} \le \|Q\|\|x\|_X, \qquad x \in X,$$

und somit ist T stetig. □

4. Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

Satz 60 (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit). *Sei X ein Banachraum, Y ein normierter Raum und Γ eine Indexmenge. Für jedes $\gamma \in \Gamma$ sei $T_\gamma \in \mathcal{L}(X, Y)$ mit*

$$\sup_{\gamma\in\Gamma} \|T_\gamma x\|_Y < \infty, \qquad \textit{für alle } x \in X.$$

Dann gilt

$$\sup_{\gamma\in\Gamma} \|T_\gamma : X \to Y\| < \infty.$$

Beweis. Definiere die konvexen, symmetrischen und abgeschlossenen Mengen $C_n = \{x \in X : \sup_{\gamma\in\Gamma} \|T_\gamma x\|_Y \le n\}$, $n \in \mathbb{N}$ (s. Übungsaufgabe 61). Beachte, dass

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \{x \in X : \sup_{\gamma\in\Gamma} \|T_\gamma x\|_Y < \infty\} = X.$$

Mit Hilfe des Baireschen Kategoriensatzes (Satz 40), finden wir ein $m \in \mathbb{N}$, ein $x_0 \in X$ und ein $\delta > 0$, sodass $B(x_0, \delta) \subset C_m$. Aufgrund der Symmetrie und Konvexität von C_m ist $B(0, \delta) \subset C_m$, d.h.

$$\sup_{\gamma\in\Gamma} \|T_\gamma x\|_Y \le m, \qquad \text{für alle } \|x\| < \delta.$$

Durch Skalierung erhalten wir $\sup_{\gamma\in\Gamma} \|T_\gamma : X \to Y\| \le m/\delta$. □

Übungsaufgabe 61. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie die Menge $C_n = \{x \in X : \sup_{\gamma\in\Gamma} \|T_\gamma x\|_Y \le n\}$ (definiert im Beweis von Satz 60) ist konvex, symmetrisch und abgeschlossen.

5. Der Satz vom abgeschlossenen Bild

Seien X, Y normierte Räume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann heißt $T^* : Y^* \to X^*$ definiert durch $T^* y^* = x \mapsto y^*(Tx)$, $x \in X$ *adjungierter Operator*.

Behauptung 62. $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$.

Übungsaufgabe 63. Zeigen Sie Behauptung 62.

Sei X ein normierter Raum und $A \subset X$, $B \subset X^*$. Dann ist

$$A^\perp = \{x^* \in X^* : x^*(x) = 0 \text{ für alle } x \in A\}$$
$$B_\perp = \{x \in X : x^*(x) = 0 \text{ für alle } x^* \in B\}$$

Der abgeschlossene Unterraum $A^\perp$ heißt der *Annihilator* von A in X^*, und der abgeschlossene Unterraum $B_\perp$ der *Annihilator* von B in X.

BEHAUPTUNG 64. Sei X ein normierter Raum und U ein abgeschlossener Unterraum. Dann existieren isometrische Isomorphismen

$$S : (X/U)^* \to U^\perp$$
$$T : X^*/U^\perp \to U^*.$$

NOTATION. Manchmal schreiben wir $U^\perp = (X/U)^*$ und $U^* = X^*/U^\perp$ und meinen damit die Identifikation der jeweiligen Räume über die isometrischen Isomorphismen S und T.

ÜBUNGSAUFGABE 65. Zeigen Sie Behauptung 64.
Hinweis: $S(\ell) = \ell \circ \omega$, wobei $\omega : X \to X/U$ die Quotientenabbildung ist. $T(x^* + U^\perp) = x^*|U$.

SATZ 66 (Satz vom abgeschlossenen Bild). *Seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) $T(X)$ *ist abgeschlossen.*
(ii) $T(X) = \ker(T^*)_\perp$.
(iii) $T^*(Y^*)$ *ist abgeschlossen.*
(iv) $T^*(Y^*) = \ker(T)^\perp$.

Für den Beweis von Satz 66 benötigen wir die folgenden beiden Lemmata.

LEMMA 67. *Seien X, Y Banachräume, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Falls $T(X)$ abgeschlossen in Y ist, dann existiert eine Konstante $C > 0$, sodass für alle $y \in T(X)$ ein $x \in X$ existiert, mit $Tx = y$ und*

$$\|x\|_X \leq C\|y\|_Y.$$

BEWEIS. Weil $\ker(T)$ abgeschlossen ist, so ist $X/\ker(T)$ ausgestattet mit der Norm $\|x + \ker(T)\|_{X/\ker(T)} = \inf_{y \in \ker(T)} \|x + y\|_X$ ein Banachraum (s. Übungsaufgabe 1). Sei $\omega : X \to X/\ker(T)$ die Quotientenabbildung, und sei $\widehat{T} : X/\ker(T) \to T(X)$ gegeben durch $\widehat{T}(x + \ker(T)) = Tx$. Die Abbildung $\widehat{T}$ ist wohldefiniert, linear, bijektiv und stetig (s. Übungsaufgabe 1). Weil $T(X)$ abgeschlossen ist, folgt mit Korollar 48, dass $\|\widehat{T}^{-1} : T(X) \to X/\ker(T)\| < \infty$. Aus dieser Abschätzung erhalten wir die behauptete Ungleichung (s. Übungsaufgabe 68). □

ÜBUNGSAUFGABE 68. Führen Sie den Beweis von Lemma 68 zu Ende.

LEMMA 69. *Seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Falls eine Konstante $c > 0$ existiert, sodass für alle $y^* \in Y^*$ gilt*

$$c\|y^*\|_{Y^*} \leq \|T^* y^*\|_{X^*},$$

dann ist T offen.

BEWEIS. Die Menge $T(B_X)$ ist σ–konvex (Behauptung 44), also genügt wegen Satz 42 zu zeigen, dass

$$B_Y(0, c) \subset \operatorname{cl} T(B_X).$$

Sei dazu $\|y_0\|_Y < c$. Angenommen $y_0 \notin \operatorname{cl} T(B_X)$, dann folgt mit Satz 18 die Existenz von $y^* \in Y^*$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass

$$y^*(y) \leq \alpha < y^*(y_0), \qquad y \in \operatorname{cl} T(B_X).$$

Aus dieser Ungleichung ergibt sich der Widerspruch

$$\alpha < y^*(y_0) \le \|y^*\|_{Y^*}\|y_0\|_Y < c\|y^*\|_{Y^*} \le \|T^*y^*\|_{X^*} = \sup_{x\in B_X} y^*(Tx) \le \alpha. \qquad \square$$

Beweis von Satz 66. **Beweis** (i) $\implies$ (ii)**.** Wir zeigen $\operatorname{cl} T(X) = \ker(T^*)_\perp$. Sei $y = Tx \in T(X)$, dann gilt für alle $y^* \in \ker(T^*)$

$$y^*(y) = y^*(Tx) = T^*y^*(x) = 0,$$

also $y \in \ker(T^*)_\perp$.

Der Unterraum $U = \operatorname{cl} T(X)$ von Y ist abgeschlossen. Sei $y \in Y \setminus U$. Mit Korollar 12 erhalten wir ein $y^* \in Y^*$, mit $y^*(y) \neq 0$ und $y^*|U = 0$. Per Definition von U ist $y^* \in \ker(T^*)$, und weil $y^*(y) \neq 0$ folgt $y \notin \ker(T^*)_\perp$.

Beweis (ii) $\implies$ (i)**.** Annihilatoren sind abgeschlossen.

Beweis (i) $\implies$ (iv)**.** Sei $y^* \in Y^*$ und $x^* = T^*y^*$, dann gilt für alle $x \in \ker(T)$, dass $x^*(x) = y^*(Tx) = 0$. Folglich ist $x^* \in \ker(T)^\perp$, und somit $T^*(Y^*) \subset \ker(T)^\perp$.

Sei nun $x^* \in \ker(T)^\perp$. Wir definieren $z^* : T(X) \to \mathbb{R}$ durch $z^*(Tx) = x^*(x)$, $x \in X$. Die Abbildung z^* ist wohldefiniert und linear. Für jedes $y \in T(X)$, existiert nach Lemma 67 ein $x \in X$, sodass $Tx = y$ und $\|x\|_X \le C\|y\|_Y$, wobei $C > 0$ nicht von y abhängt. Somit ist

$$\begin{aligned}\|z^*\| &= \sup\{|z^*(y)| \,:\, y \in T(X),\ \|y\| \le 1\} \le \sup\{|z^*(Tx)| \,:\, x \in X,\ \|x\| \le C\}\\ &= C\|x^*\|_{X^*}.\end{aligned}$$

Sei y^* die Fortsetzung von z^* auf ganz Y^* nach Satz 8, dann ist für alle $x \in X$

$$x^*(x) = z^*(Tx) = y^*(Tx) = T^*y^*(x),$$

also $x^* = T^*y^* \in T^*(Y^*)$.

Beweis (iv) $\implies$ (iii)**.** Annihilatoren sind abgeschlossen.

Beweis (iii) $\implies$ (i)**.** Sei $Z = \operatorname{cl} T(X) \subset Y$ und $S : X \to Z$, $Sx = Tx$, $x \in X$. Für alle $y^* \in Y^*$ und $x \in X$ gilt $T^*y^*(x) = (y^*|Z)(Sx) = S^*(y^*|Z)(x)$, also $T^*y^* = S^*(y^*|Z)$, und wir erhalten $T^*(Y^*) \subset S^*(Z^*)$. Für $z^* \in Z^*$ gilt $S^*z^* = T^*y^*$ für alle Hahn–Banach Fortsetzungen $y^* \in Y^*$ von z^*, also ist $S^*(Z^*) \subset T^*(Y^*)$. Also ist $S^*(Z^*) = T^*(Y^*)$ abgeschlossen, und somit ist $S^*(Z^*)$ ein Banachraum. Weil S surjektiv ist, so ist S^* injektiv, und es folgt mit Korollar 48, dass für eine Konstante $c > 0$ gilt

$$\|S^*z^*\|_{X^*} \ge c\|z^*\|_{Z^*}, \qquad z^* \in Z^*.$$

Mit Lemma 69 folgt, dass S offen, also insbesondere surjektiv ist, d.h. $T(X) = S(X) = Z = \operatorname{cl} T(X)$.

$\square$

6. Satz von Schauder

NOTATION. Seien X, Y normierte Räume. Eine lineare Abbildung $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ heißt *kompakt*, falls $\operatorname{cl} T(\overline{B}_X)$ kompakt ist. Wir schreiben $\mathcal{K}(X,Y)$ für die Menge der kompakten Operatoren von X nach Y. Falls $Y = X$ so schreiben wir $\mathcal{K}(X)$ anstelle von $\mathcal{K}(X,X)$.

BEHAUPTUNG 70. Es gelten folgende Aussagen:

(i) $T : X \to Y$ ist kompakt, genau dann wenn für jede beschränkte Folge $\{x_n\}_n \subset X$ gilt, $\{Tx_n\}_n$ besitzt eine konvergente Teilfolge.
(ii) $\mathcal{K}(X,Y)$ bildet einen linearen Raum.
(iii) $\mathcal{K}(X,Y) \subset \mathcal{L}(X,Y)$.
(iv) Ist Y vollständig, so ist $\mathcal{K}(X,Y)$ abgeschlossen.
(v) Seien W, X, Y, Z normierte Räume und seien $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, $K \in K(Y,Z)$ und $L \in \mathcal{K}(W,X)$. Dann ist $TL \in \mathcal{K}(W,Y)$ und $KT \in \mathcal{K}(X,Z)$.

ÜBUNGSAUFGABE 71. Zeigen Sie Behauptung 70.

ÜBUNGSAUFGABE 72. Sei $k \in L^2([0,1]^2)$ und $K : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ gegeben durch

$$Kf(x) = \int_0^1 k(x,y) f(y) \, \mathrm{d}y.$$

Zeigen Sie dass K kompakt ist.
Hinweis: Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(i) K ist wohldefiniert und $\|K\| \leq \|k\|$.
(ii) Sei k_n eine Folge von Funktionen in $L^2([0,1]^2)$ mit $\|k - k_n\|_{L^2([0,1]^2)} \to 0$, und K_n der von k_n induzierte Operator. Dann gilt $\|K_n - K\| \to 0$.
(iii) Wählen Sie eine geeignete Folge von Funktionen k_n für die Sie wissen dass K_n kompakt ist und verwenden Sie dass $\mathcal{K}(L^2([0,1]^2))$ abgeschlossen in $\mathcal{L}(L^2([0,1]^2))$ ist (Behauptung 70).

SATZ 73 (Satz von Schauder). *Seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Dann ist T kompakt, genau dann wenn T^* kompakt ist.*

BEWEIS. Sei T kompakt, und ohne Einschränkung $\|T\| \leq 1$. Sei $\varepsilon > 0$. Weil die Menge $K = \operatorname{cl} T(\overline{B}_X) \subset \overline{B}_Y$ kompakt ist, existiert nach Satz 19 ein endliches $\varepsilon/2$–Netz $\{y_1, \dots, y_m\} \subset K \subset \overline{B}_Y$ mit $K \subset \bigcup_j B_Y(y_j, \varepsilon/2)$. Definieren wir die Mengen $S_j = \{x \in \overline{B}_X : Tx \in B_Y(y_j, \varepsilon/2)\}$, so stellen wir fest, dass $\bigcup_j S_j = \overline{B}_X$. Weil für alle $y^* \in Y^*$ und $x_1, x_2 \in X$ gilt $|T^*y^*(x_1) - T^*y^*(x_2)| \leq \|y^*\|_{Y^*} \|Tx_1 - Tx_2\|_X$, erhalten wir aufgrund der Definition der Mengen S_j, dass

$$\sup_{y^* \in \overline{B}_{Y^*}} \max_{1 \leq j \leq m} \sup_{x_1, x_2 \in S_j} |T^*y^*(x_1) - T^*y^*(x_2)| \leq \varepsilon.$$

Die Mengen $\{S_j\}_j$ erzeugen eine verfeinernde Partition $\{S_\sigma\}_\sigma$ von $\overline{B}_X$, für welche die letzte Ungleichung ebenso gilt. Weil $T^*(\overline{B}_{Y^*}) \subset \ell^\infty(\overline{B}_X)$ offensichtlich beschränkt ist, folgt mit Satz 36 die Kompaktheit von $\operatorname{cl} T^*(\overline{B}_{Y^*})$.

