JOHANNES KEPLER
UNIVERSITÄT LINZ
Altenbergerstraße 69
4040 Linz, Österreich
www.jku.at
DVR 0093696

Dipl.-Ing.Dr. Richard Lechner
TNF
Institut für Analysis

Distributionen und Lokalkonvexe Räume

Vorlesungsnotizen – Sommersemester 2017

Version vom
19. Juni 2017

Teilweise basierend auf einer Vorlesungsmitschrift von

Stefan Kindslehner
Alexander Niederklapfer

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Grundlagen

1.1. Der Satz von Hahn-Banach – Version der linearen Algebra

Definition 1.1.1. Sei X ein reeller Vektorraum. Eine Abbildung $p : X \to \mathbb{R}$ heißt *sublinear*, falls

(a) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ für alle $\lambda \geq 0$, $x \in X$,
(b) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ für alle $x, y \in X$.

Satz 1.1.2. *Sei X ein reeller Vektorraum, und sei U ein Unterraum von X. Weiters seien $p : X \to \mathbb{R}$ sublinear und $\ell : U \to \mathbb{R}$ linear, sodass*

$$\ell(u) \leq p(u), \qquad u \in U.$$

Dann existiert eine lineare Abbildung $L : X \to \mathbb{R}$ mit

$$L|U = \ell \qquad \text{und} \qquad L(x) \leq p(x), x \in X.$$

Beweis von Satz 1.1.2. Schritt 1. Wir betrachten zunächst den Fall, dass U *Kodimension 1 in* X hat, also

$$\dim X/U = 1 \quad \text{wobei} \quad X/U = \{x + U : x \in X\}. \tag{1.1.1}$$

Sei nun $x_0 \in X \setminus U$, dann besitzt jedes $x \in X$ die *eindeutige* Darstellung $x = u + \lambda x_0$, für ein $u \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir definieren für alle $r \in \mathbb{R}$

$$L_r(x) = \ell(u) + \lambda r.$$

L_r ist für jedes r linear und stimmt mit ℓ auf U überein. Wir werden nun r so wählen, dass

$$L_r(x) \leq p(x), \qquad x \in X. \tag{1.1.2}$$

Es sei bemerkt, dass (1.1.2) äquivalent ist zu

$$\ell(u) + \lambda r \leq p(u + \lambda x_0), \qquad u \in U,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Im Fall $\lambda = 0$ ist nichts zu zeigen. Für $\lambda > 0$ ist (1.1.2) äquivalent zu

$$\lambda r \leq p(u + \lambda x_0) - \ell(u), \qquad u \in U,\ \lambda > 0$$

und

$$r \leq p(\frac{u}{\lambda} + x_0) - \ell(\frac{u}{\lambda}), \qquad u \in U,\ \lambda > 0.$$

Setzen wir $v = \frac{u}{\lambda}$, so erhalten wir

$$r \leq \inf_{v \in U} p(v + x_0) - \ell(v).$$

Analoge Umformungen für $\lambda < 0$ ergeben

$$r \geq \sup_{w \in U} \ell(w) - p(w - x_0).$$

Also ist (1.1.2) äquivalent zu

$$\sup_{w \in U} \ell(w) - p(w - x_0) \leq r \leq \inf_{v \in U} p(v + x_0) - \ell(v).$$

Durch auflösen von inf und sup erhalten wir

$$\ell(v) + \ell(w) \leq p(v + x_0) + p(w - x_0), \qquad v, w \in U. \tag{1.1.3}$$

Diese Ungleichung ist aber stets erfüllt, denn für $v + w \in U$ ist nach Voraussetzung $\ell(v+w) \leq p(v+w)$ und $p(v + x_0 + w - x_0) \leq p(v + x_0) + p(w - x_0)$.

Schritt 2. Wir zeigen nun den allgemeinen Fall, wofür wir das Lemma von Zorn benötigen werden. Wir definieren die nichtleere Menge (s. Aufgabe 1.1.3),

$$A := \left\{ (V, L_V) \ : \ \begin{array}{c} \text{V ist Unterraum von } X \text{ und } V \supset U \\ L_V : V \to \mathbb{R} \text{ linear} \\ L_V \leq p|V \text{ und } L_V|U = \ell \end{array} \right\},$$

und darauf eine partielle Ordnungsrelation durch $(V_1, L_{V_1}) \leq (V_2, L_{V_2})$, genau dann wenn

$$V_1 \subset V_2 \quad \text{und} \quad L_{V_2}|V_1 = L_{V_1}.$$

Um das Lemma von Zorn anwenden zu können, müssen wir zeigen, dass jede Kette bezüglich dieser Ordnung eine obere Schranke besitzt.

Dazu sei $\{(V_i, L_{V_i})\}_{i \in I} \subset A$ total geordnet. Wir zeigen (V, L_V) ist eine obere Schranke, wobei

$$V = \bigcup_{i \in I} V_i \quad \text{und} \quad L_V(x) = L_{V_i}(x), \ x \in V_i.$$

L_V ist wohldefiniert (s. Aufgabe 1.1.3), $(V, L_V) \in A$ und für alle $i \in I$ ist

$$(V_i, L_{V_i}) \leq (V, L_V).$$

Folglich erhalten wir mit dem Lemma von Zorn ein maximales Element (X_0, L_{X_0}) in A. Angenommen $X_0 \neq X$. Dann gibt es einen Vektorraum W, sodass

$$X_0 \subsetneq W \subset X \quad \text{und } X_0 \text{ hat Kodimension 1 in } W.$$

Wir wenden Schritt 1 an und erhalten $(W, L_W) \in A$, was eine echte Majorante von (X_0, L_{X_0}) ist. Weil dies im Widerspruch zur Maximalität von (X_0, L_{X_0}) steht, ist $X_0 = X$ und $L := L_{X_0}$ ist die gesuchte Erweiterung von ℓ auf ganz X. □

Aufgabe 1.1.3.
(a) Warum ist $A \neq \emptyset$?
(b) Zeigen Sie dass L_V wohldefiniert ist.

Proposition 1.1.4. *Es existiert eine lineare stetige Abbildung $L : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:*
(i) $L(x) \geq 0$ falls $x = (x_n)_n \in \ell^\infty$ mit $x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(ii) $L((x_1, x_2, x_3, \ldots)) = L((x_2, x_3, \ldots))$, für alle $(x_n)_n \in \ell^\infty$.
(iii) $L((1, 1, 1, \ldots)) = 1$

Bemerkung 1.1.5. Eine Abbildung mit diesen Eigenschaften heißt *Banachlimes.*

Beweis. Wir bezeichnen mit X den Teilraum von ℓ^∞ gegeben durch

$$X = \{(x_n)_n \in \ell^\infty : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \text{ existiert}\}.$$

Sei $\ell : X \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\ell((x_n)_n) = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$. Wir definieren $p : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ als $p((x_n)_n) = \lim_n \sup_{m \geq n} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_k$ und halten fest dass p sublinear ist und es gilt $\ell(x) \leq p(x)$, $x \in X$. Mit dem Satz von Hahn-Banach (Satz 1.1.2) setzen wir ℓ auf ganz ℓ^∞ zu L linear fort, sodass $L(x) \leq p(x)$, $x \in \ell^\infty$. Weil $(1, 1, 1, \ldots) \in X$ so ist $L((1, 1, 1, \ldots)) = \ell((1, 1, 1, \ldots)) = 1$, und damit ist (iii) gezeigt. Also gilt auch

$$-L(x) = L(-x) \leq p(-x) = \lim_n \sup_{m \geq n} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} -x_k = -\lim_n \inf_{m \geq n} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x_k,$$

d.h. $L(x) \geq \lim_n \inf_{m\geq n} \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x_k$, für alle $(x_n)_n \in \ell^\infty$. Wir halten also fest

$$\lim_n \inf_{m\geq n} \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x_k \leq L(x) \leq \lim_n \sup_{m\geq n} \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x_k, \qquad (x_n)_n \in \ell^\infty,$$

woraus $\|L\| = 1$ und (i) folgt. Sei nun $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in \ell^\infty$ fixiert und wir setzen $y = (x_2, x_3, \ldots)$. Dann gilt für $z = (z_k)_k = x - y$ dass

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n z_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k - x_{k+1} = \frac{x_1 - x_{n+1}}{n} \to 0,$$

also ist $z \in X$ und somit $L(z) = \ell(z) = 0$, d.h. $L(x) = L(y)$, und so ist auch (ii) gezeigt. □

1.2. Der Satz von Hahn-Banach – Fortsetzungsversion

Satz 1.2.1. *Sei X ein normierter Raum, und sei U ein Unterraum von X. Zu jedem linearen stetigen Funktional $u^* : U \to \mathbb{R}$ existiert ein lineares stetiges Funktional $x^* : X \to \mathbb{R}$ mit*

$$x^*|U = u^* \qquad \text{und} \qquad \|x^*\|_{X^*} = \|u^*\|_{U^*}.$$

Beweis. Sei $u^* \in U^*$ fixiert. Wir definieren die sublineare Abbildung $p : X \to \mathbb{R}$ durch

$$p(x) = \|u^*\|_{U^*}\|x\|_X, \qquad x \in X.$$

Es gilt

$$u^*(u) \leq p(u), \qquad u \in U.$$

Mit Satz 1.1.2 erhalten wir eine lineare Fortsetzung $x^* : X \to \mathbb{R}$ von u^*, sodass

$$x^*(x) \leq p(x), \quad x \in X.$$

Weil $p(-x) = p(x)$ folgt

$$|x^*(x)| \leq p(x) = \|u^*\|_{U^*}\|x\|_X, \quad x \in X,$$

also ist $\|x^*\|_{X^*} \leq \|u^*\|_{U^*}$. Weil $x^*|U = u^*$ gilt Gleichheit. □

Korollar 1.2.2. *In jedem normierten Raum X existiert zu jedem $x \in X$, $x \neq 0$ ein $x^* \in X^*$, sodass*

$$\|x^*\|_{X^*} = 1 \qquad \text{und} \qquad x^*(x) = \|x\|_X.$$

Beweis. Sei $x_0 \in X\backslash\{0\}$ und $U = \operatorname{span}\{x_0\}$. Wir definieren das lineares Funktional $u^* \in U^*$ durch

$$\lambda x_0 \mapsto \lambda\|x_0\|, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Es gilt $\|u^*\|_{U^*} = 1$ und $u^*(x_0) = \|x_0\|_X$. Aus Satz 1.2.1 erhalten wir eine Fortsetzung $x^* \in X^*$ von u^* mit den gewünschten Eigenschaften. □

Bemerkung 1.2.3. Aus Korollar 1.2.2 folgt dass für jeden normierten Raum $X \neq \{0\}$ gilt dass $X^* \neq \{0\}$.

Korollar 1.2.4. *In jedem normierten Raum X gilt*

$$\|x\|_X = \sup_{\|x^*\|_{X^*}\leq 1} |x^*(x)|.$$

Beweis. Für $x = 0$ ist nichts zu zeigen. Für $x \neq 0$ folgt aus Korollar 1.2.2 die Existenz eines linearen Funktionals $x^* \in X^*$ mit

$$\|x^*\|_{X^*} = 1 \quad \text{und} \quad x^*(x) = \|x\|_X.$$

Somit gilt

$$\|x\|_X \leq \sup_{\|x^*\|_{X^*}\leq 1} |x^*(x)|.$$

Die andere Ungleichung gilt per Definition der Norm in X^*. □

Korollar 1.2.5. *Sei X ein normierter Raum, $U \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum und $x_0 \notin U$. Dann existiert ein $x^* \in X^*$ mit $\|x^*\|_{X^*} = 1$, sodass*

$$x^*(x_0) \geq \operatorname{dist}(x_0, U) \qquad \textit{und} \qquad x^*|U = 0.$$

Aufgabe 1.2.6. Beweisen Sie Korollar 1.2.5. Hinweis: Betrachten Sie den Quotientenraum X/U.

1.3. Der Satz von Hahn-Banach – Trennungssätze

Lemma 1.3.1. *Sei X ein normierter Raum und $V \subset X$ konvex und offen mit $0 \notin V$. Dann existiert ein $x^* \in X^*$, sodass*

$$x^*(v) < 0, \qquad v \in V.$$

Beweis. Sei x_0 so, dass $-x_0 \in V$. Wir definieren die offene Menge $U = V + x_0$ und stellen fest, dass $0 \in U$ und $x_0 \notin U$ (siehe Figure 1.3.1). Sei $\varepsilon > 0$ so, dass $B(0, \varepsilon) \subset U$. Das *Minkowskifunktional* $p_U : X \to [0, \infty)$ zu U ist gegeben durch

$$p_U(x) = \inf\{\lambda > 0 \, : \, x/\lambda \in U\}.$$

p_U ist wohldefiniert, sublinear, es gilt $p_U(x_0) \geq 1$ und $p_U(x) \leq \|x\|/\varepsilon$, $x \in X$ (s. Aufgabe 1.3.3). Auf dem Unterraum $Y = \operatorname{span}\{x_0\}$ definieren wir das lineare Funktional y^* durch

$$y^*(tx_0) = tp_U(x_0), \qquad t \in \mathbb{R},$$

und stellen fest, dass für alle $y \in Y$ gilt $y^*(y) \leq p_U(y)$. Wir setzen y^* mit Satz 1.1.2 linear auf den ganzen Raum fort, bezeichnen diese Fortsetzung mit x^* und halten fest, dass $x^*(x) \leq p_U(x)$, $x \in X$. Es gilt $x^* \in X^*$, denn

$$|x^*(x)| = \max\{x^*(x), -x^*(x)\} \leq \max\{p_U(x), p_U(-x)\} \leq \|x\|/\varepsilon.$$

Für jedes $v \in V$ existiert ein $u \in U$, sodass $v = u - x_0$, also

$$x^*(v) = x^*(u) - x^*(x_0) \leq p_U(u) - y^*(x_0) < 0.$$

Die letzte Ungleichung gilt, weil $y^*(x_0) \geq 1$ und $p_U(u) < 1$ für $u \in U$. $\square$

Satz 1.3.2. *Sei X ein normierter Raum, $V_1, V_2 \subset X$ disjunkt, konvex und sei V_1 offen. Dann existiert ein $x^* \in X^*$ mit*

$$x^*(v_1) < x^*(v_2), \qquad v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2.$$

Beweis. Wir definieren die konvexe und offene Menge $V = V_1 - V_2$ (s. Aufgabe 1.3.3), und halten fest, dass $0 \notin V$. Mit Lemma 1.3.1 folgt die Existenz eines $x^* \in X^*$, sodass für alle $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$ gilt $x^*(v_1 - v_2) < 0$. $\square$

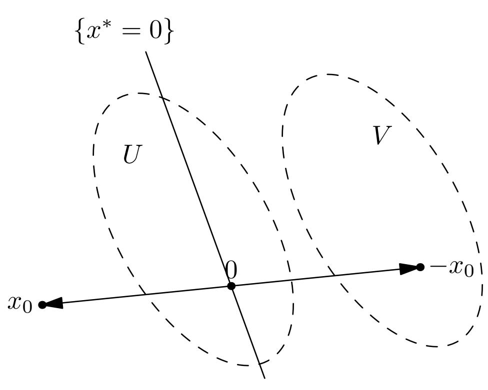

Abbildung 1.3.1. Darstellung von V, U und x_0.

Aufgabe 1.3.3. Seien $V_1, V_2 \subset X$ konvexe Mengen im normierten Raum X, und $V = V_1 + V_2$. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(a) V ist konvex.

(b) Ist V_1 zusätzlich offen, so ist auch V offen.

Zeigen Sie das Minkowskifunktional p_U (definiert im Beweis von Lemma 1.3.1) ist wohldefiniert, sublinear, $p_U(x_0) \geq 1$ und $p_U(x) \leq \|x\|/\varepsilon$, für alle $x \in X$.

Satz 1.3.4. *Sei X ein normierter Raum, $V \subset X$ abgeschlossen, konvex und sei $x_0 \notin V$. Dann existieren ein $x^* \in X^*$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass*

$$x^*(v) \leq \alpha < x^*(x_0), \qquad v \in V.$$

Beweis. Weil V abgeschlossen ist, finden wir ein $\delta > 0$, sodass $B(x_0, \delta) \cap V = \emptyset$. Nach Satz 1.3.2 existiert ein $x^* \in X^*$ mit

$$x^*(v) < x^*(x), \qquad v \in V,\, x \in B(x_0, \delta).$$

D.h. für alle $v \in V$ und $\|y\|_X < \delta$ ist $x^*(v) < x^*(x_0) + x^*(y)$. Wir wählen $\|y\| < \delta$ so, dass $x^*(y) = -\|x^*\|_{X^*}\delta/2$, und erhalten

$$x^*(v) < x^*(x_0) - \|x^*\|_{X^*}\delta/2 < x^*(x_0). \qquad \square$$

1.4. Topologie

Definition 1.4.1. Eine *Topologie* $\mathcal{T}$ auf einer Menge T ist ein System von Teilmengen von T mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $\emptyset \in \mathcal{T}$, $T \in \mathcal{T}$,

(b) ist $U, V \in \mathcal{T}$, dann auch $U \cap V \in \mathcal{T}$

(c) Sei I eine beliebige Indexmenge und $O_i \in \mathcal{T}$, $i \in I$, dann ist $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$.

Das Paar $(T, \mathcal{T})$ heißt *topologischer Raum*, und jede Menge $O \in \mathcal{T}$ heißt *offen*. Eine Menge $A \subset T$ heißt *abgeschlossen* genau dann wenn $T \setminus A$ offen ist. Sei $S \subset T$ und

$$\mathcal{S} = \{O \cap S \,:\, O \in \mathcal{T}\},$$

dann heißt $\mathcal{S}$ die von $\mathcal{T}$ erzeugte *Relativtopologie* auf S, und $(S, \mathcal{S})$ ist ein topologischer Raum.

Aus der obigen Definition folgt unmittelbar

Behauptung 1.4.2.

(a) $\emptyset$ und T sind abgeschlossen,

(b) die Vereinigung zweier abgeschlossener Menge ist abgeschlossen,

(c) der Durschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Definition 1.4.3. Eine Menge U heißt *Umgebung* von einem Punkt $t \in T$, falls eine offene Menge O existiert sodass

$$t \in O \subset U.$$

Ein System von Mengen $\mathcal{U}$ heißt *Umgebungsbasis* des Punktes $t \in T$, falls für jede Umgebung V von t ein $U \in \mathcal{U}$ existiert sodass

$$t \in U \subset V.$$

Definition 1.4.4. Eine Menge I mit der Relation "$\leq$" heißt *gerichtete Menge*, falls

(a) $i \leq i$, für alle $i \in I$,

(b) aus $i \leq j$ und $j \leq k$ folgt $i \leq k$,

(c) für alle $i_1, i_2 \in I$ existiert ein $j \in I$ sodass $i_1 \leq j$ und $i_2 \leq j$.

Beispiel. Sei X eine nichtleere Menge und seien $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$ so dass

$$A \cup B \in \mathcal{F},\ A, B \in \mathcal{F}, \qquad \text{und} \qquad A \cap B \in \mathcal{G},\ A, B \in \mathcal{G}.$$

Dann sind $\mathcal{F}$ mit der Relation "$\subset$" und $\mathcal{G}$ mit der Relation "$\supset$" gerichteten Mengen.

Definition 1.4.5. Ein *Netz* in einer Menge T ist eine Abbildung von einer gerichteten Menge I nach T. Wir schreiben dafür $(t_i)_{i\in I}$ oder (t_i).