Sei nun T^* kompakt, $\|T\| \leq 1$ und $\varepsilon > 0$. Definiere die Isometrie $J : X^* \to \ell^\infty(\overline{B}_X)$ für alle $x^* \in X^*$ durch $J(x^*) = x \mapsto x^*(x)$, $x \in \overline{B}_X$. Nach Voraussetzung ist die Menge $M = \operatorname{cl} T^*(\overline{B}_{Y^*})$ kompakt in X^*, also ist $J(M)$ kompakt in $\ell^\infty(\overline{B}_X)$ (s. Übungsaufgabe 74). Mit Satz 36 finden wir eine Partition $\{S_1, \dots, S_m\}$ von $\overline{B}_X$, sodass für alle $1 \leq j \leq m$ gilt

$$\sup_{y^* \in \overline{B}_{Y^*}} \sup_{x_1, x_2 \in S_j} |y^*(Tx_1) - y^*(Tx_2)| \leq \varepsilon/3.$$

Daraus erhalten wir mit Korollar 11, dass für alle $1 \leq j \leq m$ gilt $\operatorname{diam}(T(S_j)) \leq \varepsilon/3$. Also finden wir $y_1, \ldots, y_m$ mit $y_j \in T(S_j)$, sodass $\bigcup_j T(S_j) \subset \bigcup_j \overline{B}(y_j, 2\varepsilon/3)$, und somit

$$\operatorname{cl} T(\overline{B}_X) = \operatorname{cl} \bigcup_{j=1}^{m} T(S_j) \subset \bigcup_{j=1}^{m} \overline{B}(y_j, 2\varepsilon/3) \subset \bigcup_{j=1}^{m} B(y_j, \varepsilon).$$

Wir haben gezeigt, dass $\operatorname{cl} T(\overline{B}_X)$ für jedes $\varepsilon > 0$ ein endliches ε–Netz besitzt, schließlich folgt aus Satz 19, dass $\operatorname{cl} T(\overline{B}_X)$ kompakt ist. Mit Korollar 48 folgt die Abbildung $G \to S(G)$, $x \mapsto Sx$ ist ein Isomorphismus. $\square$

Übungsaufgabe 74. Zeigen Sie dass $J(M)$ kompakt in $\ell^\infty(\overline{B}_X)$ ist (J und M sind im Beweis von Satz 73 definiert).

KAPITEL 4

Fredholm Operatoren

Dieses Kapitel wurde [**Lan93**] entnommen.

1. Kompakte und Fredholm Operatoren

Seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. T heißt *Fredholm* falls

(a) $\ker T$ ist endlichdimensional,
(b) $\operatorname{im} T$ ist abgeschlossen und besitzt endliche Kodimension.

BEMERKUNG 75. Aus Korollar 54 folgt sofort dass die Forderung "$\operatorname{im} T$ ist abgeschlossen" redundant ist.

SATZ 76. *Sei X ein Banachraum und sei $K \in \mathcal{K}(X)$. Dann ist $\mathrm{Id} - K$ Fredholm.*

BEWEIS VON SATZ 76. Sei $Y := \ker(\mathrm{Id} - K) = \{x \in X : x = Kx\}$, dann ist Y als Kern eines stetigen Operators abgeschlossen, und es gilt dass $\mathrm{Id}|Y = K|Y$. Dies bedeutet dass $\mathrm{Id}|Y$ eine kompakte Abbildung ist, also Y kompakt ist, und Satz 32 impliziert dass Y endlichdimensional ist.

Wir zeigen nun dass $\operatorname{im}(\mathrm{Id} - K)$ abgeschlossen ist. Sei $T = \mathrm{Id} - K$. Wir wissen bereits dass $\ker T$ endlichdimensional ist, also existiert nach Korollar 52 ein abgeschlossenes Komplement Z zu $Y := \ker T$, also $X = Y \oplus Z$. Beachte dass $\ker(T|Z) = \{0\}$ und $T(Z) = T(X)$. Wir zeigen nun $T|Z : Z \to T(Z)$ ist ein Isomorphismus. Angenommen das wäre nicht wahr, also würde eine Folge $\{z_n\} \subset Z$ existieren mit $\|z_n\| = 1$ und $Tz_n \to 0$. Weil K kompakt ist, existiert eine Teilfolge $\{z_{n_k}\} \subset \{z_n\}$ sodass $Kz_{n_k} \to x$ für ein geeignetes $x \in X$, und es gilt $z_{n_k} = Tz_{n_k} + Kz_{n_k} \to x$. Weil Z abgeschlossen ist, gilt einerseits $x \in Z$, weil T stetig ist, gilt andererseits $0 = \lim_k Tz_{n_k} = Tx$, also $x \in \ker(T) = Y$. Weil $Y \cap Z = \{0\}$ folgt $x = 0$, also $z_{n_k} \to 0$, was im Widerspruch zu $\|z_n\| = 1$ steht. Also ist $T|Z : Z \to T(Z)$ tatsächlich ein Isomorphismus. Wir zeigen nun $T(Z)$ ist abgeschlossen (und damit $T(X)$). Sei nun $\{z_n\} \subset Z$ so dass $Tz_n \to x \in X$. Dann ist $\{z_n\} \subset Z$ eine Cauchyfolge, und daher konvergent, also $z_n \to z \in Z$. Mit der Stetigkeit von T und der Eindeutigkeit des Grenzwerts folgt $x = Tz \in T(Z)$.

Es bleibt noch zu zeigen dass $\operatorname{im} T$ endliche Kodimension besitzt. Angenommen $\operatorname{im} T$ hätte unendliche Kodimension. Definiere den abgeschlossenen Teilraum $X_0 := \operatorname{im} T$ von X. Nach dem Lemma von Riesz, siehe Lemma 33, existiert ein $x_1 \in X \setminus X_0$ mit $\|x_1\| = 1$ sodass $\mathrm{d}(x_1, X_0) \geq 1/2$. Der Teilraum $X_1 := \operatorname{span}(X_0 \cup \{x_1\})$ ist abgeschlossen und $X_1 \supset X_0$. Nun wählen wir mit dem Lemma von Riesz ein $x_2 \in X \setminus X_1$ mit $\|x_2\| = 1$ sodass $\mathrm{d}(x_2, X_1) \geq 1/2$, und wir definieren den abgeschlossenen Teilraum $X_2 := \operatorname{span}(X_1 \cup \{x_2\}) \supset X_1$. Fahren wir so fort, so erhalten wir Folgen $\{x_n\}$ und $\{X_n\}$ mit der Eigenschaft dass $\mathrm{d}(x_n, X_k) \geq 1/2$ für alle $k < n$. Also gilt für alle $k < n$ dass

$$\|Kx_n - Ku_k\| = \|x_n - Tx_n - x_k + Tx_k\| \geq 1/2,$$

also enthält $\{Kx_n\}_{n=1}^{\infty}$ keine Cauchyfolge, was im Widerspruch zur Kompaktheit von K steht. (Die letzte Ungleichung gilt weil $T(x_n - x_k) \in X_0 \subset X_k$ und $x_k \in X_k$, also auch $-Tx_n - x_k + Tx_k \in X_k$.) □

LEMMA 77. *Seien X, Y normierte Räume und $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ ein Isomorphismus. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ sodass für alle $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ mit $\|S - T\| < \varepsilon$ gilt T ist ein Isomorphismus.*

ÜBUNGSAUFGABE 78. Beweisen Sie Lemma 77.
Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall $S = \mathrm{Id}$ und die Identität $(1 - q)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k$, falls $|q| < 1$.

NOTATION. Seien X, Y normierte Räume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann ist der Kokern $\operatorname{coker} T$ gegeben durch $\operatorname{coker} T = Y/T(X)$. Die ganze Zahl $\operatorname{ind} T = \dim\ker T - \dim\operatorname{coker} T$ heißt *(Fredholm-)Index*.

SATZ 79. *Seien X, Y Banachräume und $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ Fredholm. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ sodass für alle $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ mit $\|S - T\| < \varepsilon$ gilt T ist Fredholm und* $\operatorname{ind} T = \operatorname{ind} S$.

BEWEIS. Sei $N = \ker S$ und sei G abgeschlossen so dass $X = N \oplus G$. Korollar 48 impliziert die Abbildung $G \to S(G)$, $x \mapsto Sx$ ist ein Isomorphismus. Für einen geeigneten endlichdimensionalen Raum H gilt $Y = S(G) \oplus H$. Die Abbildung $U : G \times H \to Y$ gegeben durch

$$(x, y) \mapsto Sx + y$$

ist linear, bijektiv und stetig, also nach Korollar 48 ein Isomorphismus. Wir betrachten nun $V : G \times Y$ definiert als

$$(x, y) \mapsto Tx + y$$

und halten fest $\|(U - V)(x, y)\| = \|Sx - Tx\| < \epsilon\|x\| \leq \epsilon\|(x, y)\|$. Daher ist nach Lemma 77 für hinreichend kleine ε die Abbildung V ebenso ein Isomorphismus. Daher muss gelten $T(G) \oplus H = Y$ und $\ker T \cap G = \{0\}$. D.h. $\dim\ker T \leq \dim N$ und damit auch $\operatorname{codim} T(G) \leq \dim H$.

Weil T stetig ist, so ist $\ker T$ abgeschlossen, und es existiert ein endlichdimensionaler (und daher abgeschlossener) Raum M sodass $X = G \oplus \ker T \oplus M$. Sei Sei $x \in G$, $y \in M$ und $Tx = Ty$, dann ist $x - y \in \ker T$, also $x = y = 0$. Darum ist die Abbildung $W : G \oplus M \to T(G) \oplus T(M)$, gegeben durch

$$(x, y) \mapsto Tx + Ty$$

ein Isomorphismus. Daher muss gelten $\dim M = \dim T(M)$ und somit

$$\begin{aligned}
\operatorname{ind} T &= \dim\ker T - (\dim H - \dim T(M)) \\
&= \dim\ker T + \dim M - \dim H \\
&= \dim\ker S - \dim H \\
&= \operatorname{ind} S
\end{aligned}$$

□

KOROLLAR 80. *Sei X ein Banachraum und $K \in \mathcal{K}(X)$. Falls* $\mathrm{Id} - K$ *injektiv ist, dann ist* $\mathrm{Id} - K$ *ein Isomorphismus.*

BEWEIS. Wir definieren $f : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(X)$ durch $f(t) = \mathrm{Id} - tK$. Dann gilt für alle $s, t \in \mathbb{R}$ dass $\|f(s) - f(t)\| = |s - t|\|K\|$, also ist f stetig. Wegen Satz 76 wissen wir dass $f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ein Fredholm Operator ist. Außerdem ist klar dass $\operatorname{ind} f(0) = 0$. Nach Satz 79 existiert für jedes t ein $\varepsilon > 0$ sodass für alle s mit $|s - t| < \varepsilon$ gilt $\operatorname{ind} f(s) = \operatorname{ind} f(t)$. Weil der Bildbereich der Abbildung $g : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, gegeben durch $g(t) = \operatorname{ind} f(t)$ diskret ist, erhalten wir dass g konstant sein muss, also $g(t) = g(0)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist $\operatorname{ind}(\mathrm{Id} - K) = 0$. Weil nach Voraussetzung $\ker(\mathrm{Id} - K) = \{0\}$, so ist $\mathrm{Id} - K$ surjektiv. Die Behauptung folgt mit Korollar 48. □

NOTATION. Seien X, Y Banachräume und $S, T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Wir sagen *$S$ ist kongruent zu T modulo kompakte Operatoren* falls $S - T$ kompakt ist. In diesem Fall schreiben wir

$$S \equiv T \bmod \mathcal{K}(X, Y).$$

Wir sagen $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ *ist invertierbar modulo kompakte Operatoren* falls ein $S \in \mathcal{L}(Y, X)$ existiert sodass

$$ST \equiv \mathrm{Id}_X \bmod \mathcal{K}(X) \qquad \text{und} \qquad TS \equiv \mathrm{Id}_Y \bmod \mathcal{K}(Y).$$

Die Abbildung S heißt *Inverse von T modulo kompakte Operatoren.*

SATZ 81. *Seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann ist T Fredholm genau dann wenn T invertierbar modulo kompakte Operatoren ist. Es ist möglich diese Inverse (modulo kompakte Operatoren) so zu wählen dass ihr Bild endliche Kodimension besitzt.*

BEWEIS. Sei T Fredholm, dann existieren nach Korollar 52 abgeschlossene Teilräume G, H sodass

$$X = \ker T \oplus G \qquad \text{und} \qquad Y = \operatorname{im} T \oplus H.$$

Wir definieren $E : G \to X$ durch $x \mapsto x$ und $P : Y = \operatorname{im} T \oplus H \to \operatorname{im} T$ durch $y_0 + y_1 \mapsto y_0$, wobei $y_0 \in \operatorname{im} T$, $y_1 \in H$ die eindeutige Darstellung des Elements $y = y_0 + y_1 \in Y$ ist. Die Abbildung $\widehat{T} : G \to \operatorname{im} T$, definiert durch $x \mapsto Tx$ ist ein Isomorphismus (Korollar 48), und so ist $S : Y \to X$, gegeben als $S := E\widehat{T}^{-1}P$ stetig. Weil für alle $y \in \operatorname{im} T$ gilt $TE\widehat{T}^{-1}y = y$, so folgt leicht dass

$$(ST)^2 = ST, \quad \operatorname{im} ST = G, \qquad \text{und} \qquad (TS)^2 = TS, \quad \operatorname{im} TS = \operatorname{im} T.$$

Also sind auch $\mathrm{Id}_X - ST$ und $\mathrm{Id}_Y - TS$ Projektionen mit

$$\operatorname{im}(\mathrm{Id}_X - ST) = \ker T \qquad \text{und} \qquad \operatorname{im}(\mathrm{Id}_Y - TS) = H.$$

Weil sowohl $\ker T$ als auch H endlichdimensional sind, folgt die Kompaktheit von der Projektionen aus Satz 32 und der Beschränktheit kompakter Operatoren.

Sei nun umgekehrt S eine solche Inverse, also ist

$$\mathrm{Id}_X - ST \in \mathcal{K}(X) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Id}_Y - TS \in \mathcal{K}(Y).$$

Nach Satz 76 sind damit ST und TS Fredholm Operatoren, also folgt aus

$$\ker T \subset \ker ST \qquad \text{und} \qquad \operatorname{im} T \supset \operatorname{im} TS$$

dass T Fredholm ist. □

KOROLLAR 82. *Seien X, Y, Z Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$ Fredholm. Dann gelten folgende Aussagen.*

(i) ST ist Fredholm.