Ein Netz $(t_i)_{i\in I}$ in T *konvergiert* gegen $t \in T$ falls für jede Umgebung U von t ein Index $j \in I$ existiert sodass für alle Indizes $i \geq j$

$$t_i \in U.$$

Wir schreiben dafür $t_i \to t$ und auch $\lim_i t_i = t$.

Aufgabe 1.4.6. Sei (t_i) ein Netz im topologische Raum T, und $t \in T$. Zeigen Sie folgende Aussage sind äquivalent:

(i) $t_i \to t$.
(ii) Für jede offene Menge $O \ni t$ existiert eine i_0 sodass für alle $i \geq i_0$ gilt $t_i \in O$.

Definition 1.4.7. Sei T ein topologischer Raum und $A \subset T$. Ein Punkt $t \in T$ ist im *Abschluss* $\overline{A}$ von A, genau dann wenn ein Netz $(t_i) \subset M$ existiert mit $t_i \to t$. Wir definieren das *Innere* $\operatorname{int} A$ von A durch $\operatorname{int} A = (\overline{A^c})^c$.

Aufgabe 1.4.8. Sei T ein topologischer Raum und $A \subset T$. Zeigen Sie: $\overline{A}$ ist abgeschlossen.

Definition 1.4.9. Seien $(T_1, \mathcal{T}_1)$ und $(T_2, \mathcal{T}_2)$ topologische Räume, $f : T_1 \longrightarrow T_2$ und $t_0 \in T$. Die Abbildung f heißt *stetig in* t_0, falls für jede Umgebung V von $f(t_0)$ gilt dass $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von t_0 ist.

Aufgabe 1.4.10. Seien $(T_1, \mathcal{T}_1)$ und $(T_2, \mathcal{T}_2)$ topologische Räume, $f : T_1 \longrightarrow T_2$ und $t_0 \in T$. Zeigen Sie folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) f ist stetig in t_0.
(ii) Für jede offene Menge $O \in \mathcal{T}_2$ mit $O \ni f(t_0)$ existiert eine Umgebung $U \in \mathcal{T}_1$ von t_0 sodass $f(U) \subset O$.

Satz 1.4.11. *Seien $(T_1, \mathcal{T}_1)$ und $(T_2, \mathcal{T}_2)$ topologische Räume, und sei $f : T_1 \longrightarrow T_2$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) f ist überall (in jedem Punkt) stetig,
(ii) für alle $O \in \mathcal{T}_2$ gilt $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}_2$,
(iii) für alle abgeschlossenen $A \subset T_2$ gilt $f^{-1}(A)$ ist abgeschlossen in T_1.

Aufgabe 1.4.12. Zeigen Sie Satz 1.4.11.

Satz 1.4.13. *Sei $f : T_1 \longrightarrow T_2$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) f ist stetig in $t_0 \in T_1$,
(ii) für jedes Netz (t_i) für welches $t_i \to t_0$, folgt $f(t_i) \to f(t_0)$.

Definition 1.4.14. Seien $(T_1, \mathcal{T}_1)$ und $(T_2, \mathcal{T}_2)$ topologische Räume. Wir definieren:

(a) $O \subset X \times Y$ heißt *offen in der Produkttopologie* genau dann wenn für jedes $x \in O$ ein $U_1 \in \mathcal{T}_1$ und ein $U_2 \in \mathcal{T}_2$ existieren sodass

$$x \in U_1 \times U_2 \subset O.$$

(b) Die *Produkttopologie* auf $T_1 \times T_2$ ist die Kollektion aller offener Mengen auf $T_1 \times T_2$.

Bemerkung 1.4.15. Für $i = 1, 2$ bezeichnen wir mit $\pi_i : T_1 \times T_2 \to T_i$, $i = 1, 2$ die *kanonische Koordinatenproojektion*, d.h. $\pi_i(t_1, t_2) = t_i$. Dann ist

$$U_1 \times U_2 = \pi_1^{-1}(U_1) \cap \pi_2^{-1}(U_2).$$

Aufgabe 1.4.16. Zeigen Sie dass es sich bei

$$\{O \subset X \times Y : O \text{ is offen in der Produkttopologie}\}$$

tatsächlich um eine Topologie handelt. Zeigen Sie dass die Produkttopologie die gröbste (=„kleinste") Topologie auf $X \times Y$, so dass alle $U \times V$, $U \in \mathcal{T}_1, V \in \mathcal{T}_2$ offen in der Produkttopologie sind.

Definition 1.4.17. Sei I eine Indexmenge und für jedes $i \in I$ sein T_i ein topologischer Raum. Dann ist

$$\prod_{i\in I} T_i = \left\{ f \, : \, I \to \bigcup_{i\in I} T_i \,\middle|\, f(i) \in T_i \text{ für alle } i \in I \right\}.$$

Eine Menge $O \subset \prod_{i\in I} T_i$ heißt *offen in der Produkttopologie* wenn für alle $t \in O$ Mengen $O_{i_1} \ldots, O_{i_n}$ existieren für die O_{i_k} offen in T_{i_k} ist, $1 \leq k \leq n$, sodass

$$t \in \left\{ s \in \prod_{i\in I} T_i \, : \, s(i_k) \in O_{i_k} \text{ für alle } 1 \leq k \leq n \right\} \subset O.$$

Die Kollektion all dieser offenen Mengen heißt dann *Produkttopologie*.

Bemerkung 1.4.18. Aufgrund des Auswahlaxioms ist $\prod_{i\in I} T_i \neq \emptyset$.

Bemerkung 1.4.19. Für $i \in I$ bezeichnet $\pi_i : \prod_{i\in I} T_i \to T_i$ die *kanonische Koordinatenproojektionen* gegeben durch $\pi_i(t) = t(i)$. Dann ist

$$\left\{ s \in \prod_{i\in I} T_i \, : \, s(i_k) \in O_{i_k} \text{ für alle } 1 \leq k \leq n \right\} = \bigcap_{k=1}^{n} \pi_k^{-1}(O_{i_k}).$$

Aufgabe 1.4.20. Zeigen Sie dass es sich bei

$$\mathcal{T} = \left\{ O \subset \prod_{i\in I} T_i : O \text{ is offen in der Produkttopologie} \right\}$$

tatsächlich um eine Topologie handelt. Zeigen Sie dass $\mathcal{T}$ die gröbste (=„kleinste“) Topologie auf $\prod_{i\in I} T_i$ ist sodass alle π_i, $i \in I$ stetig sind.

Definition 1.4.21. Sei T ein topologischer Raum. Dann heißt $K \subset T$ *kompakt* genau dann wenn für jedes System von offenen Mengen $\{O_i\}_{i\in I}$ mit $K \subset \bigcup_{i\in I} O_i$ existieren endlich viele Indizes $i_1, \ldots, i_n$ sodass $K \subset \bigcup_{k=1}^n O_{i_k}$.

Definition 1.4.22. Sei $(t_i)_{i\in I}$ ein Netz, J eine weitere gerichtete Menge und $\varphi : J \to I$ eine Abbildung sodass für jedes $i \in I$ ein j_0 existiert sodass für alle $j \geq j_0$ gilt $\varphi(j) \geq i$. Dann heißt $(s_j)_{j\in J}$ gegeben durch $s_j = t_{\varphi(j)}$, $j \in J$ Teilnetz von $(t_i)_{i\in I}$.

Bemerkung 1.4.23. Klarerweise ist jede Folge ein Netz, jede Teilfolge einer Folge eine Folge, und jedes Teilnetz eines Netzes ein Netz. Jedoch ist nicht jedes Teilnetz einer Folge eine Folge!

Satz 1.4.24. *Sei T ein topologischer Raum dann ist $K \subset T$ kompakt genau dann wenn jedes Netz $(t_i)_{i\in I}$ ein in K konvergentes Teilnetz besitzt.*

Aufgabe 1.4.25. Sei $f : T_1 \to T_2$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen, und sei $K \subset T_1$ kompakt. Zeigen Sie dass $f(K)$ eine in T_2 kompakte Menge ist. Zeigen Sie die Aussage direkt mit der Definition 1.4.21, und mit Satz 1.4.24.

Satz 1.4.26 (Satz von Tychonoff)**.** *Sei I eine Indexmenge und für jedes $i \in I$ sei jedes T_i ein kompakter topologischer Raum. Dann ist $\prod_{i\in I} T_i$ kompakt in der Produkttopologie.*

KAPITEL 2

Lokalkonvexe Räume

2.1. Zusätzliche Notation

Definition 2.1.1. Ein Vektorraum X ausgestattet mit einer Topologie $\mathcal{T}$ heißt *topologischer Vektorraum* falls $+ : X \times X \to X$ und $\cdot : \mathbb{R} \times X \to X$ stetige Abbildungen bezüglich ihrer jeweiligen Produkttopologie sind.

Definition 2.1.2. Sei X ein Vektorraum, und $A \subset X$, dann definieren wir das *Minkowski-funktional* $p_A : X \longrightarrow [0, \infty]$ durch

$$p_A(x) = \inf \big\{ \lambda > 0 \,:\, \frac{x}{\lambda} \in A \big\}, \qquad \text{für jedes } x \in X.$$

Eine Teilmenge A eines Vektorraumes X heißt

- ▷ absorbierend, falls $p_A(x) < \infty$ für alle $x \in X$,
- ▷ kreisförmig, falls $\{\lambda \,:\, |\lambda| \leq 1\} \cdot A \subset A$.
- ▷ absolutkonvex, falls A konvex und kreisförmig ist.

Definition 2.1.3. Sei X ein Vektorraum. Eine Abbildung $p : X \to [0, \infty)$ heißt *Halbnorm* genau dann wenn

(a) $p(\lambda x) = |\lambda| \, p(x)$, für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in X$,
(b) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, für alle $x, y \in X$.

Beispiel. Für $t \in [0, 1]$ definieren wir die Halbnorm $p_t : C[0, 1] \to \mathbb{C}$ durch

$$p_t(x) = |x(t)|, \qquad x \in C[0, 1].$$

Eine Folge $(x_n)_n \subset C[0, 1]$ konvergiert punktweise überall gegen 0 genau dann wenn

$$\lim_n p_t(x_n) = 0, \qquad t \in [0, 1].$$

2.2. Definition lokalkonvexer Räume

Sei X ein Vektorraum und P eine Menge von Halbnormen auf X. Dann definieren wir für jede endliche Menge $F \subset P$ und jedes $\varepsilon > 0$ die Mengen

$$\begin{aligned} U_{F,\varepsilon} &= \big\{ x \in X \,:\, p(x) \leq \varepsilon \text{ für alle } p \in F \big\}, \\ \mathcal{U} &= \big\{ U_{F,\varepsilon} \,:\, F \subset P \text{ endlich}, \varepsilon > 0 \big\}. \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Behauptung 2.2.1. *Die Kollektion $\mathcal{U}$ besitzt folgende Eigenschaften:*

(i) Für alle $U \in \mathcal{U}$ ist $0 \in U$.
(ii) Für alle $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ existiert ein $U \in \mathcal{U}$ sodass $U \subset U_1 \cap U_2$.
(iii) Für alle $U \in \mathcal{U}$ existiert ein $V \in \mathcal{U}$ sodass $V + V \subset U$.
(iv) Alle $U \in \mathcal{U}$ sind absorbierend.
(v) Für alle $U \in \mathcal{U}$ und $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$ existiert ein $V \in \mathcal{U}$ sodass $\lambda \cdot V \subset U$.
(vi) Jedes $U \in \mathcal{U}$ ist kreisförmig.
(vii) Jedes $U \in \mathcal{U}$ ist absolutkonvex.

Aufgabe 2.2.2. Beweisen Sie Behauptung 2.2.1.

Lösung. Der Beweis von (i) folgt aus $p(0_{\mathbb{R}} \cdot 0_X) = |0_{\mathbb{R}}| p(0_X) = 0_{\mathbb{R}}$.

Seien $U_1, U_2 \in \mathfrak{U}$, dann existieren endliche $F_1, F_2 \subset P$ und $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ sodass $U_1 = U_{F_1,\varepsilon_1}$ und $U_2 = U_{F_2,\varepsilon_2}$. Offensichtlich gilt

$$U_{F_1\cup F_2,\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \in \mathfrak{U} \qquad \text{und} \qquad U_{F_1\cup F_2,\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \subset U_{F_1,\varepsilon_1} \cap U_{F_2,\varepsilon_2},$$

und somit ist (ii) bewiesen.

Für endliches $F \subset P$ und $\varepsilon > 0$ gilt $U_{F,\varepsilon/2} + U_{F,\varepsilon/2} \subset U_{F,\varepsilon}$, also folgt (iii).

Sei $F \subset P$ endlich, $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in X$. Definiere $\lambda = \frac{2}{\varepsilon} \max_{p\in F} p(x_0)$, dann gilt $\frac{x_0}{\lambda} \in U_{F,\varepsilon}$. Insbesondere ist $p_A(x_0) < \infty$, und (iv) ist bewiesen.

Behauptung (v) folgt sofort aus der Identität $\lambda \cdot U_{F,\varepsilon/\lambda} = U_{F,\varepsilon}$.

Schließlich folgen (vi) und (vii) unmittelbar durch einsetzen in die Definitionen. □

Lemma 2.2.3. *Sei X ein Vektorraum und $\mathfrak{U}$ die in (2.2.1) definierte Kollektion von Mengen, dann gilt für jedes $U \in \mathfrak{U}$ dass das Minkowskifunktional $P_U : X \to [0,\infty)$ eine wohldefinierte Halbnorm auf X ist.*

Aufgabe 2.2.4. Zeigen Sie Lemma 2.2.3.

Lösung. Aufgrund von Behauptung 2.2.1 (iv) ist p_U wohldefiniert. Wir zeigen nun die Subadditivität von p_U. Dazu seien $x, y \in X$ fixiert und $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ so dass $\frac{x}{\lambda_1} \in U$ und $\frac{y}{\lambda_2} \in U$. Nach Behauptung 2.2.1 (vii) ist U konvex, also gilt

$$\frac{x+y}{\lambda_1+\lambda_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\frac{x}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\frac{y}{\lambda_2} \in U.$$

Alsi ist $p_U(x+y) \leq \lambda_1 + \lambda_2$, für alle $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ mit $\frac{x}{\lambda_1} \in U$ und $\frac{y}{\lambda_2} \in U$. Durch bilden der Infima folgt die Subadditivität von p_U.

Für jedes $x \in X$ und $\lambda \neq 0$ gilt

$$p_U(\lambda x) = \left\{\mu > 0 : \frac{\lambda x}{\mu} \in U\right\} = \left\{\nu|\lambda| : \nu > 0,\ \frac{\operatorname{sign}(\lambda)x}{\nu} \in U\right\} = |\lambda|\left\{\nu : \nu > 0,\ \frac{x}{\nu} \in \operatorname{sign}(\lambda)U\right\}$$

Nach Behauptung 2.2.1 (vi) ist U kreisförmig, also gilt $-U \subset U \subset -U$, d.h. $U = -U$. Also folgt aus der obigen Gleichung $p_U(\lambda x) = |\lambda| p_U(x)$, $\lambda \neq 0$. Dar Fall $\lambda = 0$ folgt aus Behauptung 2.2.1 (i). □

Definition 2.2.5. Wir definieren nun die folgende Topologie $\mathcal{T}$ auf dem Vektorraum X. Die Menge $O \subset X$ ist *offen*, also $O \in \mathcal{T}$ genau dann wenn für jedes $x \in O$ ein $U \in \mathfrak{U}$ existiert sodass

$$x + U \subset O.$$

Behauptung 2.2.6. *Die Menge $\mathcal{T} = \{O \subset X : O \text{ ist offen}\}$ ist eine Topologie auf X.*

Beweis. Zu zeigen sind die definierenden Eigenschaften einer Topologie. Wir haben natürlich dass $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $X \in \mathcal{T}$. Seien nun $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$. Wir zeigen dass $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$. Dazu fixieren wir $x \in O_1 \cap O_2$. Weil $x \in O_1$ und $x \in O_2$, so existieren per Definition von $\mathcal{T}$ Mengen $U_1, U_2 \in \mathfrak{U}$ sodass

$$x + U_1 \subset O_1 \qquad \text{und} \qquad x + U_2 \subset O_2.$$

Aus Behauptung 2.2.1 (ii) folgt die Existenz von $U \in \mathfrak{U}$ mit sodass $U \subset U_1 \cap U_2$, folglich gilt

$$x + U \subset O_1 \cap O_2.$$

Weil x beliebig gewählt war, so ist $O_1 \cap O_2$ offen.

Seien nun $O_i \in \mathcal{T}$, $i \in I$. Wir zeigen $\bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{T}$. Für fixiertes $x \in \bigcup_{i\in I} O_i$ existiert ein $i_0 \in I$ sodass $x \in O_{i_0}$. Per Definition von $\mathcal{T}$ existiert ein $U \in \mathfrak{U}$ sodass $x + U \subset O_{i_0}$, also

$$x + U \subset \bigcup_{i\in I} O_i.$$

Weil x beliebig war, folgt die Behauptung. □

Lemma 2.2.7. *Sei X ein linearer Vektorraum und $\mathfrak{T}$ die in Definition 2.2.5 beschriebenen Topologie $\mathfrak{T}$. Dann sind*

(i) Addition $+ : X \times X \to X$, $(x, y) \mapsto x + y$,
(ii) Skalarmultiplikation $\cdot : \mathbb{R} \times X \to X$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$

stetige Abbildungen bezüglich ihrer jeweiligen Produkttopologien.

Beweis. Sei $O \subset X$ offen.

(i) Wir zeigen nun
$$\widetilde{O} := \{(x, y) : x + y \in O\} \text{ ist offen.}$$
Dazu sei $x, y \in X$ mit $(x, y) \in \widetilde{O}$, also $x + y \in O$. Weil $O \in \mathfrak{T}$, so existiert ein $U \in \mathfrak{U}$ sodass $x + y + U \subset O$. Nach Behauptung 2.2.1 (iii) existiert ein $V \in \mathfrak{U}$ für das gilt $V + V \subset U$. Daraus folgt dass
$$(x + V) + (y + V) \subset x + y + U \subset O.$$
Wir setzen $W := x + V \in \mathfrak{T}$ und $\widetilde{W} := y + V \in \mathfrak{T}$, stellen fest dass $(W \times \widetilde{W})$ eine Umgebung von (x, y) in der Produkttopologie ist. Damit folgt aus der Definition von "+" und der obigen Inklusion
$$+(W \times \widetilde{W}) = W + \widetilde{W} \subset O,$$
und damit (i).