(ii) Ist $K \in \mathcal{K}(X,Y)$, dann ist $T+K$ Fredholm und es gilt $\operatorname{ind} T+K = \operatorname{ind} T$.

BEWEIS. Sei $T_0 \in \mathcal{L}(Y,X)$ und $S_0 \in \mathcal{L}(Z,Y)$ so dass

$$\mathrm{Id}_X - T_0 T = K_0 \in \mathcal{K}(X) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Id}_Y - S_0 S = \widehat{K}_0 \in \mathcal{K}(X).$$

Dann ist $R_0 := T_0 S_0 \in \mathcal{L}(Z,Y)$ und es gilt

$$R_0 ST = T_0 S_0 ST = T_0(\mathrm{Id}_Y - \widehat{K}_0)T = T_0 T - T_0 \widehat{K}_0 T = \mathrm{Id}_X - K_0 - T_0 \widehat{K}_0 T.$$

Mit Behauptung 70 folgt $R_0 ST \equiv \mathrm{Id}_X \bmod \mathcal{K}(X)$. Analog zeigt man $STR_0 \equiv \mathrm{Id}_Y \bmod \mathcal{K}(Y)$.

Sei nun $K \in \mathcal{K}(X,Y)$ und T_0 die Inverse von T modulo kompakte Operatoren. Wiederum wegen Behauptung 70 gilt $\mathrm{Id}_X - T_0(T+K) \in \mathcal{K}(X)$ und $\mathrm{Id}_Y - (T+K)T_0 \in \mathcal{K}(Y)$, also ist $T+K$ Fredholm. Wir definieren $f : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(X,Y)$ durch $f(t) = T + tK$. Analog zum Beweis von Korollar 80 benutzen wir dass die Abbildung

$$t \mapsto \operatorname{ind} f(t) = \operatorname{ind}(T+tK)$$

konstant ist und verwenden dass $\operatorname{ind} f(0) = \operatorname{ind} T$. □

LEMMA 83. *Sei V ein Vektorraum und sei W ein linearer Teilraum. Sei $f : V \to f(V)$ linear, dann gilt*

$$\dim(V/W) = \dim(f(V)/f(W)) + \dim(\ker(f)/(\ker(f) \cap W)).$$

BEWEIS. Wir definieren die lineare Abbildung $g : V \to f(V)/f(W)$ durch $x \mapsto f(x) + f(W)$. Wir zeigen nun dass

$$\ker(g) = \ker(f) + W. \tag{1.1}$$

Sei $x \in \ker(g)$, d.h. $f(x) \in f(W)$, also existiert ein $y \in W$ sodass $f(x) = f(y)$. Damit ist aber $f(x-y) = 0$, also $x-y \in \ker(f)$, und $x = (x-y)+y$, d.h. $x \in \ker(f) + W$. Ist nun $x \in \ker(f)+W$, dann existiert ein $y \in W$ sodass $x = (x-y)+y$ und $x - y \in \ker(f)$. Daraus folgt $g(x) = f(x) + f(W) = f(x-y) + f(y) + f(W) = f(W)$, d.h. $x \in \ker(g)$. Aus (1.1) erhalten wir dass

$$\widehat{g} : V/(\ker(f)+W) \to f(V)/f(W), \quad x + \ker(f) + W \mapsto g(x) = f(x) + f(W) \tag{1.2}$$

ein Isomorphismus ist.

Nun definieren wir $h : \ker(f) \to (\ker(f)+W)/W$ durch $x \mapsto x + W$ und sehen dass $\ker(h) = \ker(f) \cap W$. Somit ist

$$\widehat{h} : \ker(f)/(\ker(f) \cap W) \to (\ker(f)+W)/W, \quad x + \ker(f) \cap W \mapsto h(x) = x + W \tag{1.3}$$

ein Isomorphismus.

Sei U das algebraische Komplement zu $\ker(f) + W$, d.h.

$$U \cap (\ker(f) + W) = \emptyset \qquad \text{und} \qquad U + \ker(f) + W = V.$$

Wir definieren $i : V/W \to (V/\ker(f)+W) \times ((\ker(f)+W)/W)$ durch

$$x + W \mapsto (x - y + \ker(f) + W, y + W), \qquad \text{wobei } x - y \in U \text{ und } y \in (\ker(f) + W).$$

Die Abbildung ist wohldefiniert und linear. Sei nun $i(x+W) = 0$, dann gilt $x - y \in \ker(f) + W$ und $y \in W$. Weil $U \cap (\ker(f)+W) = \emptyset$ ist $x = y \in W$ und es folgt dass i injektiv ist. Sei nun $(x + \ker(f) + W, y + W) \in (V/\ker(f)+W) \times ((\ker(f)+W)/W)$. Weil die eindeutige Darstellung $x = (x-y)+y$ mit $x - y \in U$ und $y \in \ker(f) + W$ gilt, folgt $i(x+W) = (x - y + \ker(f) + W, y + W) = (x + \ker(f) + W, y + W)$, und es folgt dass i surjektiv ist. Wir halten fest dass i ein Isomorphismus ist und es gilt

$$\dim(V/W) = \dim(V/\ker(f)+W) + \dim((\ker(f)+W)/W). \tag{1.4}$$

Die Behauptung folgt aus (1.2), (1.3) und (1.4). $\square$

SATZ 84. *Seien X, Y, Z Banachräume und seien $S \in \mathcal{L}(X, Y)$, $T \in \mathcal{L}(Y, Z)$ Fredholm. Dann gilt*

$$\operatorname{ind} TS = \operatorname{ind} T + \operatorname{ind} S.$$

BEWEIS. Nach Definition Index gelten folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}(S) &= \dim(\ker S) - \dim(Y/S(X)), \\ \operatorname{ind}(T) &= \dim(\ker T) - \dim(Z/T(Y)), \\ \operatorname{ind}(TS) &= \dim(\ker TS) - \dim(Z/TS(X)). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Weil $Sx = 0$ impliziert $TSx = 0$, also ist $\{0\} \subset \ker(S) \subset \ker(TS)$. Wir verwenden Lemma 83 mit $f : \ker(TS) \to \ker(TS)/\ker(S)$, $x \mapsto x + \ker(S)$ und erhalten

$$\dim(\ker(TS)/\{0\}) = \dim((\ker(TS)/\ker(S))/\{\ker(S)\}) + \dim(\ker(S)/\{0\}),$$

also

$$\dim(\ker(TS)) = \dim((\ker(TS)/\ker(S))) + \dim(\ker(S)). \tag{1.6}$$

Ähnlich folgt aus $TS(X) \subset T(Y) \subset Z$

$$\dim(Z/TS(X)) = \dim(Z/T(Y)) + \dim(T(Y)/TS(X)). \tag{1.7}$$

Nun verwenden wir Lemma 83 mit $f = T$ und $W = S(X)$ und sehen dass

$$\dim(Y/S(X)) = \dim(T(Y)/TS(X)) + \dim(\ker(T)/\ker(T) \cap S(X)). \tag{1.8}$$

Schließlich halten wir fest dass aus $\{0\} \subset \ker(T) \cap S(X) \subset \ker(T)$ folgt

$$\dim(\ker(T)) = \dim(\ker(T)/(\ker(T) \cap S(X))) + \dim(\ker(T) \cap S(X)). \tag{1.9}$$

Wir setzen nun (1.6), (1.7), (1.8) und (1.9) in (1.6) ein und erhalten

$$\operatorname{ind}(TS) - \operatorname{ind}(T) - \operatorname{ind}(S) = \dim(\ker(TS)/\ker(S)) - \dim(\ker(T) \cap S(X)).$$

Also müssen wir zeigen $\dim(\ker(TS)/\ker(S)) = \dim(\ker(T) \cap S(X))$.

Dazu schreiben wir $\ker(TS) = \ker(S) \oplus W$, für ein geeignetes endlichdimensionales W. Weiter schreiben wir $X = \ker(TS) \oplus U$ für ein geeignetes U und somit erhalten wir

$$X = \ker(TS) \oplus U = \ker(S) \oplus W \oplus U.$$

Es folgt

$$S(X) = S(W \oplus U) = S(W) \oplus S(U).$$

Wir werden zeigen dass $\ker(T) \cap S(X) = S(W)$. Weil $W \subset \ker(TS)$ ist klar dass $S(W) \subset \ker(T)$. Sei nun $y = Sx$ für ein $x \in X$ sodass $Ty = 0$. Also ist $x \in \ker(TS)$ und wir können schreiben $x = x_1 + x_2$ für $x_1 \in \ker(S)$, $x_2 \in W$, und es ist $y = Sx = Sx_2 \in S(W)$. Weil $\ker(TS) = \ker(S) \oplus W$ wissen wir $\dim(\ker(TS)/\ker(S)) = \dim(W)$ und S ist ein Isomorphismus von W nach $S(W)$, also

$$\dim(\ker(TS)/\ker(S)) = \dim(W) = \dim(S(W)) = \dim(\ker(T) \cap S(X)). \qquad \square$$

2. Der Spektralsatz für kompakte Operatoren

Sei X ein Banachraum und $K \in \mathcal{K}(X)$. Falls ein $\lambda \in \mathbb{R}$ und ein $x \in X$ existieren sodass

$$Kx = \lambda x,$$

dann heißt λ Eigenwert und x der zu λ gehörende Eigenvektor. Ist $\lambda \neq 0$, dann sind λK und $\lambda^{-1} K$ kompakt und sowohl $\lambda \operatorname{Id} - K$ als auch $\operatorname{Id} - \lambda^{-1} K$ Fredholm (Satz 76). Aus Behauptung 70 folgt für $\lambda \neq 0$ dass ein $K_1 \in \mathcal{K}(X)$ existiert sodass

$$(\lambda \operatorname{Id} - K)^n = \lambda^n \operatorname{Id} - K_1,$$

und somit Fredholm ist. Aus Korollar 82 erhalten wir

$$\operatorname{ind}((\lambda \operatorname{Id} - K)^n) = \operatorname{ind}(\lambda^n \operatorname{Id} - K_1) = \operatorname{ind}(\lambda^n \operatorname{Id}) = 0,$$

d.h. $\dim \ker(\lambda \operatorname{Id} - K)^n = \dim \operatorname{coker}(\lambda \operatorname{Id} - K)^n$.

Satz 85. *Sei X ein Banachraum, $K \in \mathcal{K}(X)$ und $\lambda \neq 0$. Dann ist $\lambda \operatorname{Id} - K$ entweder ein Isomorphismus, oder λ ist ein Eigenwert von K.*

Beweis. Der Satz ist lediglich eine Reformulierung von Korollar 80, welches besagt dass falls $\ker(\lambda \operatorname{Id} - K) = \{0\}$, so ist $\lambda \operatorname{Id} - K$ ein Isomorphismus. □

Lemma 86. *Sei X ein Banachraum, $K \in \mathcal{K}(X)$ und $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von K. Dann existiert ein $r \in \mathbb{N}$ sodass für alle $n \geq r$ gilt*

$$\ker(\lambda \operatorname{Id} - K)^n = \ker(\lambda \operatorname{Id} - K)^r.$$

Beweis. Es genügt das Lemma für $\lambda = 1$ zu beweisen.

Wir zeigen zunächst die Existenz eines $r \in \mathbb{N}$ sodass $\ker(\operatorname{Id} - K)^r = \ker(\operatorname{Id} - K)^{r+1}$. Angenommen, die Aussage gilt nicht, dann existiert eine steigende Folge von Teilräumen

$$\ker(\operatorname{Id} - K) \subsetneq \ker(\operatorname{Id} - K)^2 \subsetneq \ker(\operatorname{Id} - K)^3 \subsetneq \dots$$

Für jedes n finden wir mit dem Lemma von Riesz (Lemma 33) finden wir ein x_n mit folgenden Eigenschaften:

$$x_n \in \ker(\operatorname{Id} - K)^n, \qquad \|x_n\| = 1, \qquad \mathrm{d}(x_n, \ker(\operatorname{Id} - K)^{n-1}) \geq 1/2.$$

Damit gilt für alle $k < n$ dass

$$\|Kx_n - Kx_k\| = \|x_n - (\operatorname{Id} - K)x_n - x_k + (\operatorname{Id} - K)x_k\| \geq 1/2,$$

was der Kompaktheit von K widerspricht. Die letzte Ungleichung gilt weil x_k, $(\operatorname{Id} - K)x_k$, und $(\operatorname{Id} - K)x_n \in \ker(\operatorname{Id} - K)^{n-1}$.

Sei $T \in \mathcal{L}(X, X)$ und sei $n \in \mathbb{N}$ so dass $\ker T^n = \ker T^{n+1}$. Für alle $x \in \ker T^{n+2}$ gilt dann $Tx \in \ker T^{n+1} = \ker T^n$, d.h. $T^n T x = 0$, also $x \in \ker T^{n+1}$. Daraus folgt induktiv sofort dass sobald $\ker T^r = \ker T^{r+1}$ für ein $r \in \mathbb{N}$, dann gilt auch $\ker T^r = \ker T^n$ für alle $n \geq r$, was schließlich das Lemma beweist. □

Notation. Die kleinste Zahl $r \in \mathbb{N}$ für die $\ker(\lambda \operatorname{Id} - K)^r = \ker(\lambda \operatorname{Id} - K)^{r+1}$ heißt *Exponent von λ*.