(ii) Jetzt zeigen wir dass
$$\overline{O} := \{(\lambda, x) : \lambda x \in O\} \text{ offen ist.}$$
Dazu seien $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in X$ mit $(\lambda, x) \in \overline{O}$, also $\lambda x \in O$ fixiert. Weil $O \in \mathfrak{T}$, so existiert ein $U \in \mathfrak{U}$ mit $\lambda x + U \subset O$. Aus Behauptung 2.2.1 (iii) erhalten wir ein $V \in \mathfrak{U}$ sodass
$$V + V \subset U$$
Mit Behauptung 2.2.1 (iv) (V ist absorbierend) folgt die Existenz eines $\varepsilon > 0$ so dass $\varepsilon x \in V$. Aus Behauptung 2.2.1 (vi) (V ist kreisförmig) erhalten wir
$$(\mu - \lambda)x \in V, \qquad |\mu - \lambda| < \varepsilon.$$
Nach Behauptung 2.2.1 (v) und (vi) existiert ein $W \in \mathfrak{U}$ sodass
$$\mu W \subset V, \qquad |\mu| \leq |\lambda| + \varepsilon.$$
Für alle μ mit $|\mu - \lambda| < \varepsilon$ folgt aus den letzten drei Aussagen dass
$$\mu(x + W) - \lambda x = (\mu - \lambda)x + \mu W \subset V + V \subset U.$$
Weil $\lambda x + U \subset O$ impliziert die letzte Inklusion $\mu(x + W) \subset O$, falls $|\mu - \lambda| < \varepsilon$, also
$$\cdot\big(\{\mu \in \mathbb{R} : |\mu - \lambda| < \varepsilon\} \times (x + W)\big) \subset \overline{O}.$$
Weil die Menge $\{\mu \in \mathbb{R} : |\mu - \lambda| < \varepsilon\}$ offen in $\mathbb{R}$ ist, und $(x + W)$ eine Umgebung von x in X ist, folgt daraus die Behauptung.

□

Definition 2.2.8. Sei P eine Menge von Halbnormen auf dem Vektorraum X, und $\mathfrak{T}_p$ die Topologie gegeben durch
$$O \in \mathfrak{T}_p \Leftrightarrow \forall x \in O \, \exists U \in \mathfrak{U}_P \, : \, x + U \subset O,$$
wobei
$$\mathfrak{U}_P = \big\{U_{F,\varepsilon} \, : \, F \subset P \text{ endlich}, \, \varepsilon > 0\big\},$$
$$U_{F,\varepsilon} = \big\{x \in X \, : \, p(x) \leq \varepsilon \text{ für alle } p \in F\big\}.$$
Dann heißt $(X, \mathfrak{T}_p)$ *lokalkonvexer (topologischer) (Vektor)raum*. Gelegentlich schreiben wir einfach $\mathfrak{U}$ für $\mathfrak{U}_P$ und $\mathfrak{T}$ für $\mathfrak{T}_P$.

Beispiel. (a) Sei T eine nichtleere Menge, und X ein Vektorraum von Funktionen auf T. Betrachte $p_t(x) = |x(t)|$, $t \in T$, $x \in X$. Die Familie von Halbnormen $P = \{p_t : t \in T\}$ erzeugt die lokalkonvexe Topologie der *punktweisen Konvergenz*.

(b) Betrachte $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (der Raum der Schwartzfunktionen auf $\mathbb{R}^n$; siehe Definition 3.3.2) und sei

$$p_{\alpha,m}(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1 + |x|^m) \big|\big(D^\alpha\varphi\big)(x)\big|,$$

wobei $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, α ist ein Multiindex und $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$. Die Menge von Halbnormen $P = \{p_{\alpha,m} : \alpha, m\}$ erzeugt eine lokalkonvexe Topologie auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(c) Sei H ein Hilbertraum. Für jedes $y \in Y$ definieren wir das Funktional

$$p_y(x) = \langle x, y\rangle, \qquad x \in H.$$

Jedes der p_y, $y \in Y$ ist eine Halbnorm auf H, und die Menge $P = \{p_y : y \in Y\}$ erzeugt eine lokalkonvexe Topologie auf H. Diese Topologie heißt *schwache Topologie* auf H und wird mit $\sigma(H, H^*)$ bezeichnet.

(d) Sei X ein normierter Raum. Betrachte die Halbnormen $p_{x^*}(x) = |x^*(x)|$, wobei $x^* \in X^*$ und $x \in X$, und definiere $P = \{p_{x^*} : x^* \in X^*\}$. Die Familie von Halbnormen P erzeugt die *schwache Topologie* auf X, und wird mit $\sigma(X, X^*)$ bezeichnet.

(e) Sei X ein normierter Raum. Auf seinem Dualraum X^* definieren wir die Halbnormen $p_x(x^*) = |x^*(x)|$, wobei $x^* \in X^*$ und $x \in X$, und definiere $P = \{p_x : x \in X\}$. Die Familie von Halbnormen P erzeugt die *schwach* Topologie* auf X^*, und wird mit $\sigma(X^*, X)$ bezeichnet.

Aufgabe 2.2.9. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkonvexer Vektorraum, $A \subset X$ sei abgeschlossen und $K \subset X$ sei kompakt. Zeigen Sie dass $A + K$ abgeschlossen ist.

Betrachten Sie die Mengen $A = \{n - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N},\ n \geq 2\}$ und $B = \{-n : n \in \mathbb{N}\}$ und zeigen Sie dass $A + B$ nicht abgeschlossen ist.

Satz 2.2.10. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum. X ist genau dann lokalkonvex wenn es eine Nullumgebungsbasis aus absolutkonvexen absorbierenden Mengen gibt.*

Beweisskizze. Falls X ein lokalkonvexer Vektorraum ist, dann folgt aus Behauptung 2.2.1 dass die Nullumgebungsbasis $\mathcal{U}$ aus absolutkonvexen und absorbierenden Mengen besteht.

Existiert umgekehrt eine Nullumgebungsbasis $\mathcal{N}$ aus absolutkonvexen, absorbierenden Mengen, dann gilt jedes der Minkowskifunktionale p_N, $N \in \mathcal{N}$ gegeben durch

$$p_N(x) := \inf\{\lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in N\}, \qquad x \in X,$$

definiert Halbnormen auf X. Die Halbnormen $\{p_N : N \in \mathcal{N}\}$ erzeugen eine lokalkonvexe Topologie σ auf X, und es gilt dass $\sigma = \mathcal{T}$. □

2.3. Stetige Funktionale und der Satz von Hahn-Banach

Lemma 2.3.1. *Sei P eine Familie von Halbnormen welche die lokalkonvexe Topologie $\mathcal{T}$ auf X erzeugt.*

(i) Für eine Halbnorm $q : X \to [0, \infty)$ sind äquivalent:
 (a) q ist stetig,
 (b) q ist stetig bei 0,
 (c) $\{x \in X : q(x) \leq 1\}$ ist eine Nullumgebung.

(ii) Alle $p \in P$ sind stetig.

(iii) Eine Halbnorm q ist genau dann stetig wenn ein $0 \leq M < \infty$ und eine endliche Menge $F \subset P$ existieren sodass für alle $x \in X$ gilt

$$q(x) \leq M \max_{p\in F} p(x).$$

Beweis von Lemma 2.3.1. Beweis (i). Es ist leicht einzusehen dass (ia) $\Longrightarrow$ (ib) $\Longrightarrow$ (ic).

Wir zeigen nun (ic) $\implies$ (ia). Wir wissen dass $\{x \in X : q(x) \leq 1\}$ eine Nullumgebung ist, und wir müssen zeigen dass q stetig ist, d.h. für jedes $x \in X$ und für jedes $\varepsilon > 0$ müssen wir die Existenz einer Umgebung W von x zeigen sodass

$$q(W) \subset (q(x) - \varepsilon, q(x) + \varepsilon)$$

Seien nun $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ fixiert. Weil $\{x \in X : q(x) \leq 1\}$ eine Nullumgebung ist so existiert eine Menge $U \in \mathfrak{U}$ mit $U \subset \{x \in X : q(x) \leq 1\}$. Also gilt für $V := \frac{\varepsilon}{2} U \in \mathfrak{U}$ die Inklusion

$$V \subset \{y \in X : q(y) \leq \frac{\varepsilon}{2}\}.$$

Die umgekehrte Dreiecksungleichung gilt auch für Halbnormen, also

$$|q(x+y) - q(x)| \leq q(y) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \qquad y \in V.$$

Setzen wir $W := x + V$, so lautet die letzte Ungleichung

$$|q(z) - q(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \qquad z \in W,$$

also ist $q(W) \subset (q(x) - \varepsilon, q(x) + \varepsilon)$.

Beweis (ii). Für jedes $p \in P$ ist per Definition von $\mathcal{T}$ die Menge $\{x \in X : p(x) \leq 1\}$ eine Nullumgebung, und die Behauptung folgt aus (i).

Beweis (iii). Sei zunächst q eine stetige Halbnorm auf X. Dann gilt nach (i) dass $\{x \in X : q(x) \leq 1\}$ eine Nullumgebung ist, d.h. es existiert eine endliche Menge $F \subset P$ und ein $\varepsilon > 0$ sodass $U_{F,\varepsilon} \subset \{x \in X : q(x) \leq 1\}$. Dies bedeutet dass für alle $x \in X$ gilt

$$\max_{p \in F} p(x) \leq \varepsilon \implies q(x) \leq 1. \tag{2.3.1}$$

Sei nun $x \in X$ fixiert. Falls $\max_{p \in F} p(x) = 0$, dann gilt $\max_{p \in F} p(\lambda x) = 0$, $\lambda > 0$. Aus der obigen Implikation folgt $q(\lambda x) \leq 1$ für alle $\lambda > 0$, also muss gelten $q(x) = 0$, und die Behauptung ist bewiesen. Also sei nun $\max_{p \in F} p(x) > 0$. Dann gilt für $y = \frac{\varepsilon x}{\max_{p \in F} p(x)}$ dass $\max_{p \in F} p(y) \leq \varepsilon$, also folgt aus (2.3.1) $q(y) \leq 1$, d.h.

$$q(x) \leq \frac{1}{\varepsilon} \max_{p \in F} p(x),$$

wie behauptet.

Ist nun umgekehrt q eine Halbnorm für die ein $M > 0$ und eine endliche Menge $F \subset P$ existieren sodass

$$q(x) \leq M \max_{p \in F} p(x), \qquad x \in X.$$

Dann gilt für die Menge $U_{F,\frac{1}{M}} \in \mathfrak{U}$ dass

$$U_{F,\frac{1}{M}} \subset \{x \in X : q(x) \leq 1\},$$

also ist $\{x \in X : q(x) \leq 1\}$ eine Nullumgebung und die Behauptung folgt mit (i).