Satz 87. *Sei X ein Banachraum, $K \in \mathcal{K}(X)$ und $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von K mit Exponent r. Dann besitzt X die Zerlegung in die direkte Summe*

$$X = \ker(\lambda \operatorname{Id} - K)^r \oplus \operatorname{im}(\lambda \operatorname{Id} - K)^r,$$

wobei jeder der beiden Räume ist abgeschlossen und invariant unter K ist, d.h.

$$K(\ker(\lambda \operatorname{Id} - K)^r) \subset \ker(\lambda \operatorname{Id} - K)^r \quad \text{und} \quad K(\operatorname{im}(\lambda \operatorname{Id} - K)^r) \subset \operatorname{im}(\lambda \operatorname{Id} - K)^r.$$

Ist $\mu \neq \lambda$ ein weiterer Eigenwert von K verschieden von Null und s sein Exponent, dann gilt

$$\ker(\mu \operatorname{Id} - K)^s \subset \operatorname{im}(\lambda \operatorname{Id} - K)^r.$$

BEWEIS. Wir setzen $T = (\lambda \operatorname{Id} - K)^r$ und wir wissen dass T Fredholm ist, also sind $\ker T$ und $\operatorname{im} T$ abgeschlossen. Weil $TK = KT$, so ist sowohl $\ker T$ als auch $\operatorname{im} T$ invariant unter K. Wir zeigen nun dass

$$\ker T \cap \operatorname{im} T = \{0\}.$$

Sei dazu $x \in \ker T \cap \operatorname{im} T$. Dann schreiben wir $x = Ty$, wobei $y \in X$. Weil $Tx = 0$ erhalten wir $T^2 y = (\lambda \operatorname{Id} - K)^{2r} y = 0$, d.h. $y \in \ker T^2$. Nach Lemma 86 ist $\ker T^2 = \ker T$, und es folgt $y \in \ker T$, also $x = Ty = 0$. Wir halten fest

$$\ker T \oplus \operatorname{im} T \subset X.$$

Von Korollar 82 wissen wir dass $\operatorname{ind} T = 0$, d.h.

$$\dim(\ker T) = \dim(X / \operatorname{im} T)$$

Aus den letzten beiden Identitäten folgt

$$\ker T \oplus \operatorname{im} T = X.$$

Sei nun $\mu \neq \lambda$ verschieden von Null ein Eigenwert von K und s sein Exponent. Dann setzen wir $S = (\mu \operatorname{Id} - K)^s$ und stellen fest dass $ST = TS$, woraus sofort folgt dass $\ker T$ und $\operatorname{im} T$ invariant unter S ist. Sei nun $x \in \ker S$ und $x = y + z$, wobei $y \in \ker T$ und $z \in \operatorname{im} T$. Dann gilt

$$0 = Sx = Sy + Sz,$$

und weil $Sy \in \ker T$ und $Sz \in \operatorname{im} T$ folgt $Sy = 0$. Es existieren Operatoren P und Q sodass (s. Übungsaufgabe 88)

$$PS + QT = \operatorname{Id}.$$

Daraus folgt $y = PSy + QTy = 0$, d.h. $x = z \in \operatorname{im} T$. □

ÜBUNGSAUFGABE 88. Zeigen Sie die Existenz von P und Q am Ende des Beweises von Satz 87.
Hinweis: Definieren Sie $A = \lambda \operatorname{Id} - K$ und $B = \mu \operatorname{Id} - K$. Zeigen Sie die Existenz von Konstanten a, b sodass $aA + bB = \operatorname{Id}$ und betrachten die n-te Potenz dieser Identität für hinreichend große n.

SATZ 89. *Sei X ein Banachraum und $K \in \mathcal{K}(X)$. Dann sind die Eigenwerte von K sind höchstens abzählbar, und ihr einzig möglicher Häufungspunkt ist 0.*

BEWEIS. Wir zeigen für jedes $\delta > 0$ gibt es höchstens nur endlich viele Eigenwerte λ von K mit $|\lambda| \geq \delta$.

Angenommen dies wäre nicht der Fall, dann existiert eine Folge von verschiedenen Eigenwerten λ_n mit $|\lambda_n| \geq \delta$, und eine Folge von zugehörigen Eigenvektoren w_n

mit $\|w_n\| = 1$. Wir zeigen nun die Folge von Eigenvektoren ist linear unabhängig. Sei dazu $n \geq 2$ und

$$\sum_{j=1}^{n} c_j w_j = 0.$$

Eine Anwendung von K ergibt

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j w_j = 0,$$

und nachdem wir die letzte Gleichung durch λ_n dividiert und von der vorletzten Gleichung abgezogen haben sehen wir

$$\sum_{j=1}^{n-1} c_j (1 - \lambda_j / \lambda_n) w_j = 0.$$

Induktiv erhalten wir dass $\{w_n\}_n$ linear unabhängig ist. Sei nun $H_n = \mathrm{span}\{w_1, \ldots, w_n\}$. Mit dem Lemma von Riesz (Lemma 33) finden wir für jedes $n \geq 2$ ein $x_n \in H_n$ sodass für alle $y \in H_{n-1}$

$$\|x_n - y\| \geq 1/2.$$

Also gilt für $k < n$

$$\|Kx_n - Kx_k\| = \|\lambda_n x_n - \lambda_k x_k\| = |\lambda_n| \|x_n - \frac{\lambda_k}{\lambda_n} x_k\| \geq \delta/2.$$

was im Widerspruch zur Kompaktheit von K steht. $\square$

KAPITEL 5

Schwache und schwach* Topologien

1. Topologische Grundlagen

Diese Sektion wurde großteils aus [**Mun00**] entnommen.

Eine *Topologie* $\mathcal{U}$ auf einer nichtleeren Menge X ist ein System von Teilmengen von X, mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $\emptyset \in \mathcal{U}$, $X \in \mathcal{U}$,
(b) ist $U, V \in \mathcal{U}$, dann auch $U \cap V \in \mathcal{U}$,
(c) für $\{U_\alpha\}_\alpha \subset \mathcal{U}$ ist $\bigcup_\alpha U_\alpha \in \mathcal{U}$.

Das Paar $(X, \mathcal{U})$ heißt *topologischer Raum*, und jede Menge $U \in \mathcal{U}$ heißt *offen*. Eine Menge $C \subset X$ heißt *abgeschlossen*, genau dann wenn $X \setminus C$ offen ist. Sei $Y \subset X$ und $\mathcal{V} = \{U \cap Y : U \in \mathcal{U}\}$, dann heißt $\mathcal{V}$ die von $\mathcal{U}$ erzeugte *Relativtopologie* auf Y, und $(Y, \mathcal{V})$ ist ein topologischer Raum. Das *Innere* $\operatorname{int} A$ einer Menge $A \subset X$ ist gegeben durch $\bigcup\{U \subset A : U \text{ offen}\}$, der *Abschluss* $\operatorname{cl} A$ durch $\bigcap\{C \supset A : C \text{ abgeschlossen}\}$.

Behauptung 90. Sei A Teilmenge des topologischen Raumes X. Es gelten die folgenden Aussagen.

(i) $\emptyset$ und X sind abgeschlossen.
(ii) Die Vereinigung zweier abgeschlossener Menge ist abgeschlossen.
(iii) Der Durschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
(iv) $\operatorname{int} A$ ist offen und $\operatorname{cl} A$ ist abgeschlossen.

Übungsaufgabe 91. Zeigen Sie Behauptung 90.

Eine *Folge* $\{x_n\}_n$ in einem topologischen Raum X *konvergiert* gegen x, falls für jede offene Umgebung $U \ni x$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $x_n \in U$ für alle $n \geq n_0$. Ein Punkt x eines topologischen Raumes X heißt *Häufungspunkt* einer Menge $A \subset X$, falls für jede offene Menge $U \ni x$ gilt $(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.

Behauptung 92. Sei A Teilmenge eines topologischen Raumes X. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) $x \in \operatorname{cl} A$.
(ii) Für jede offene Menge $U \ni x$ gilt $U \cap A \neq \emptyset$.
(iii) $x \in A$ oder x ist Häufungspunkt von A.

BEWEIS. **Beweis** (i) $\Longrightarrow$ (ii)**.** Angenommen es existiert eine offene Menge $U \ni x$, sodass $U \cap A = \emptyset$. Dann ist $C = X \setminus U$ eine abgeschlossene Menge, $C \supset A$ und $x \notin C$. Insbesondere ist $x \notin \operatorname{cl} C$, was im Widerspruch zur Annahme steht.

Beweis (ii) $\Longrightarrow$ (iii)**.** Sei $x \notin A$ und $U \ni x$ offen. Wir wissen $U \cap A \neq \emptyset$, also muss $(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.

Beweis (iii) $\Longrightarrow$ (i)**.** Sei x ein Häufungspunkt von A. Angenommen $x \notin \operatorname{cl} A$. Dann ist $U = X \setminus \operatorname{cl} A$ offen und $x \in U$. Also muss gelten $(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Jedoch ist $U \cap A = \emptyset$, per Definition von U.

$\square$

Eine Abbildung $f : (X, \mathcal{U}) \longrightarrow (Y, \mathcal{V})$ zwischen topologischen Räumen heißt *stetig*, wenn für alle $V \in \mathcal{V}$ gilt $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}$. *Äquivalent* ist die Bedingung, dass für alle in Y abgeschlossenen Mengen $C \subset Y$ gilt, dass $f^{-1}(C)$ abgeschlossen in X ist. Eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt *Homöomorphismus*, falls sowohl f als auch f^{-1} stetig ist.

BEHAUPTUNG 93. Sei $f : (X, \mathcal{U}) \longrightarrow (Y, \mathcal{V})$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen. Dann ist f stetig, genau dann wenn für alle $A \subset X$ gilt $f(\operatorname{cl} A) \subset \operatorname{cl} f(A)$.

BEWEIS. Sei f stetig und $A \subset X$. Dann ist

$$\operatorname{cl} A = \bigcap \{C : C \supset A \text{ und } C \text{ abgeschlossen}\}.$$

Weil für alle abgeschlossenen $D \supset f(A)$ gilt $f^{-1}(D) \supset A$ und $f^{-1}(D)$ ist abgeschlossen, so folgt

$$\operatorname{cl} A \subset \bigcap \{f^{-1}(D) : D \supset f(A) \text{ und } D \text{ abgeschlossen}\}.$$

Daraus erhalten wir $\operatorname{cl} A \subset f^{-1}(\operatorname{cl} f(A))$, und eine Anwendung von f zeigt

$$f(\operatorname{cl} A) \subset f(f^{-1}(\operatorname{cl} f(A))) \subset \operatorname{cl} f(A).$$

Sei nun $f(\operatorname{cl} A) \subset \operatorname{cl} f(A)$ für alle $A \subset X$ und sei $B \subset Y$ abgeschlossen. Dann ist

$$f(\operatorname{cl} f^{-1}(B)) \subset \operatorname{cl} f(f^{-1}(B)) \subset \operatorname{cl} B = B,$$

und eine Anwendung von f^{-1} zeigt $\operatorname{cl} f^{-1}(B) \subset f^{-1}(f(\operatorname{cl} f^{-1}(B))) \subset f^{-1}(B)$. $\square$

Eine Teilmenge K eine topologischen Raumes X heißt *kompakt*, genau dann wenn für jedes System von offenen Mengen $\{U_\gamma\}_\gamma$ für das $K \subset \bigcup_\gamma U_\gamma$ gilt, es existieren endlich viele Indizes $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, sodass $K \subset \bigcup_{k=1}^n U_{\gamma_k}$.

BEHAUPTUNG 94. Sei X ein kompakter topologischer Raum und $A \subset X$ abgeschlossen. Dann ist A kompakt.

BEWEIS. Sei $A \subset \bigcup_\gamma U_\gamma$, U_γ offen. Dann ist $X = (X \setminus A) \cup \bigcup_\gamma U_\gamma$, und weil X kompakt ist, wissen wir $X = (X \setminus A) \cup \bigcup_{\gamma \in \Lambda} U_\gamma$ für eine endliche Menge $\Lambda \subset \Gamma$, und es folgt $A \subset \bigcup_{\gamma \in \Lambda} U_\gamma$. $\square$

BEHAUPTUNG 95. Sei X ein kompakter topologischer Raum und $A \subset X$ eine unendliche Teilmenge. Dann besitzt A einen Häufungspunkt.

BEWEIS. Angenommen A besitzt keinen Häufungspunkt, dann ist A nach Behauptung 92 abgeschlossen, und wegen Behauptung 94 kompakt. Für jedes $a \in A$ sei $U_a \ni a$ offen in A, sodass U_a nur den Punkt a enthält. Dann ist $\bigcup_{a \in A} U_a$ eine offene Überdeckung von A, und aufgrund der Kompaktheit von A finden wir eine endliche Teilüberdeckung $\bigcup_{j=1}^n U_{a_j}$ von A. Weil jedes U_{a_j} nur einen Punkt von A enthält muss A endlich sein. □

BEHAUPTUNG 96. Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen und $K \subset X$ kompakt. Dann ist $f(K)$ kompakt.

BEWEIS. Sei $f(K) \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} V_\gamma$, $V_\gamma \in \mathcal{V}$. Dann gilt

$$K \subset f^{-1}(f(K)) \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f^{-1}(V_\gamma).$$

Weil f stetig und K kompakt ist, finden wir eine endliche Indexmenge $\Lambda \subset \Gamma$, sodass $K \subset \bigcup_{\gamma \in \Lambda} f^{-1}(V_\gamma)$, also ist

$$f(K) \subset \bigcup_{\gamma \in \Lambda} f(f^{-1}(V_\gamma)) \subset \bigcup_{\gamma \in \Lambda} V_\gamma.$$ □

Seien S eine nichtleere Menge, Γ eine Indexmenge $(X_\gamma, \mathcal{U}_\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$ topologische Räume und $f_\gamma : S \to (X_\gamma, \mathcal{U}_\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$ Abbildungen. Wir bezeichnen mit $\sigma(S, \{f_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma})$ die *schwächste (= gröbste = kleinste) Topologie* auf S, sodass alle f_γ stetig sind.

Ein System von Mengen $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ besitzt die *endliche Durchschnittseigenschaft*, genau dann wenn für alle endlichen Mengen $\Lambda \subset \Gamma$ gilt, dass $\bigcap_{\gamma \in \Lambda} A_\gamma \neq \emptyset$.

SATZ 97. *Sei X ein topologischer Raum, dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) X ist kompakt.
(ii) Für jedes System von abgeschlossenen Mengen $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ mit der endlichen Durchschnittseigenschaft gilt $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \neq \emptyset$.

BEWEIS. Sei X kompakt und $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ ein System abgeschlossener Mengen mit der endlichen Durchschnittseigenschaft. Angenommen $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma = \emptyset$ dann ist $X = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} X \setminus A_\gamma$, und somit $\{X \setminus A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ eine offene Überdeckung von X. Also existiert eine endliche Menge $\Lambda \subset \Gamma$ sodass $X = \bigcup_{\gamma \in \Lambda} X \setminus A_\gamma$ und somit ist $\bigcap_{\gamma \in \Lambda} A_\gamma = \emptyset$, was einen Widerspruch zur endlichen Durchschnittseigenschaft darstellt.

Die Umkehrung folgt mit einem ähnlichen Argument (s. Übungsaufgabe 98). □

ÜBUNGSAUFGABE 98. Führen Sie den Beweis von Satz 97 zu Ende.

Für jedes $\gamma \in \Gamma$ sei X_γ ein topologischer Raum. Dann heißt

$$\prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma = \{x : \Gamma \to \bigcup_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma \mid x(\gamma) \in X_\gamma \text{ für alle } \gamma \in \Gamma\}.$$

Produktraum. Der Produktraum ist wegen des Auswahlaxioms nichtleer. Für $\alpha \in \Gamma$ bezeichnen wir mit $\pi_\alpha : \prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma \to X_\alpha$ die *kanonische Koordinatenprojektion*, gegeben durch $\pi_\alpha(x) = x(\alpha)$, $x \in \prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$. Eine Menge $U \subset \prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ heißt *offen* *in der Produkttopologie*, wenn für alle $x \in U$ eine endliche Indexmenge $\Lambda \subset \Gamma$ und in X_γ offene Mengen U_γ existieren, sodass

$$x \in \{y \in \prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma \,:\, y(\gamma) \in U_\gamma \text{ für alle } \gamma \in \Lambda\} \subset U.$$

Die Produkttopologie wird von den Koordinatenprojektionen erzeugt, d.h. ist gegeben durch $\sigma(\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma, \{\pi_\gamma \,:\, \gamma \in \Gamma\})$. Also ist U offen in der Produkttopologie, genau dann wenn für jedes $x \in U$ eine endliche Menge $\Lambda \subset \Gamma$ und in X_γ offene Mengen U_γ, $\gamma \in \Lambda$ existieren, sodass

$$x \in \bigcap_{\gamma \in \Lambda} \pi_\gamma^{-1}(U_\gamma) \subset U.$$

SATZ 99 (Satz von Tychonoff). *Für jedes $\gamma \in \Gamma$ sei X_γ ein kompakter topologischer Raum. Dann ist $X = \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ kompakt in der Produkttopologie.*

Bevor wir den Satz 99 beweisen können, benötigen wir noch zwei Lemmata.

LEMMA 100. *Sei X eine nichtleere Menge und $\mathcal{A}$ ein System von Teilmengen von X mit der endlichen Durchschnittseigenschaft. Dann existiert ein* maximales *System $\mathcal{M} \supset \mathcal{A}$ von Teilmengen von X mit der endlichen Durchschnittseigenschaft. Die Maximalität von $\mathcal{M}$ versteht sich im folgenden Sinne: Für jedes System $\mathcal{B}$ von Teilmengen von X mit der endlichen Durchschnittseigenschaft gilt, aus $\mathcal{B} \supset \mathcal{M}$ folgt $\mathcal{B} = \mathcal{M}$.*

BEWEIS. Sei die bezüglich Inklusion partiell geordnete Menge $\mathbb{A} \subset \mathscr{P}(\mathscr{P}(X))$ gegeben durch

$$\mathbb{A} = \{\mathcal{B} \,:\, \mathcal{B} \supset \mathcal{A} \text{ und } \mathcal{B} \text{ besitzt die endliche Durchschnittseigenschaft}\}.$$

Wir zeigen nun, dass jede total geordnete Teilmenge (Kette) $\mathbb{B}$ von $\mathbb{A}$ eine obere Schranke in $\mathbb{A}$ besitzt. Dazu sei $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$ bezüglich Inklusion total geordnet. Wir behaupten, dass

$$\mathcal{C} = \bigcup \mathbb{B}$$

eine obere Schranke für $\mathbb{B}$ in $\mathbb{A}$ ist. Also müssen wir zeigen, dass $\mathcal{C} \supset \mathcal{A}$ ist und $\mathcal{C}$ die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt. Weil für jedes $\mathcal{B} \in \mathbb{B}$ gilt $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$, folgt unmittelbar $\mathcal{C} \supset \mathcal{A}$. Sei nun $\{C_1, \dots, C_n\} \subset \mathcal{C}$, dann existiert für jedes $1 \le i \le n$ ein $\mathcal{B}_i \in \mathbb{B}$, sodass $\mathcal{B}_i \ni C_i$. Weil $\mathbb{B}$ total geordnet ist, so sind auch die $\mathcal{B}_i$ total geordnet. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass $\mathcal{B}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{B}_n$, also gilt $\{C_1, \dots, C_n\} \subset \mathcal{B}_n$. Weil $\mathcal{B}_n$ die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt, gilt $\bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset$.

Wir haben also gezeigt, dass jede total geordnete Teilmenge $\mathbb{B}$ der partiell geordneten Menge $\mathbb{A}$ eine obere Schranke in $\mathbb{A}$ besitzt, also folgt mit dem Lemma von Zorn 2 die Existenz eines maximalen Elements $\mathcal{M}$ in $\mathbb{A}$. □

LEMMA 101. *Sei X eine nichtleere Menge und $\mathcal{M}$ ein System von Teilmengen, das maximal bezüglich der endlichen Durchschnittseigenschaft ist. Dann gelten folgende Aussagen.*

(i) Jeder Durchschnitt von endlich vielen Elementen in $\mathcal{M}$ ist ein Element in $\mathcal{M}$.
(ii) Sei $A \subset X$, sodass für alle $M \in \mathcal{M}$ gilt $M \cap A \neq \emptyset$. Dann ist $A \in \mathcal{M}$.

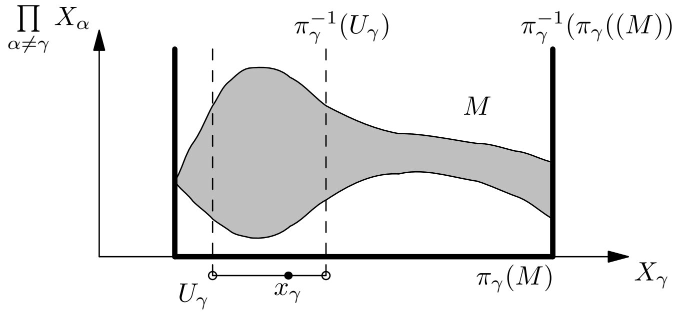

ABBILDUNG 1. Projektion von M auf X_γ und inverse Projektion von $\pi_\gamma(M)$ und U_γ.

BEWEIS. Sei M der Durchschnitt endlich vieler Elemente in $\mathcal{M}$. Wir definieren $\mathcal{N} = \mathcal{M} \cup \{M\}$ und werden zeigen, dass $\mathcal{N}$ die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt. In diesem Fall würde aus der Maximalität von $\mathcal{M}$ folgen, dass $\mathcal{N} = \mathcal{M}$ und $M \in \mathcal{M}$. Sei dazu $\mathcal{F} \subset \mathcal{N}$ endlich. Falls $M \notin \mathcal{F}$, dann ist $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$, und daher $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$. Falls $M \in \mathcal{F}$, so ist $\bigcap \mathcal{F} = F \cap M$, wobei $F = \bigcap(\mathcal{F} \setminus \{M\})$, ein endlicher Durchschnitt von Mengen in $\mathcal{M}$, also $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

Sei A wie oben. Wir definieren $\mathcal{N} = \mathcal{M} \cup \{A\}$ und zeigen, dass $\mathcal{N}$ die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt, woraus, wiederum aufgrund der Maximalität von $\mathcal{M}$, folgt $\mathcal{N} = \mathcal{M}$ und insbesondere $A \in \mathcal{M}$. Sei dazu wieder $\mathcal{F} \subset \mathcal{N}$, $\mathcal{F}$ endlich. Falls $A \notin \mathcal{F}$, so ist $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$, und daher $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$. Falls $A \in \mathcal{F}$, dann ist $\bigcap \mathcal{F} = F \cap A$, wobei $F = \bigcap(\mathcal{F} \setminus \{A\})$. Weil $\mathcal{F} \setminus \{A\} \subset \mathcal{M}$, ist wegen (i) $F \in \mathcal{M}$, und somit per Hypothese $F \cap A \neq \emptyset$, also $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$. □

BEWEIS VON SATZ 99. Sei $\mathcal{A} \subset X$ ein System von abgeschlossenen Mengen mit der endlichen Durchschnittseigenschaft. In Hinblick auf Satz 97 müssen wir zeigen, dass $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$. Sei $\mathcal{M} \supset \mathcal{A}$ ein bezüglich der endlichen Durchschnittseigenschaft maximales System von Mengen, wie in Lemma 100. Es genügt zu zeigen, dass $\bigcap_{M \in \mathcal{M}} \operatorname{cl} M \neq \emptyset$.

Für jedes $\gamma \in \Gamma$ bezeichnen wir mit $\pi_\gamma : X \to X_\gamma$ die kanonische Koordinatenprojektion $x \mapsto x(\gamma)$. Für fixiertes γ besitzt $\{\pi_\gamma(M) : M \in \mathcal{M}\} \subset X_\gamma$ die endliche Durchschnittseigenschaft. Also existiert aufgrund der Kompaktheit von X_γ ein $x_\gamma \in X_\gamma$ mit

$$x_\gamma \in \bigcap_{M \in \mathcal{M}} \operatorname{cl} \pi_\gamma(M). \tag{1.1}$$

Sei $x \in X$ definiert durch $x(\gamma) = x_\gamma$, $\gamma \in \Gamma$. Wir zeigen nun $x \in \operatorname{cl} M$, $M \in \mathcal{M}$. Sei $U \ni x$ offen bezüglich der Produkttopologie in X, d.h. es existieren eine endliche Menge $\Lambda \subset \Gamma$, und offene (bezüglich der Topologie in X_γ) Mengen $U_\gamma \in X_\gamma$, sodass

$$x \in \Big(\prod_{\gamma \in \Gamma \setminus \Lambda} X_\gamma\Big) \times \Big(\prod_{\gamma \in \Lambda} U_\gamma\Big) \subset U. \tag{1.2}$$

Für $M \in \mathcal{M}$ folgt aus (1.1), dass für alle $\gamma \in \Lambda$ gilt $\pi_\gamma(M) \cap U_\gamma \neq \emptyset$, also $M \cap \pi_\gamma^{-1}(U_\gamma) \neq \emptyset$ (siehe Abbildung 1). Mit Lemma 101 (ii) erhalten wir $\pi_\gamma^{-1}(U_\gamma) \in \mathcal{M}$, also wissen wir aufgrund der endlichen Durchschnittseigenschaft von $\mathcal{M}$, dass

$$M \cap \bigcap_{\gamma \in \Lambda} \pi_\gamma^{-1}(U_\gamma) \neq \emptyset.$$

Beachte, dass $\bigcap_{\gamma\in\Lambda} \pi_\gamma^{-1}(U_\gamma) = \big(\prod_{\gamma\in\Gamma\setminus\Lambda} X_\gamma\big) \times \big(\prod_{\gamma\in\Lambda} U_\gamma\big)$, also ist wegen (1.2) für alle $M \in \mathcal{M}$ und alle in X offenen Mengen $U \ni x$

$$M \cap U \neq \emptyset,$$

d.h. $x \in \operatorname{cl} M$. Somit ist

$$\emptyset \neq \bigcap_{M\in\mathcal{M}} \operatorname{cl} M \subset \bigcap_{A\in\mathcal{A}} \operatorname{cl} A = \bigcap \mathcal{A}. \qquad \square$$

2. Der Satz von Alaoglu

Sei X ein normierter Raum. Dann heißt $(X^*)^*$ *Bidualraum* von X und wird mit X^{**} bezeichnet. Die lineare und stetige Abbildung $J_X : X \to X^{**}$ gegeben durch $J_X(x) = (x^* \mapsto x^*(x))$, $x \in X$ heißt *kanonische Einbettung* von X in seinen Bidualraum X^{**}. Mit Korollar 11 gilt, dass J_X eine Isometrie ist, also insbesondere injektiv. Ist J_X surjektiv, so heißt X *reflexiv.*

Die Topologie $\sigma(X, X^*)$ heißt *schwache Topologie* auf X, die Topologie $\sigma(X^*, X)$ (wobei wir X mit $J_X(X)$ identifizieren) heißt *schwach* Topologie* auf X^*. Die schwache Topologie auf X ist die schwächste Topologie, sodass alle linearen Funktionale in X^* stetig sind. Die schwach* Topologie auf X^* ist die schwächste Topologie, sodass alle linearen Funktionale in $J_X(X)$ stetig sind.

Behauptung 102. Die kanonische Einbettung $J_X : (\overline{B}_X, \sigma(X, X^*)) \to (J_X(\overline{B}_X), \sigma(X^{**}, X^*))$ ist ein Homöomorphismus.

Übungsaufgabe 103. Zeigen Sie Behauptung 102.

Satz 104 (Satz von Alaoglu). *Sei X ein Banachraum. Dann ist die normabgeschlossene Einheitskugel $\overline{B}_{X^*} = \{x^* \in X^* : \|x^*\|_{X^*} \leq 1\}$ kompakt in der schwach* Topologie $\sigma(X^*, X)$.*

Der Beweis ist eine Adaption von [**Wer00**].

Beweis. Für jedes $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ ist $\{x^* \in X^* : |x^*(x)| < \varepsilon\}$ offen in der schwach* Topologie $\sigma(X^*, X)$. Setzen wir $P = \prod_{\overline{B}_X}[-1, +1]$, so gilt nach Satz 99, dass P kompakt ist in der Produkttopologie ($[-1, +1]$ ist mit der gewöhnlichen Normtopologie ausgestattet). Nun definieren wir die Abbildung $\varphi : \overline{B}_{X^*} \to P$ durch $x^* \mapsto (x \mapsto x^*(x))$.