□

Satz 2.3.2. *Seien P und Q Familien von Halbnormen auf den Vektorräumen X und Y, und $\mathcal{T}_P$ und $\mathcal{T}_Q$ bezeichnen die jeweils davon induzierten Topologien. Für eine lineare Abbildung $T : (X, \mathcal{T}_P) \to (Y, \mathcal{T}_Q)$ sind äquivalent:*

(i) T ist stetig,
(ii) T ist stetig in 0,
(iii) Für jede stetige Halbnorm q auf Y ist $p := q \circ T$ eine stetige Halbnorm auf X.
(iv) Für alle $q \in Q$ existieren ein endliches $F \subset P$ und ein $0 \leq M < \infty$ sodass für alle $x \in X$ gilt

$$q(Tx) \leq M \max_{p \in F} p(x).$$

Beweis. Wir diskutieren zunächst die einfachen Implikationen. Für (i) $\Longrightarrow$ (ii) ist nichts zu zeigen.

Die Umkehrung (ii) $\Longrightarrow$ (i) gilt aufgrund der Stetigkeit der Vektorraumoperationen.

Für (ii) $\Longrightarrow$ (iii) fixieren wir eine stetige Halbnorm q auf Y. Die Hintereinanderausführung stetiger Funktionen ergibt wiederum eine stetige Funktion, und aufgrund der Linearität von T ist $q \circ T$ eine Halbnorm.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) ist genau die Aussage von Lemma 2.3.1 (iii).

Wir zeigen nun (iv) $\Longrightarrow$ (ii). Dazu sei $V \subset Y$ eine beliebige Nullumgebung. Wir müssen zeigen, dass eine Nullumgebung $U \subset X$ existiert, sodass $T(U) \subset V$. Es ist leicht einzusehen dass wir annehmen können annehmen dass V die folgende Form besitzt:

$$V = \{y \in Y : \max_{1 \le i \le n} q_i(y) \le \varepsilon\},$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ und $q_i \in Q$, $1 \le i \le n$, $\varepsilon > 0$. Aufgrund unserer Hypothese (iv) existiert für jedes $1 \le i \le n$ eine endliche Menge $F_i \subset P$ und ein $M_i > 0$ sodass

$$q_i(Tx) \le M_i \max_{p \in F_i} p(x), \qquad x \in X. \tag{2.3.2}$$

Definieren wir die endliche Menge $F \subset P$ und die positive Zahl $M > 0$ durch

$$F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i \qquad \text{und} \qquad M = \max_{1 \le i \le n} M_i,$$

so folgt mit (2.3.2) dass

$$\max_{1 \le i \le n} q_i(Tx) \le M \max_{p \in F} p(x), \qquad x \in X. \tag{2.3.3}$$

Per Definition von $U_{F,\varepsilon/M}$ gilt

$$\max_{p \in F} p(x) \le \frac{\varepsilon}{M}, \qquad x \in U_{F,\varepsilon/M},$$

also erhalten wir zusammen mit (2.3.3)

$$\max_{1 \le i \le n} q_i(Tx) \le \varepsilon, \qquad x \in U_{F,\varepsilon/M}.$$

Daraus folgt

$$T(U_{F,\varepsilon/M}) \subset \Big\{y \in Y : \max_{1 \le i \le n} q_i(y) \le \varepsilon\Big\} = V. \qquad \square$$

Definition 2.3.3. (a) Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein lokalkonvexer Raum. Die Menge der stetigen linearen Funktionale auf $(X, \mathfrak{T})$ heißt *Dualraum* und wird mit $(X, \mathfrak{T})^*$ (oder kurz X^*) bezeichnet.
(b) Die Menge der linearen stetigen Funktionen zwischen den lokalkonvexen Räumen $(X, \mathfrak{T}_1)$ und $(Y, \mathfrak{T}_2)$ wird mit $L((X, \mathfrak{T}_1), (Y, \mathfrak{T}_2))$ (oder kurz mit $L(X, Y)$) bezeichnet.

Behauptung 2.3.4. *$L(X, Y)$ ist ein Vektorraum, und somit auch X^*.*

Aufgabe 2.3.5. Beweisen Sie Behauptung 2.3.4. Hinweis: Verwenden Sie Satz 2.3.2.

Lösung. Seien S und $T \in L(X, Y)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Wir werden zeigen dass $\lambda S + \mu T$ stetig ist. Dazu seien P bzw. Q die Mengen der Halbnormen, welche die Topologien $\mathfrak{T}_1$, bzw. $\mathfrak{T}_2$ erzeugen. Wegen Satz 2.3.2 genügt es zu zeigen für alle $q \in Q$ eine endliche Menge $F \subset P$ und ein $M > 0$ existieren sodass

$$q((\lambda S + \mu T)(x)) \le M \max_{p \in F} p(x), \qquad x \in X.$$

Weil alle $q \in Q$ Halbnormen sind, gilt die Dreiecksungleichung und positive Homogenität, und die gesuchte Ungleichung folgt. X^* ist ein Spezialfall von $L(X, Y)$ mit $Y = \mathbb{R}$. $\square$

Satz 2.3.6. *Sei $(X, \mathcal{T}_P)$ ein lokalkonvexer Raum. Ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ konvergiert gegen x genau dann wenn für alle $p \in P$ gilt $\lim_i p(x_i - x) = 0$.*

Beweis. Wir nehmen an dass $(x_i) \to x$. Sei nun $p \in P$ fixiert. Weil p nach Lemma 2.3.1 (ii) stetig ist, folgt aus Satz 1.4.13 dass $p(x_i) \to p(x)$.

Sei nun (x_i) ein Netz sodass für alle $p \in P$ gilt $p(x_i - x) \to 0$. Wir zeigen dass $x_i \to x$. Dazu sei wie nach Definition 1.4.5 U eine beliebige Umgebung von x, also existiert eine offene Menge $O \in \mathcal{T}_P$ sodass $x \in O \subset U$. Per Definition von $\mathcal{T}_P$ (siehe Definition 2.2.8) folgt es existiert ein $V \in \mathcal{U}$ sodass $x + V \subset O \subset U$; also existiert eine endliche Menge $F \subset P$ und ein $\varepsilon > 0$ sodass

$$x + V = \{x + y \in X : p(y) \le \varepsilon,\ p \in F\} \subset U. \tag{2.3.4}$$

Für jedes $p \in F$ existiert nach Definition 1.4.5 ein i_p sodass

$$p(x_i - x) \le \varepsilon/2, \qquad i \ge i_p.$$

Weil F endlich ist, existiert nach Definition 1.4.4 ein i_0 sodass

$$\max_{p\in F} p(x_i - x) \le \varepsilon/2, \qquad i \ge i_0.$$

Folglich gilt für alle $i \ge i_0$ dass $x_i - x \in V$, also erhalten wir mit (2.3.4) dass $x_i \in x + V \subset U$, $i \ge i_0$. Weil U beliebig war, folgt die Behauptung. □

Satz 2.3.7. *In lokalkonvexen Räumen ist*

(i) der Abschluss konvexer Mengen konvex,
(ii) der Abschluss absolutkonvexer Mengen absolutkonvex.

Beweis. Wir zeigen zunächst (i). Dazu sei C Teilmenge eine lokalkonvexen Raumes und $x, y \in \overline{C}$. Nach Definition 1.4.7 existieren Netze $(x_i), (y_i)$ mit $x_i, y_i \in C$ für alle i, sodass

$$x_i \to x \qquad \text{und} \qquad y_i \to y.$$

Aus der Konvexität von C folgt

$$\lambda x_i + (1-\lambda) y_i \in C, \qquad 0 \le \lambda \le 1,$$

und aus der Stetigkeit der Vektorraumoperationen erhalten wir

$$\lambda x_i + (1-\lambda) y_i \to \lambda x + (1-\lambda) y \in \overline{C}.$$

Der Beweis für (ii) verläuft analog. □

Aufgabe 2.3.8. Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 2.3.7.

Satz 2.3.9 (Satz von Hahn-Banach – Fortsetzungsversion)**.** *Sei $(X, \mathcal{T}_P)$ ein lokalkonvexer Raum und $U \subset X$ ein Untervektorraum, ausgestattet mit der von $\mathcal{T}_P$ erzeugten Relativtopologie $\mathcal{R}$ auf U. Dann existiert für jedes $\ell \in U^*$ eine stetige Fortsetzung L von ℓ, also $L|_U = \ell$ und $L \in X^*$.*

Beweis. Wir bemerken zunächst dass die Topologie $\mathcal{R}$ durch $\{p|_U : p \in P\}$ erzeugt wird. Wegen $\ell \in U^*$ stetig ist, so existieren nach Satz 2.3.2 (iv) $n \in \mathbb{N}$, $p_1, \dots, p_n \in P$ und $M > 0$ sodass

$$|\ell(x)| \le M \max_{1\le i\le n} p_i(x), \qquad x \in U.$$

Wir definieren die stetige Halbnorm $p : X \to [0, \infty)$ durch

$$p(x) = M \max_{1\le i\le n} p_i(x), \qquad x \in X,$$

wobei $M = \max_{1\le i\le n} M_i$. Dann gilt

$$|\ell(x)| \le p(x), \qquad x \in X.$$

Nach dem Satz von Hahn-Banach Satz 1.1.2 existiert eine lineare Abbildung $L : X \to \mathbb{R}$ mit

$$L|_U = \ell \qquad \text{und} \qquad L(x) \le p(x),\ x \in X.$$

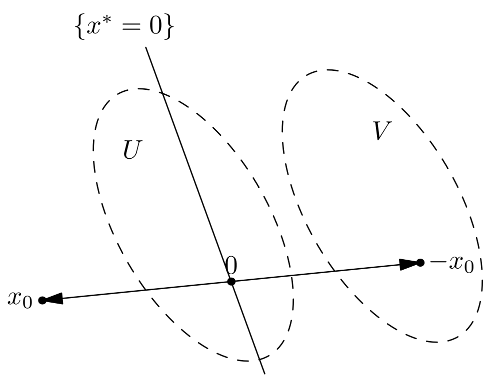

ABBILDUNG 2.3.1. Darstellung von V, U und x_0.