Wir werden zeigen, dass $\varphi : \overline{B}_{X^*} \to \varphi(\overline{B}_{X^*})$ ein Homöomorphismus ist. Man überzeugt sich leicht, dass φ injektiv ist. Sei $V \subset P$ offen in der Produkttopologie, d.h. wir können annehmen, dass eine endliche Indexmenge $\Lambda \subset \overline{B}_X$ und offene Mengen $V_x \subset [-1, +1]$, $x \in \Lambda$ existieren, sodass

$$V = \{f : \overline{B}_X \to [-1, +1] \mid f(x) \in V_x,\ x \in \Lambda\}.$$

Schreiben wir $\Lambda = \{x_1, \ldots, x_n\}$ und setzen $V_i = V_{x_i}$ für $x_i \in \Lambda$, so ist das Urbild gegeben durch

$$\varphi^{-1}(V) = \{x^* \in \overline{B}_{X^*} : x^*(x_i) \in V_i,\ 1 \leq i \leq n\}.$$

Weil $\varphi^{-1}(V)$ offen in der schwach* Topologie ist, so ist φ stetig. Sei nun $U \subset \overline{B}_{X^*}$ offen in der schwach* Topologie, d.h. wir können annehmen es existieren ein $x_0 \in X$ und eine offene Menge $V \subset [-1, +1]$, sodass

$$U = \{x^* \in \overline{B}_{X^*} : x^*(x_0) \in V\}.$$

Dann ist

$$\varphi(U) = \{\varphi(x^*) \,:\, x^* \in \overline{B}_{X^*} \text{ und } x^*(x_0) \in V\} = \varphi(\overline{B}_{X^*}) \cap \{f \in P \,:\, f(x_0) \in V\}$$

offen in der Relativtopologie auf $\varphi(\overline{B}_{X^*})$, also ist $\varphi : \overline{B}_{X^*} \to \varphi(\overline{B}_{X^*})$ ein Homöomorphismus. Wir zeigen nun, dass $\varphi(\overline{B}_{X^*})$ abgeschlossen in P ist. Sei dazu $f_0 \in \operatorname{cl}\varphi(\overline{B}_{X^*})$, also gilt nach Behauptung 92 für jede in P offene Menge $V \ni f_0$, dass $V \cap \varphi(\overline{B}_{X^*}) \neq \emptyset$. Für jede Wahl von $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \overline{B}_X$ und offenen Mengen $V_i \subset [-1,+1]$, $1 \leq i \leq n$ ist

$$V = \{f : \overline{B}_X \to [-1,+1] \;\big|\; f(x_i) \in V_i,\ 1 \leq i \leq n\}$$

offen in P. Weil $V \cap \varphi(\overline{B}_{X^*}) \neq \emptyset$, existiert ein $x^* \in \overline{B}_{X^*}$, sodass $x^*(x_i) \in V_i$, $1 \leq i \leq n$. Durch geeignete Wahl von V_i erhalten wir folgende Aussage: für jedes $\varepsilon > 0$ und alle $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \overline{B}_X$, existiert ein $x^* \in \overline{B}_{X^*}$, sodass

$$|f_0(x_i) - x^*(x_i)| < \varepsilon \qquad \text{für alle } 1 \leq i \leq n.$$

Mit dieser Aussage läßt sich leicht zeigen, dass f_0 auf $\overline{B}_X$ konvex ist, $\sup_{x \in \overline{B}_X} |f_0(x)| \leq 1$, $f_0(-x) = -f_0(x)$ und $f_0(0) = 0$ (s. Übungsaufgabe 105). Daraus folgt sofort, dass auch $-f_0$ konvex ist (d.h. f_0 ist *konkav*), und somit gilt $f_0(tx + (1-t)y) = tf_0(x) + (1-t)f_0(y)$ für $x, y \in \overline{B}_X$ und $1 \leq t \leq 1$. Wir definieren $\ell_0 : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|_X f_0(x/\|x\|)$ und stellen fest, dass $\ell_0(\lambda x) = \lambda \ell_0(x)$ für alle $x \in X$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, $\ell_0(x+y) = \ell_0(x) + \ell_0(y)$ für alle $x, y \in \overline{B}_X$, und schließlich, dass ℓ_0 linear ist (s. Übungsaufgabe 105). Weiters läßt sich leicht zeigen, dass $\|\ell_0\|_{X^*} \leq 1$, also ist $\ell_0 \in \overline{B}_{X^*}$ (s. Übungsaufgabe 105). Nun können wir φ anwenden und erhalten für alle $x \in \overline{B}_X$

$$(\varphi(\ell_0))(x) = \ell_0(x) = \|x\| f_0(x/\|x\|) = f_0(x).$$

Die letzte Gleichheit gilt, weil aufgrund der Linearität von f_0 auf $\overline{B}_X$ ist $f_0((1 - \|x\|) \cdot 0 + \|x\| \frac{x}{\|x\|}) = f_0(x)$.

Wir haben gezeigt, dass für alle $f_0 \in \operatorname{cl}\varphi(\overline{B}_{X^*})$ ein $\ell_0 \in \overline{B}_{X^*}$ existiert, sodass $\varphi(\ell_0) = f_0$, d.h. $f_0 \in \varphi(\overline{B}_{X^*})$. Somit ist $\varphi(\overline{B}_{X^*})$ abgeschlossen in P. Weil P wie zuvor schon erwähnt nach Satz 99 kompakt ist, folgt mit den Behauptungen 94 und 96, dass $\overline{B}_{X^*}$ kompakt in der schwach* Topologie ist. □

Übungsaufgabe 105. Seien f_0 und ℓ_0 wie im Beweis von Satz 104 definiert. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(a) f_0 ist auf $\overline{B}_X$ konvex, $\sup_{x \in \overline{B}_X} |f_0(x)| \leq 1$, $f_0(-x) = -f_0(x)$ und $f_0(0) = 0$.
(b) ℓ_0 ist linear und $\ell_0 \in \overline{B}_{X^*}$.

Korollar 106. *Sei X ein Banachraum und $K \subset X^*$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) K ist schwach kompakt.*
(ii) K ist schwach abgeschlossen und normbeschränkt.*

Beweis. Sei K schwach* kompakt. Angenommen $K \subsetneq$ w*-cl K, wobei w*-cl K bezeichnet den Abschluss von K in der schwach* Topologie. Für fixiertes $x_0^* \in$ w*-cl $K \setminus K$ und für alle $x^* \in K$ ist $\|x_0^* - x^*\|_{X^*} > 0$, also existieren $\varepsilon > 0$ und $x \in X$, sodass $|x_0^*(x) - x^*(x)| > \varepsilon$. Nun gilt für die schwach* offene Menge

$$U = \{y^* \in X^* \,:\, |y^*(x)| < \varepsilon/2\},$$

dass $(x_0^* + U) \cap (x^* + U) = \emptyset$. Wir haben bisher gezeigt: für jedes $x^* \in K$ existiert eine schwach* offene Menge $U(x^*)$, sodass $(x_0^* + U(x^*)) \cap (x^* + U(x^*)) = \emptyset$. Wir überdecken die schwach* kompakte Menge K mit den schwach* offenen Mengen $x^* + U(x^*)$, und finden eine endliche Teilüberdeckung $x_j^* + U(x_j^*)$, $1 \le j \le n$ von K. Definieren wir nun die schwach* offene Menge $V = \bigcap_{1\le j\le n} U(x_j^*)$, so sehen wir

$$(x_0^* + V) \cap K \subset \bigcup_{1\le j\le n} (x_0^* + V) \cap (x_j^* + U(x_j^*)) = \emptyset.$$

D.h. $x_0^* \notin \text{w*-cl}\, K$, was im Widerspruch zur Annahme steht. Die Normbeschränktheit folgt sofort aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit (Satz 60, s. Übungsaufgabe 107). Die Umkehrung der Aussage ist eine Konsequenz des Satzes von Alaoglu (Satz 104) und Behauptung 94. □

Übungsaufgabe 107. Sei X ein Banachraum und $K \subset X^*$ schwach* kompakt. Zeigen Sie dass K normbeschränkt ist.
Hinweis: Verwenden Sie das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit.

3. Lineare Funktionale in der schwach* Topologie

Diese Sektion ist großteils eine Anpassung des Materials über lokalkonvexe Räume in [**Wer00**].

Korollar 108. *Sei X ein normierter Raum, $U \subset X^*$ ein Unterraum und $\ell : U \to R$ linear und stetig bezüglich der Topologie $\sigma(X^*, X)|U$. Dann existiert eine $\sigma(X^*, X)$-stetige, lineare Fortsetzung $L : X^* \to R$ von ℓ.*

Beweis. Weil ℓ linear und schwach* stetig ist, existieren ein $\varepsilon > 0$ und $x_1, \dots, x_n \in X$, sodass

$$\{x^* \in U \;:\; \max_{1\le i\le n} |x^*(x_i)| \le \varepsilon\} \subset \{x^* \in U \;:\; |\ell(x^*)| \le 1\}.$$

Daraus folgt für alle $x^* \in U$ sofort

$$\Big|\ell\Big(\frac{\varepsilon}{\max_i |x^*(x_i)|} x^*\Big)\Big| \le 1,$$

also gilt für die sublineare Abbildung $p : X^* \to \mathbb{R}$, $x^* \mapsto \frac{1}{\varepsilon} \max_{1\le i\le n} |x^*(x_i)|$, dass $|\ell(x^*)| \le p(x^*)$, $x^* \in U$. Aus Satz 4 und $p(-x^*) = p(x^*)$ erhalten wir die lineare Fortsetzung L von ℓ, sodass $|L(x^*)| \le p(x^*) = \frac{1}{\varepsilon} \max_{1\le i\le n} |x^*(x_i)|$, $x^* \in X^*$. Also ist

$$0 \in \{x^* \in X^* \;:\; \max_{1\le i\le n} |x^*(x_i)| \le \varepsilon\} \subset \{x^* \in X^* \;:\; |L(x^*)| \le 1\},$$

d.h. L ist stetig bezüglich $\sigma(X^*, X)$. □

Ähnlich wie bei dem Fortsetzungssatz Korollar 108 erhalten wir Analoga zu den Trennungssätzen in Kapitel 1 Sektion 5. Wir formulieren nur den folgenden Trennungssatz explizit.

Satz 109. *Sei X ein normierter Raum, $V \subset X^*$ schwach* abgeschlossen, konvex und sei $x_0^* \notin V$. Dann existieren ein lineares, schwach* stetiges Funktional $L : X^* \to \mathbb{R}$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass*

$$L(v) \le \alpha < x^*(x_0), \qquad v \in V.$$

Übungsaufgabe 110. Beweisen Sie Satz 109.
Hinweis: Analoges Vorgehen wie bei den Trennungssätzen in Kapitel 1 Sektion 5.

Lemma 111. *Sei X ein Vektorraum und $\ell, \ell_1, \dots, \ell_n : X \to \mathbb{R}$ linear. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) $\ell \in \operatorname{span}\{\ell_1, \dots, \ell_n\}$.
(ii) $\bigcap_{1 \le i \le n} \ker(\ell_i) \subset \ker(\ell)$.

BEWEIS. Wir sehen sofort (i) impliziert (ii), also bleibt nur noch die Umkehrung zu zeigen. Sei dazu

$$V = \{(\ell_i(x))_{1 \le i \le n} \,:\, x \in X\}$$

und $\varphi : V \to \mathbb{R}$, $(\ell_i(x))_{i \le n} \mapsto \ell(x)$. φ ist wegen (ii) wohldefiniert und linear. Sei $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine lineare Fortsetzung von φ, für ein geeignetes $\alpha \in \mathbb{R}^n$ gegeben durch $\xi \mapsto \langle \alpha, \xi \rangle$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Also gilt insbesondere für alle $x \in X$

$$\ell(x) = \varphi((\ell_i(x))_{1 \le i \le n}) = \Phi((\ell_i(x))_{1 \le i \le n}) = \sum_{1 \le i \le n} \alpha_i \ell_i(x). \qquad \square$$

LEMMA 112. *Seien $x_0^*, x_1^*, \dots, x_n^* \in X^*$ linear, stetig, und es gelte*

$$\sup \big\{ |x_0^*(x)| \,:\, \|x\|_X \le 1,\, x \in \bigcap_{1 \le i \le n} \ker(x_i^*) \big\} \le \varepsilon.$$

Dann existiert ein $y^* \in \operatorname{span}\{x_1^*, \dots, x_n^*\}$, sodass $\|x_0^* - y^*\|_{X^*} \le \varepsilon$.

BEWEIS. Wir setzen $Y = \bigcap_{1 \le i \le n} \ker(x_i^*)$, dann gilt $\|x_0^*|Y\|_{Y^*} \le \varepsilon$. Mit Satz 8 erhalten wir eine lineare Fortsetzung $z^* \in X^*$ mit $\|z^*\|_{X^*} \le \varepsilon$. Weil $(x_0^* - z^*)|Y = 0$ folgt mit Lemma 111 $x_0^* - z^* \in \operatorname{span}\{x_1^*, \dots, x_n^*\}$, also $x_0^* - y^* = z^*$ für ein geeignetes $y^* \in \operatorname{span}\{x_1^*, \dots, x_n^*\}$ und die Behauptung ist gezeigt. $\square$

LEMMA 113. *Sei $h : X^* \to \mathbb{R}$ linear und schwach* stetig. Dann existiert ein $x \in X$, sodass $h = x$. (Wieder identifizieren wir x über die kanonische Einbettung J_X als Element $J_X x$ in seinem Bidualraum X^{**}.)*

BEWEIS. Für fixiertes $\varepsilon > 0$, existeren ein $\delta > 0$ und $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$, sodass

$$0 \in \{x^* \in X^* \,:\, \max_{1 \le i \le n} |x^*(x_i)| \le \delta\} \subset \{x^* \in X^* \,:\, |h(x^*)| \le \varepsilon\}.$$

Daraus folgt sofort

$$\sup \big\{ |h(x^*)| \,:\, \|x^*\|_{X^*} \le 1,\, x^* \in \bigcap_{1 \le i \le n} \ker(x_i) \big\} \le \varepsilon,$$

wobei wir x wiederum über die kanonische Einbettung J_X mit $J_X x$ identifizieren. Mit Lemma 112 erhalten wir ein $x \in X$, sodass $\|h - x\|_{X^*} \le \varepsilon$. Weil ε beliebig war und $J_X(X)$ abgeschlossen in der Normtopologie ist (J_X ist eine Isometrie), folgt $h \in J_X(X)$. $\square$

4. Der Satz von Goldstine

Für Hintergrundinformationen verweisen wir auf [**DS88**].

SATZ 114 (Satz von Goldstine). *Sei X ein Banachraum. Dann ist $J_X(\overline{B}_X)$ schwach* dicht in $\overline{B}_{X^{**}}$.*

BEWEIS. Wir wissen, dass $\overline{B}_X \subset \overline{B}_{X^{**}}$. Wegen des Satzes von Alaoglu (Satz 104) ist $\overline{B}_{X^{**}}$ schwach* kompakt, also folgt mit Korollar 106, dass $\overline{B}_{X^{**}}$ schwach* abgeschlossen ist. Also ist w*-cl $\overline{B}_X \subset \overline{B}_{X^{**}}$.

Angenommen $x_0^{**} \in \overline{B}_{X^{**}} \setminus$ w*-cl $\overline{B}_X$. Weil w*-cl $\overline{B}_{X^*}$ konvex ist (s. Übungsaufgabe 115), existiert nach Satz 109 eine lineare, schwach* stetige Abbildung $h : X^{**} \to \mathbb{R}$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass

$$h(x) \le \alpha < h(x_0^{**}) \qquad \text{für alle } x \in \overline{B}_X.$$

Wegen Lemma 113 existiert ein $x_h^* \in X^*$, sodass $x_h^* = h$, also

$$x_h^*(x) \leq \alpha < x_0^{**}(x_h^*) \qquad \text{für alle } x \in \overline{B}_X.$$

Daraus folgt unmittelbar der Widerspruch: $\|x_h^*\|_{X^*} < \|x_0^{**}\|_{X^{**}}\|x_h^*\|_{X^*} \leq \|x_h^*\|_{X^*}$.
$\square$

ÜBUNGSAUFGABE 115. Zeigen Sie dass w*-cl $\overline{B}_{X^*}$ konvex ist.

KOROLLAR 116. *Sei X ein Banachraum, dann liegt $J_X(X)$ schwach* dicht in X^{**}.*

BEWEIS. Der schwach* Abschluss von $J_X(X)$ in X^{**} enthält $\overline{B}_{X^{**}}$, woraus sofort die Behauptung folgt. $\square$

SATZ 117. *Ein Banachraum X ist reflexiv, genau dann wenn $\overline{B}_X$ $\sigma(X, X^*)$ kompakt (= schwach kompakt) ist.*

BEWEIS. Sei X reflexiv, dann ist nach Behauptung 102 die kanonische Einbettung $J_X : (X, \sigma(X, X^*)) \to (X^{**}\sigma(X^{**}, X^*))$ ein Homöomorphismus. Dies hat zur Folge, die schwache Topologie $\sigma(X, X^*)$ stimmt mit der schwach* Topologie $\sigma(X^{**}, X^*)$ überein. Also folgt mit dem Satz von Alaoglu (Satz 104) die Behauptung.

Sei umgekehrt $\overline{B}_X$ schwach kompakt. Dann ist die kanonische Einbettung J_X schwach–schwach* stetig. Dies bedeutet, dass $J_X : (X, \sigma(X, X^*)) \to (X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*))$ als topologische Abbildung stetig ist, also folgt mit Behauptung 96, dass $J_X(\overline{B}_X)$ schwach* kompakt in X^{**} ist. Wegen Korollar 106 ist $J_X(\overline{B}_X)$ schwach* abgeschlossen, also folgt mit dem Satz von Goldstine (Satz 114), dass $J_X(\overline{B}_X) =$ w*-cl $J_X(\overline{B}_X) = B_{X^{**}}$. Folglich ist $J_X(X) = X^{**}$ (Korollar 116), d.h. X ist reflexiv. $\square$

BEHAUPTUNG 118. Seien X, Y Banachräume und sei $T : X \to Y$ linear und normstetig. Dann ist $T : (X, \sigma(X, X^*)) \to (Y, \sigma(Y, Y^*))$ stetig.

ÜBUNGSAUFGABE 119. Zeigen Sie Behauptung 118.

SATZ 120. *Sei X ein Banachraum und $C \subset X$ konvex. Dann stimmt der Abschluss von C in der Normtopologie mit dem Abschluss von C in der schwachen Topologie überein.*

ÜBUNGSAUFGABE 121. Beweisen Sie Satz 120.
Hinweis: Satz 18.

KOROLLAR 122 (Mazur). *Sei $\{x_n\}_n$ eine gegen x schwach konvergente Folge im Banachraum X. Dann existiert eine Folge von Konvexkombinationen $y_j = \sum_{k=j}^{n(j)} \lambda_k x_k$, $\lambda_k \geq 0$, $\sum_{k=j}^{n(j)} \lambda_k = 1$, sodass $\|y_j - x\|_X \to 0$.*

KOROLLAR 123. *Sei X ein reflexiver Banachraum und sei Y ein abgeschlossener Unterraum von X. Dann ist Y reflexiv.*

BEWEIS. Wegen Satz 120 ist $\overline{B}_Y$ eine bezüglich $\sigma(X, X^*)$ abgeschlossene Teilmenge der $\sigma(X, X^*)$ kompakten Menge $\overline{B}_X$ (Satz 117). Mit Behauptung 94 ist $\overline{B}_Y$ auch kompakt bezüglich $\sigma(X, X^*)$. Wegen des Satzes von Hahn-Banach (Satz 8) ist $\sigma(X, X^*)|Y = \sigma(Y, Y^*)$. $\square$

KOROLLAR 124. *Seien X, Y Banachräume, X reflexiv und $T : X \to Y$ linear, stetig und surjektiv. Dann ist Y reflexiv.*

BEWEIS. Wegen des Satzes von der offenen Abbildung (Satz 46) existiert ein $\delta > 0$, sodass $\overline{B}_Y(0,\delta) \subset T(B_X)$. Wegen Satz 117 ist $\overline{B}_X$ schwach kompakt, also folgt mit den Behauptungen 118 und 96, dass $T(\overline{B}_X)$ schwach kompakt ist. Die konvexe Menge $\overline{B}_Y(0,\delta)$ ist wegen Satz 120 schwach abgeschlossen, also wegen Behauptung 94 schwach kompakt, und mit Satz 117 ist Y reflexiv. □

KOROLLAR 125. *Sei X ein reflexiver Banachraum. Dann ist X^{**} reflexiv.*

BEWEIS. Betrachte die kanonische Einbettung und verwende Korollar 124. □

SATZ 126. *Sei X ein Banachraum. Dann ist X reflexiv, genau dann wenn X^* reflexiv ist.*

BEWEIS. Wir zeigen: falls X^* reflexiv ist, so auch X. Zusammen mit Korollar 125 folgt daraus der Satz.

Aus dem Satz von Alaoglu (Satz 104) folgt: $\overline{B}_{X^{**}}$ ist $\sigma(X^{**}, X^*) = \sigma(X^{**}, X^{***})$ kompakt. Die kanonische Einbettung J_X ist eine Isometrie, daher ist $J_X(\overline{B}_X)$ normabgeschlossen und konvex. Mit Satz 120 erhalten wir, dass $J_X(\overline{B}_X)$ eine schwach abgeschlossene Teilmenge der schwach kompakten Menge $\overline{B}_{X^{**}}$ ist. Behauptung 94 impliziert, dass $J_X(\overline{B}_X)$ schwach kompakt ist. Wegen Behauptung 118 ist $J_X : (\overline{B}_X, \sigma(X, X^*)|\overline{B}_X) \to (\overline{B}_{X^{**}}, \sigma(X^{**}, X^{***})|B_{X^{**}})$ ein Homöomorphismus. So folgt mit Behauptung 96, dass $\overline{B}_X$ schwach kompakt ist, und mit Satz 117 die Behauptung. □

5. Der Satz von Gantmacher

LEMMA 127. *Sei X ein Banachraum und $C \subset X$ schwach kompakt. Dann ist C normbeschränkt.*

BEWEIS. Sei $x^* \in X^*$ und $U = \{x \in X : |x^*(x)| \leq 1\}$, dann existieren $x_1, \dots, x_n \in C$, sodass $C \subset \bigcup_{j=1}^n (x_j + U)$. Daher existiert für alle $x \in C$ ein $x_j \in C$ mit $x - x_j \in U$, d.h.

$$|x^*(x)| \leq |x^*(x_j)| + |x^*(x - x_j)| \leq 2.$$

Also gilt nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit (Satz 60) angewandt auf die Familie von Operatoren $\{J_X x : x \in C\}$, dass $\sup_{x \in C} \sup_{x^* \in \overline{B}_{X^*}} |x^*(x)| < \infty$. Schließlich folgt mit Korollar 11 die Behauptung. □

LEMMA 128. *Sei X ein Banachraum und $A \subset X$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) w-cl A *ist schwach kompakt.*
(ii) A *ist beschränkt und* w*-cl $J_X(A) \subset J_X(X)$.

ÜBUNGSAUFGABE 129. Beweisen Sie Lemma 128.
Hinweis: Lemma 127 und Korollar 106.

Eine lineare Abbildung $T : X \to Y$ zwischen Banachräumen heißt *schwach kompakt*, genau dann wenn w-cl $T(\overline{B}_X)$ schwach kompakt ist. Es sei bemerkt, dass wir den schwachen Abschluss in Hinblick auf Satz 120 durch den Normabschluss ersetzen können.

BEHAUPTUNG 130. Eine lineare, schwach kompakte Abbildung zwischen zwei Banachräumen ist stetig.

ÜBUNGSAUFGABE 131. Zeigen Sie Behauptung 130.

Satz 132. *Seien X, Y Banachräume und $T : X \to Y$ linear und stetig. Dann ist T schwach kompakt, genau dann wenn $T^{**}(X^{**}) \subset J_Y(Y)$.*

Beweis. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $\|T\| = 1$. Wir zeigen zunächst T^{**} $\sigma(X^{**}, X^*)$–$\sigma(Y^{**}, Y^*)$ ist stetig. Sei dazu $\varepsilon > 0$, $y^* \in Y^*$ und $V = \{y^{**} \in Y^{**} : |y^{**}(y^*)| < \varepsilon\}$. Definiere $x^* = T^*y^* \in X^*$ und betrachte die schwach* offene Menge $U = \{x^{**} : |x^{**}(x^*)| < \varepsilon\}$. Für $x^{**} \in U$ gilt $|T^{**}x^{**}(y^*)| = |x^{**}(T^*y^*)| < \varepsilon$, also $T^{**}x^{**} \in V$.

Sei T schwach kompakt. Mit dem Satz von Goldstine (Satz 114) folgt $T^{**}(\overline{B}_{X^{**}}) = T^{**}(\text{w*-cl}\, J_X(\overline{B}_X))$. Weil T^{**} $\sigma(X^{**}, X^*)$–$\sigma(Y^{**}, Y^*)$ stetig ist, gilt wegen Behauptung 93

$$T^{**}(\text{w*-cl}\, J_X(\overline{B}_X)) \subset \text{w*-cl}\, T^{**}(J_X(\overline{B}_X)).$$

Für alle $x \in X$ und $y^* \in Y$ gilt $(T^{**}(J_X x))(y^*) = (J_Y(Tx))(y^*)$, also

$$(T^{**}J_X)(\overline{B}_X) = (J_Y T)(\overline{B}_X) \subset J_Y(\text{w-cl}\, T(\overline{B}_X)).$$

Insgesamt erhalten wir

$$T^{**}(\overline{B}_{X^{**}}) \subset \text{w*-cl}\, J_Y(\text{w-cl}\, T(\overline{B}_X)).$$

Weil J_Y ein schwach zu schwach* Homöomorphismus ist und $\text{w-cl}\, T(\overline{B}_X)$ schwach kompakt ist, folgt mit Korollar 106, dass $J_Y(\text{w-cl}\, T(\overline{B}_X))$ schwach* abgeschlossen ist. Daher ist

$$T^{**}(\overline{B}_{X^{**}}) \subset J_Y(\text{w-cl}\, T(\overline{B}_X)) \subset J_Y(Y).$$

Sei nun umgekehrt $T^{**}(X^{**}) \subset J_Y(Y)$. Mit Behauptung 93 folgt

$$\text{w-cl}\, T(\overline{B}_X) = J_Y^{-1} J_Y \,\text{w-cl}\, T(\overline{B}_X) \subset J_Y^{-1}\, \text{w*-cl}\, J_Y T(\overline{B}_X).$$

Wir wissen bereits, dass $J_Y T = T^{**}J_X$, also

$$J_Y^{-1}\, \text{w*-cl}\, J_Y T(\overline{B}_X) = J_Y^{-1}\, \text{w*-cl}\, T^{**} J_X(\overline{B}_X) \subset J_Y^{-1}\, \text{w*-cl}\, T^{**}(\overline{B}_{X^{**}}).$$

Weil T^{**} $\sigma(X^{**}, X^*)$–$\sigma(Y^{**}, Y^*)$ stetig, und $\overline{B}_{X^{**}}$ nach dem Satz von Alaolgu (Satz 104) $\sigma(X^{**}, X^*)$ kompakt ist, so gilt wegen Behauptung 96, dass $T^{**}(\overline{B}_{X^{**}})$ kompakt bezüglich $\sigma(Y^{**}, Y^*)$ ist. Mit Korollar 106 folgt $T^{**}(\overline{B}_{X^{**}})$ ist $\sigma(Y^{**}, Y^*)$ abgeschlossen, also

$$\text{w-cl}\, T(\overline{B}_X) \subset J_Y^{-1} T^{**}(\overline{B}_{X^{**}}).$$

Nach Voraussetzung ist $T^{**}(\overline{B}_{X^{**}}) \subset J_Y(Y)$. Weil J_Y ein Homöomorphismus ist folgt $J_Y^{-1}T^{**}(\overline{B}_{X^{**}})$ ist eine $\sigma(X, X^*)$ kompakte Menge. Also ist $\text{w-cl}\, T(\overline{B}_X)$ nach Behauptung 94 kompakt. □

Satz 133 (Satz von Gantmacher). *Seien X, Y Banachräume und $T : X \to Y$ linear und normstetig. Dann ist T schwach kompakt, genau dann wenn T^* schwach kompakt ist.*

Beweis. Sei T schwach kompakt. Dann ist nach Satz 132 $T^{**}(X^{**}) \subset J_Y(Y)$. Wir zeigen T^{**} ist $\sigma(X^{**}, X^*)$–$\sigma(Y^{**}, Y^{***})$ stetig. Sei dazu $y_0^{***} \in Y^{***}$, $x^{**} \in X^{**}$ und $y \in Y$ mit $T^{**}x^{**} = J_Y y$. Wir sehen, dass für $x_0^* = T^* J_Y^* y_0^{***} \in X^*$ gilt

$$\begin{aligned} y_0^{***}(T^{**}x^{**}) &= y_0^{***}(J_Y y) = (J_Y^* y_0^{***})(y) = (J_Y y)(J_Y^* y_0^{***}) \\ &= (T^{**}x^{**})(J_Y^* y_0^{***}) = x^{**}(T^* J_Y^* y_0^{***}) = x^{**}(x_0^*). \end{aligned}$$

Also gilt für die $\sigma(Y^{**}, Y^{***})$ offene Menge $V = \{y^{**} \in Y^{**} : |y_0^{***}(y^{**})| < 1\}$

$$T^{**-1}(V) = \{x^{**} \in X^{**} : |x^{**}(x_0^*)| < 1\} \quad \text{ist offen in } \sigma(X^{**}, X^*).$$

Wir haben also gezeigt: T^{**} ist $\sigma(X^{**}, X^*)$–$\sigma(Y^{**}, Y^{***})$ stetig.