Weil $p(-x) = p(x)$ so gilt

$$|L(x)| \leq p(x) = M \max_{1 \leq i \leq n} p_i(x), \qquad x \in X$$

also folgt mit Satz 2.3.2 (iv) die Behauptung. □

Aufgabe 2.3.10. Zeigen Sie dass die Topologie $\mathcal{R}$ durch $\{p|_U : p \in P\}$ erzeugt wird. Zeigen Sie dass p eine stetige Halbnorm auf X definiert.

Lemma 2.3.11. *Sei $(X, \mathcal{T}_P)$ ein lokalkonvexer Raum, $V \subset X$ konvex, offen und $0 \notin V$. Dann existiert ein $x^* \in (X, \mathcal{T}_P)^*$, sodass*

$$x^*(v) < 0, \qquad v \in V.$$

BEWEIS. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Lemma 1.3.1. Sei $x_0 \in X$ so, dass $-x_0 \in V$. Wir definieren die offene und konvexe Menge $U = V + x_0$, und stellen fest dass $0 \in U$ und $x_0 \notin U$ (siehe Figure 2.3.1). Weil $0 \in U$ existiert per Definition von Offenheit eine Menge $W \in \mathfrak{U}$ sodass $W \subset U$. Nach Aufgabe 2.3.12 ist p_W eine stetige Halbnorm auf X, und nach Aufgabe 1.3.3 ist p_U eine sublineare Abbildung mit $p_U(x_0) \geq 1$. Auf dem Unterraum $Y = \operatorname{span}\{x_0\}$ definieren wir das lineare Funktional y^* durch

$$y^*(tx_0) = tp_U(x_0), \qquad t \in \mathbb{R},$$

und stellen fest, dass für alle $y \in Y$ gilt $y^*(y) \leq p_U(y)$. Mit Satz 1.1.2 erhalten wir eine lineare Fortsetzung $x^* : X \to \mathbb{R}$ mit

$$x^*(x) \leq p_U(x) \leq p_W(x), \qquad x \in X.$$

Die letzte Ungleichung gilt aufgrund der Inklusion $W \subset U$. Weil p_W eine stetige Halbnorm auf X ist, erhalten wir daraus mit Lemma 2.3.1 (iii)

$$|x^*(x)| \leq p_W(x) \leq C \max_{p \in F} p(x), \qquad x \in X,$$

wobei $F \subset P$ endlich ist und $C > 0$. Mit Satz 2.3.2 folgt die Stetigkeit von x^* bezüglich $\mathcal{T}_P$, also $x^* \in (X, \mathcal{T}_P)^*$.

Wir zeigen nun dass $p_U(x) < 1$, falls $x \in U$. Dazu nehmen wir an es gibt ein $x \in U$ sodass $p_U(x) \geq 1$, i.e. für alle $0 < \lambda < 1$ folgt $\frac{x}{\lambda} \notin U$. Also gilt für $x_n = \frac{x}{1-\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$, dass $x_n \in U^c$. Mit Satz 2.3.6 folgt $x_n \to x$, also erhalten wir aus der Abgeschlossenheit von U^c und Aufgabe 1.4.8 dass $x \in U^c$; ein Widerspruch.

Für jedes $v \in V$ existiert ein $u \in U$, sodass $v = u - x_0$, also

$$x^*(v) = x^*(u) - x^*(x_0) \leq p_U(u) - y^*(x_0) < 0.$$

Die letzte Ungleichung gilt, weil $y^*(x_0) \geq 1$ (warum?) und wir soeben gezeigt haben dass $p_U(u) < 1$, $u \in U$. □

Aufgabe 2.3.12. Zeigen Sie: für jedes $W \in \mathcal{U}$ ist p_W eine stetige Halbnorm. Verwenden Sie Lemma 2.2.3.

Satz 2.3.13. *Sei $(X, \mathcal{T}_P)$ ein lokalkonvexer Raum, $V_1, V_2 \subset X$ disjunkt, konvex und sei V_1 offen. Dann existiert ein $x^* \in (X, \mathcal{T}_P)^*$ mit*

$$x^*(v_1) < x^*(v_2), \qquad v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2.$$

Aufgabe 2.3.14. Beweisen Sie Satz 2.3.13. Reproduzieren Sie den Beweis von Satz 1.3.2.

Satz 2.3.15. *Sei $(X, \mathcal{T}_P)$ ein lokalkonvexer Raum, $V \subset X$ eine $\mathcal{T}_P$-abgeschlossene konvexe Menge, und sei $x_0 \notin V$. Dann existieren ein $x^* \in (X, \mathcal{T}_P)^*$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass*

$$x^*(v) \le \alpha < x^*(x_0), \qquad v \in V.$$

Beweis. Weil V abgeschlossen ist, finden wir ein $U \in \mathcal{U}$ mit $(x_0 + U) \cap V = \emptyset$. Es existiert ein endliches $F \subset P$ und ein $\varepsilon > 0$ sodass $U = \{x \in X : p(x) \le \varepsilon,\ p \in F\}$. Definieren nun die offene Nullumgebung W als

$$W = \{x \in X : p(x) < \varepsilon,\ p \in F\},$$

dann gilt natürlich erst recht $(x_0 + W) \cap V = \emptyset$. Mit Satz 2.3.13 erhalten wir ein $x^* \in (X, \mathcal{T}_P)^*$ sodass

$$x^*(v) < x^*(x_0) + x^*(w), \qquad v \in V,\ w \in W. \tag{2.3.5}$$

Mit Satz 2.3.2 finden wir eine endliche Menge $G \subset P$ und eine Konstante $C > 0$ sodass

$$|x^*(x)| \le C \max_{p \in G} p(x), \qquad x \in X. \tag{2.3.6}$$

Setzen wir $\widetilde{W} = \{x \in X : p(x) \le 1,\ p \in G\}$, so ist $|x^*(w)| \le C$, $w \in \widetilde{W}$, und somit gilt

$$x^*(v) \le x^*(x_0) + \inf_{w \in \widetilde{W} \cap W} x^*(w), \qquad v \in V.$$

Sobald wir gezeigt haben $-\infty < \inf_{w \in \widetilde{W} \cap W} x^*(w) < 0$ ist der Beweis zu Ende. Wegen (2.3.6), der Linearität von x^* und weil $-(\widetilde{W} \cap W) = \widetilde{W} \cap W$ gilt zunächst $-C \le \inf_{w \in \widetilde{W} \cap W} x^*(w) \le 0$. Wir nehmen nun an dass $\inf_{w \in \widetilde{W} \cap W} x^*(w) \ge 0$. Sei nun $x \in X$ fixiert. Weil $\widetilde{W} \cap W$ absorbierend ist, existiert für jedes $x \in X$ ein $\lambda > 0$ sodass $\frac{x}{\lambda} \in \widetilde{W} \cap W$. Also ist nach Annahme $x^*(\frac{x}{\lambda}) \ge 0$ und somit $x^*(x) \ge 0$. Das gleiche Argument für $-x$ ergibt dann $x^*(x) = 0$, also muss x^* identisch 0 sein; ein Widerspruch zu (2.3.5). □

KAPITEL 3

Distributionen

3.1. Funktionenräume

Die Idee von Distributionen besteht darin Funktionen f als Funktionale T_f gegeben durch

$$T_f(\varphi) = \int f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

auf geeigneten Funktionenräumen aufzufassen.

Beispiel. Für die "Deltafunktion" $\delta : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$, wobei $\delta(x) = 0$, $x \neq 0$ und $\int_{\mathbb{R}} \delta = 1$, gilt

$$\varphi(0) = \int_{\mathbb{R}} \delta(x)\,\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

für geeignete Funktionen φ.

Im Folgenden werden wir diese Idee präzisieren.

Definition 3.1.1. Sei Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

(a) Der Vektorraum $C^\infty(\Omega)$ der *glatten Funktionen* auf Ω ist gegeben durch

$$C^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist unendlich oft differenzierbar}\}.$$

(b) Sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $f \in C^\infty(\Omega)$. Wir definieren $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$ und

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}} f,$$

wobei ∂_j die partielle Ableitung nach der j-ten Koordinate bezeichnet. Ein $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ heißt *Multiindex*.

Definition 3.1.2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $K \subset \Omega$ kompakt.

(a) Wir definieren den Vektorraum $\mathcal{D}_K(\Omega)$ als

$$\mathcal{D}_K(\Omega) = \big\{\varphi : \Omega \to \mathbb{C} \mid \varphi \in C^\infty(\Omega),\ \operatorname{supp}(\varphi) \subset K\big\}.$$

(b) Für jeden Multiindex α definieren wir die Halbnorm $p_\alpha : \mathcal{D}_K(\Omega) \to [0, \infty)$ auf $\mathcal{D}_K(\Omega)$ durch

$$p_\alpha(\varphi) = \sup_{x \in \Omega} \big|\big(D^\alpha \varphi\big)(x)\big|, \qquad \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega).$$

(c) Die von der Menge $P_K = \{p_\alpha : \alpha \text{ Multiindex}\}$ erzeugte lokalkonvexe Topologie auf $\mathcal{D}_K(\Omega)$ bezeichnen wir mit $\mathcal{T}_K$.

Aufgabe 3.1.3. Zeigen Sie: $\mathcal{D}_K(\Omega)$ ist ein Vektorraum und p_α definiert eine Halbnorm auf $\mathcal{D}_K(\Omega)$.

Wir kommen nun zur Definition des Raums der Testfunktionen $\mathcal{D}(\Omega)$ der aus kompakt getragenen Funktionen besteht, und mit einer zu $\mathcal{T}_K$ kompatiblen Topologie ausgestattet sein wird (siehe Lemma 3.1.9).