Sei nun $y^{***} \in Y^{***}$ und $x^{***} = T^{***}y^{***} = y^{***}T^{**}$. Dann ist y^{**} $\sigma(Y^{**}, Y^{***})$–$\mathbb{R}$ stetig, und somit x^{***} $\sigma(X^{**}, X^{*})$–$\mathbb{R}$ stetig, d.h. schwach* stetig auf X^{**}. Nach Lemma 113 existiert ein $x^* \in X^*$, sodass $x^{***} = J_{X^*}x^*$. Wir haben gezeigt, dass $T^{***}(Y^{***}) \subset J_{X^*}(X^*)$, also ist T^* nach Satz 132 schwach kompakt.

Sei nun T^* schwach kompakt. Nach dem soeben Gezeigten ist T^{**} schwach kompakt, d.h. $\text{w-cl}\, T^{**}(\overline{B}_{X^{**}})$ ist schwach kompakt in Y^{**}. Aufgrund der Identität $J_Y T = T^{**}J_X$ und den Behauptungen 93 und 118 folgt

$$J_Y\, \text{w-cl}\, T(\overline{B}_X) \subset \text{w-cl}\, J_Y T(\overline{B}_X) \subset \text{w-cl}\, T^{**}J_X(\overline{B}_X) \subset \text{w-cl}\, T^{**}(\overline{B}_{X^{**}}).$$

Mit Behauptung 94 folgt somit, dass $\text{w-cl}\, J_Y\, \text{w-cl}\, T(\overline{B}_X)$ schwach kompakt ist. Nach Satz 120 stimmt der schwache Abschluss für konvexe Mengen mit dem Normabschluss überein. Weil J_Y ein Homöomorphismus ist gilt

$$J_Y\, \text{w-cl}\, T(\overline{B}_X) = \text{w-cl}\, J_Y\, \text{w-cl}\, T(\overline{B}_X) \quad \text{ist schwach kompakt.}$$

Behauptung 118 angewandt auf J_Y^{-1} beendet gemeinsam mit Behauptung 96 den Beweis. □

6. Der Satz von Eberlein-Smulian

SATZ 134. *Für einen Banachraum X gelten folgende Aussagen.*

(i) Ist X separabel, dann ist $(\overline{B}_{X^*}, \sigma(X^*, X))$ metrisierbar.

(ii) Ist X^* separabel, dann ist $(\overline{B}_X, \sigma(X, X^*))$ metrisierbar.

Für mehr Hintergrund verweisen wir auf [**AK06, Woj91**]. Der folgende Beweis findet sich in [**Woj91**].

BEWEIS. **Beweis** (i). Sei $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine normdichte Teilmenge von $\overline{B}_X$. Wir definieren auf $\overline{B}_{X^*}$ die Metrik (s. Übungsaufgabe 135)

$$d(x^*, y^*) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}|x^*(x_n) - y^*(x_n)|.$$

Wir müssen zeigen: $U \subset \overline{B}_{X^*}$ ist offen in $\sigma(X^*, X)$, genau dann wenn U offen bezüglich d ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$, $x \in X$, $x_0^* \in \overline{B}_{X^*}$ fixiert und $U = \{x^* \in \overline{B}_{X^*} : |x^*(x) - x_0^*(x)| < \varepsilon\}$. Wir können ohne Einschränkung annehmen $x \in \overline{B}_X$ (durch Anpassung von ε). Sei nun n so gewählt, dass $\|x_n - x\|_X \le 2^{-n-1}\varepsilon$. Dann folgt aus

$$2^{-n-1}\varepsilon > d(x_0^*, x^*) \ge 2^{-n}|x_0^*(x_n) - x^*(x_n)| \ge 2^{-n}|x_0^*(x) - x^*(x)| - 2^{-n-1}\varepsilon,$$

dass $|x_0^*(x) - x^*(x)| \le \varepsilon$, also

$$\{x^* \in \overline{B}_{X^*} : d(x_0^*, x^*) < 2^{-n-1}\varepsilon\} \subset U.$$

Dies zeigt, dass jede $\sigma(X^*, X)$ offene Menge in $\overline{B}_{X^*}$, auch offen bezüglich der Metrik d ist. Andererseits seien $\varepsilon > 0$ und $x_0^* \in \overline{B}_{X^*}$. Wählen wir n_0 so groß, dass $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{-n} < \varepsilon/4$, gilt für

$$U = \{x^* \in \overline{B}_{X^*} : \max_{1\le n\le n_0} |x_0^*(x_n) - x^*(x_n)| < \varepsilon/2\} \in \sigma(X^*, X)|\overline{B}_{X^*},$$

dass $U \subset B_{X^*}(x_0^*, \varepsilon) \cap \overline{B}_{X^*}$.

Beweis (ii). Die kanonische Einbettung $J_X : (\overline{B}_X, \sigma(X, X^*)) \to (J_X(\overline{B}_X), \sigma(X^{**}, X^*))$ ist ein Homöomorphismus (s. Übungsaufgabe 135) und die Behauptung folgt mit (i). □

ÜBUNGSAUFGABE 135. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(1) d (definiert wie im Beweis von Satz 134) ist eine Metrik auf $\overline{B}_{X^*}$.
(2) J_X(definiert wie im Beweis von Satz 134) ist ein Homöomorphismus.

Für einen allgemeinen Banachraum X ist $(\overline{B}_X, \sigma(X, X^*))$ nicht metrisierbar, allerdings stimmen nach dem Satz von Eberlein-Smulian die Konzepte schwach kompakt und schwach folgenkompakt überein (wie in metrisierbaren Räumen).

SATZ 136 (Satz von Eberlein-Smulian). *Sei X ein Banachraum und $A \subset X$. Folgende Aussagen sind äquivalent.*

(i) w-cl A *ist schwach kompakt.*
(ii) Jede Folge $\{a_n\}_n \subset A$ besitzt eine schwach konvergente Teilfolge.

Der folgende Beweis wurde **[Woj91]** entnommen.

BEWEIS. **Beweis** (i) $\implies$ (ii)**.** Sei w-cl A schwach kompakt und $\{a_n\}_n \subset A$ eine unendliche Menge (sonst ist nichts zu zeigen). Wir definieren den Teilraum $V = \operatorname{cl}\operatorname{span}\{a_n\}_n$ von X. Weil V separabel ist, existiert eine Folge (s. Übungsaufgabe 137) $\{x_n^*\}_n \subset X^*$, sodass für alle $x \in V$ gilt: falls $x_n^*(x) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, so ist $x = 0$.

Die relle Folge $\{x_1^*(a_n)\}_n$ ist beschränkt in $\mathbb{R}$, also existiert eine Teilfolge $\{a_{n_1(k)}\}_k \subset \{a_n\}_n$, sodass $\{x_1^*(a_{n_1(k)})\}_k$ konvergiert. Angenommen wir hätten $\{a_{n_{j-1}(k)}\}_k$ schon konstruiert. Dann finden wir eine Teilfolge $\{a_{n_j(k)}\}_k \subset \{a_{n_{j-1}(k)}\}_k$, sodass $\{x_j^*(a_{n_j(k)})\}_k$ konvergiert. Also gilt für die Diagonalfolge $\{a_{n_k(k)}\}_k$, dass $\{x_j^*(a_{n_k(k)})\}_k$ für alle j konvergiert. Um die Notation zu vereinfachen, bezeichnen wir die Diagonalfolge $\{a_{n_k(k)}\}_k$ mit $\{a_{n_k}\}_k$.

Weil w-cl A schwach kompakt ist, besitzt die Menge $\{a_{n_k}\}_k$ nach Behauptung 95 einen schwachen Häufungspunkt. Sei nun $y \in X$ ein schwacher Häufungspunkt von $\{a_{n_k}\}_k$, d.h. für jedes $j \in \mathbb{N}$ und jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\{x \in X \,:\, |x_j^*(x) - x_j^*(y)| \leq \varepsilon\} \cap \{a_{n_k}\}_k \neq \emptyset.$$

Dies bedeutet, für jedes $j \in \mathbb{N}$ existiert eine Teilfolge von $\{x_j^*(a_{n_k})\}_k$, welche gegen $x_n^*(y)$ konvergiert. Per Konstruktion der Diagonalfolge $\{a_{n_k}\}_k$ gilt sogar $\lim_k x_j^*(a_{n_k}) = x_j^*(y)$. Weil V normabgeschlossen und konvex ist, so ist V auch schwach abgeschlossen (Satz 120). Der Häufungspunkt y ist eindeutig bestimmt, denn wäre x ein weiterer Häufungspunkt von $\{a_{n_k}\}_k$, so ist für alle $j \in \mathbb{N}$ $\lim_k x_j^*(a_{n_k}) = x_j^*(x) = x_j^*(y) = \lim_k x_j^*(a_{n_k})$, also $x_j^*(x - y) = 0$ und somit $x = y$.

Wir müssen zeigen, $\lim_k a_{n_k} = y$ in der schwachen Topologie, d.h. $\lim_k x^*(a_{n_k}) = x^*(y)$ für alle $x^* \in X^*$. Angenommen es existiert ein $x^* \in X^*$ und eine Teilfolge $\{a_{n_{k_\ell}}\}_\ell$ von $\{a_{n_k}\}_k$, sodass $\lim_\ell x^*(a_{n_{k_\ell}}) \neq x^*(y)$, dann besitzt $\{a_{n_{k_\ell}}\}_\ell$ nach Behauptung 95 einen schwachen Häufungspunkt $x \neq y$. Jedoch ist x ebenso Häufungspunkt von $\{a_{n_k}\}_k$, und nach dem bisher Gezeigten muss $x = y$ sein. Also besitzt $\{a_n\}_n$ tatsächlich eine schwach konvergente Teilfolge.

Beweis (ii) $\implies$ (i)**.** Angenommen w-cl A ist nicht schwach kompakt. Wir müssen eine Folge $\{a_n\}_n \subset A$ finden, welche keine schwach konvergente Teilfolge enthält. Mit Hilfe von Lemma 128 finden wir ein $x^{**} \in$ w*-cl $J_X(A) \setminus J_X(X)$. Sei $\delta = \mathrm{d}(x^{**}, J_X(X)) > 0$. Wir werden nun induktiv Folgen $\{a_n\}_n \subset A$ und $\{x_n^*\}_n \subset X^*$ mit $\|x_n^*\|_{X^*} \leq 1$ konstruieren, sodass

(a) $x^{**}(x_n^*) > \frac{3}{4}\delta$ für alle n,

(b) $|x_n^*(a_j)| < \frac{1}{4}\delta$ für alle $j < n$,
(c) $x_n^*(a_j) > \frac{3}{4}\delta$ für alle $j \geq n$.

Eine derartige Folge $\{a_n\}_n$ hätte in der Tat keine schwach konvergente Teilfolge, denn falls $\lim_k a_{n_k} = a$ in der schwachen Topologie, dann gäbe es wegen Korollar 122 eine Konvexkombination, sodass

$$\Big\| \sum_{k=k_0}^{k_1} t_k a_{n_k} - a \Big\|_X < \frac{1}{4}\delta.$$

Für $n > k_1$ folgt aus (b) sofort $|x_n^*(\sum_{k=k_0}^{k_1} t_k a_{n_k})| < \frac{1}{4}\delta$. Aus den letzen beiden Ungleichungen ergibt sich dann $|x_n^*(a)| < \frac{1}{2}\delta$, für alle $n > k_1$. Andererseits impliziert (c) dass $x_n^*(a) \geq \frac{3}{4}\delta$ für alle n.

Weil $\|x^{**}\|_{X^{**}} \geq \delta$ finden wir sicherlich ein $x_1^* \in X^*$ mit $\|x_1^*\|_{X^*} = 1$, sodass $x^{**}(x_1^*) > \frac{3}{4}\delta$. Weil $x^{**} \in$ w*-cl $J_X(A)$ existiert ein $a_1 \in A$, sodass $|x^{**}(x_1^*) - x_1^*(a_1)|$ so klein ist, dass auch $x_1^*(a_1) > \frac{3}{4}\delta$.

Angenommen wir haben $\{a_j\}_{j=1}^n$ und $\{x_j^*\}_{j=1}^n$ schon konstruiert. Mit Korollar 12 finden wir ein $x^{***} \in \overline{B}_{X^{***}}$, sodass $x^{***}(J_X a_j) = 0$ für alle $1 \leq j \leq n$ und $x^{***}(x^{**}) > \frac{3}{4}\delta$. Mit dem Satz von Goldstine 114 finden wir ein $x_{n+1}^* \in \overline{B}_{X^*}$, welches x^{***} in der schwach* Topologie auf X^{***} approximiert. Genauer: die in Frage stehenden Funktionale für die Approximation sind $J_X a_j$, $1 \leq j \leq n$, also gilt $x^{**}(x_{n+1}^*) > \frac{3}{4}\delta$ und $|x_{n+1}^*(a_j)| < \frac{1}{4}\delta$ für alle $1 \leq j \leq n$. Weil $x^{**} \in$ w*-cl $J_X(A)$ finden wir ein $a_{n+1} \in A$, sodass $J_X(a_{n+1})$ das Funktional x^{**} auf $x_1^*, \ldots, x_{n+1}^*$ so genau approximiert, dass auch $x_{n+1}^*(a_{n+1}) > \frac{3}{4}\delta$.

□

Übungsaufgabe 137. Zeigen Sie dass in einem separablen Banachraum X eine eine Folge $\{x_n^*\}_n \subset X^*$ existiert, sodass für alle $x \in X$ gilt: falls $x_n^*(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $x = 0$.

Literaturverzeichnis

[AK06] Fernando Albiac and Nigel J. Kalton. *Topics in Banach space theory*, volume 233 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2006.

[DS88] Nelson Dunford and Jacob T. Schwartz. *Linear operators. Part I*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1988. General theory, With the assistance of William G. Bade and Robert G. Bartle, Reprint of the 1958 original, A Wiley-Interscience Publication.

[Lan93] Serge Lang. *Real and functional analysis*, volume 142 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 1993.

[Mun00] J.R. Munkres. *Topology*. Prentice Hall, Incorporated, 2000.

[Wer00] Dirk Werner. *Funktionalanalysis*. Springer-Verlag, Berlin, extended edition, 2000.

[Woj91] P. Wojtaszczyk. *Banach spaces for analysts*, volume 25 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.