Definition 3.1.4. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir definieren den Vektorraum der *Testfunktionen* $\mathcal{D}(\Omega)$ durch

$$\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{\substack{K \subset \Omega \\ K \text{ kompakt}}} \mathcal{D}_K(\Omega).$$

Die Familie von Halbnormen

$$P = \left\{ p : \mathcal{D}(\Omega) \to [0,\infty) \middle| \begin{array}{c} p \text{ ist eine Halbnorm} \\ p|_{\mathcal{D}_K(\Omega)} \text{ ist stetig bezüglich } \mathcal{T}_K \\ \text{für alle } K \subset \Omega \text{ kompakt} \end{array} \right\}$$

erzeugt auf $\mathcal{D}(\Omega)$ eine lokalkonvexe Topologie welche mit $\mathcal{T}$ bezeichnet wird.

Aufgabe 3.1.5. Zeigen Sie dass $\mathcal{D}(\Omega)$ eine Vektorraum, und $\mathcal{T}$ eine lokalkonvexe Topologie auf $\mathcal{D}(\Omega)$ ist.

Satz 3.1.6. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \le p < \infty$, dann liegt $\mathcal{D}(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$.*

Beweis. Wir definieren zunächst die Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ durch

$$\varphi(x) = \begin{cases} c_n \exp(\frac{1}{|x|^2-1}) & |x| < 1, \\ 0 & |x| \ge 1, \end{cases}$$

wobei wir c_n so wählen dass $\int \varphi = 1$. Eine elementare Rechnung (siehe Aufgabe 3.1.7) zeigt dass die auf der kompakten Einheitskugel getragene Funktion φ unendlich oft differenzierbar ist. Für jedes $\varepsilon > 0$ setzen wir nun $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to [0, 1\infty)$, $\varphi(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$, und es folgt aus der Transformationsformel dass $\int \varphi_\varepsilon = \int \varphi = 1$, $\varepsilon > 0$.

Sei $f \in L^p(\Omega)$ fixiert. Wir definieren die kompakten Mengen

$$K_m = \{x \in \Omega : |x| \le m,\ \operatorname{dist}(x, \Omega^c) \ge \tfrac{2}{m}\}, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Man kann sich leicht überlegen dass $\bigcup_{m=1}^\infty K_m = \Omega$ (wir verweisen auf den Beweis von Satz 3.1.10, in welchem etwas mehr gezeigt wird). Jedenfalls folgt aus dem Satz von Beppo Levi

$$\int_{K_m} |f(x)|^p \,\mathrm{d}x \to \int_\Omega |f(x)|^p \,\mathrm{d}x, \qquad m \to \infty.$$

Als nächstes definieren wir die Funktionen $f_m : \Omega \to \mathbb{C}$ durch

$$f_m(x) = \int_{K_m} f(y)\varphi_{1/m}(x-y)\,\mathrm{d}y, \qquad x \in K_m,$$

und $f_m(x) = 0$, $x \in \Omega \setminus K_m$. Man kann zeigen dass $f_m \in \mathcal{D}(\Omega)$ und dass

$$\|f_m - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0, \qquad m \to \infty, \tag{3.1.1}$$

siehe Aufgabe 3.1.8. □

Aufgabe 3.1.7. Zeigen Sie dass φ unendlich of differenzierbar ist.

Aufgabe 3.1.8. Zeigen Sie: f_m ist in $\mathcal{D}(\Omega)$ und es gilt (3.1.1).
Hinweis: Zeigen Sie die Aussage zuerst für charakteristische Funktionen $f = \chi_A$, wobei $A \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränkter Würfel sein soll, und finden Sie dabei eine geeignete Majorante für $|f_m(x) - f(x)|$.

Lemma 3.1.9. *Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $K \subset \Omega$ kompakt, so gilt:*

(i) Die Relativtopologie von $\mathcal{T}$ auf $\mathcal{D}_K(\Omega)$ stimmt mit $\mathcal{T}_K$ überein.
(ii) $\mathcal{D}_K(\Omega)$ ist $\mathcal{T}$-abgeschlossen in $\mathcal{D}(\Omega)$.
(iii) Sei Y ein lokalkonvexer Raum und $L : \mathcal{D}(\Omega) \to Y$ linear. Dann ist L genau dann $\mathcal{T}$ stetig wenn für alle kompakten $K' \subset \Omega$ gilt $L|_{\mathcal{D}_{K'}(\Omega)}$ ist $\mathcal{T}_{K'}$-stetig.

Beweis. (i) Sei $K_0 \subset \Omega$ kompakt. Wir erinnern daran dass die Relativtopologie von $\mathcal{T}$ auf $\mathcal{D}_{K_0}$ gegeben ist durch $\mathcal{T}|\mathcal{D}_{K_0}(\Omega) = \{O \cap \mathcal{D}_{K_0}(\Omega) : O \in \mathcal{T}\}$. Wir müssen zeigen dass gilt

$$\mathcal{T}|\mathcal{D}_{K_0}(\Omega) = \mathcal{T}_{K_0}.$$

Wir zeigen zuerst $\mathcal{T}|\mathcal{D}_{K_0}(\Omega) \subset \mathcal{T}_{K_0}$. Dazu sei $O \in \mathcal{T}$ und $\varphi_0 \in O \cap \mathcal{D}_{K_0}$ fixiert. Per Definition von $\mathcal{T}$ existiert eine endliche Menge $F \subset P$ und ein $\varepsilon > 0$ sodass für V gegeben durch

$$V = \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : p(\varphi) \leq \varepsilon,\ p \in F\} \qquad \text{gilt} \qquad \varphi_0 + V \subset O. \tag{3.1.2}$$

Weil per Definition von P für jedes $p \in F$ gilt dass $p|_{\mathcal{D}_{K_0}(\Omega)}$ stetig ist, folgt aus Lemma 2.3.1 (iii) die Existenz von $0 \leq M < \infty$ und $G \subset P_{K_0}$ sodass

$$\max_{p\in F} p|_{\mathcal{D}_{K_0}(\Omega)}(\varphi) \leq M \max_{q\in G} q(\varphi), \qquad \varphi \in \mathcal{D}_{K_0}(\Omega). \tag{3.1.3}$$

Definieren wir die Menge U durch

$$U = \{\varphi \in \mathcal{D}_{K_0}(\Omega) : q(\varphi) \leq \varepsilon/M,\ q \in G\}$$

dann ist U eine Nullumgebung bezüglich $\mathcal{T}_{K_0}$, und mit (3.1.3) gilt $U \subset V$. Aus (3.1.2) folgt dann $\varphi_0 + U \subset O$, und weil $\varphi_0 \in \mathcal{D}_{K_0}(\Omega)$ beliebig war, haben wir gezeigt dass $\mathcal{T}|\mathcal{D}_{K_0}(\Omega) \subset \mathcal{T}_{K_0}$.

Um die verbleibende Inklusion zu zeigen, definieren wir zunächst für jeden Multiindex α die Halbnorm $q_\alpha : \mathcal{D}(\Omega) \to [0,\infty)$ durch $q_\alpha(\varphi) = \sup_{x\in\Omega} \left|\left(D^\alpha\varphi\right)(x)\right|$. Dann ist klar dass $q_\alpha|_{\mathcal{D}_K} = p_\alpha$ für jedes kompakte $K \subset \Omega$, und weil p_α nach Lemma 2.3.1 (ii) stetig bezüglich $\mathcal{T}_K$ ist, so ist $q_\alpha \in P$. Sei nun $O \in \mathcal{T}_{K_0}$ und $\varphi_0 \in O$. Dann existiert per Definition von $\mathcal{T}_{K_0}$ ein $m \in \mathbb{N}$, Multiindizes $\alpha^1, \dots, \alpha^m$ und ein $\varepsilon > 0$ sodass für U gegeben durch

$$U = \{\varphi \in \mathcal{D}_{K_0}(\Omega) : p_{\alpha^j}(\varphi) \leq \varepsilon,\ 1 \leq j \leq m\} \qquad \text{gilt} \qquad \varphi_0 + U \subset O.$$

Dann gilt für die Menge V definiert durch

$$V = \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : q_{\alpha^j}(\varphi) \leq \varepsilon,\ 1 \leq j \leq m\}$$

dass V eine Nullumgebung bezüglich $\mathcal{T}$ ist, und dass $V \cap \mathcal{D}_{K_0}(\Omega) = U$.

(ii) Für jedes $x \in \Omega$ definieren wir die Abbildung $\pi_x : \mathcal{D}(\Omega) \to [0,\infty)$, $\pi_x(\varphi) = |\varphi(x)|$. Klarerweise ist π_x eine Halbnorm, und weil $\pi_x|_{\mathcal{D}_K(\Omega)}(\varphi) \leq p_{(0,\dots,0)}(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, so ist π_x nach Lemma 2.3.1 (iii) $\mathcal{T}_K$-stetig, also $\pi_x \in P$. Mit Lemma 2.3.1 (ii) folgt dann π_x ist $\mathcal{T}$-stetig. Weil $\{0\} \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen ist, so ist $\pi_x^{-1}(\{0\})$ nach Satz 1.4.11 $\mathcal{T}$-abgeschlossen, also auch $\bigcap_{x\in\Omega\setminus K} \pi_x^{-1}(\{0\})$. Schließlich stellen wir fest dass

$$\bigcap_{x\in\Omega\setminus K} \pi_x^{-1}(\{0\}) = \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \pi_x(\varphi) = 0,\ x \in \Omega \setminus K\} = \mathcal{D}_K(\Omega).$$

(iii) Sei L $\mathcal{T}$-stetig ist und sei $K' \subset \Omega$ kompakt. Dann gilt $L|_{\mathcal{D}_{K'}(\Omega)}$ ist $\mathcal{T}|\mathcal{D}_{K'}(\Omega)$-stetig, und die Behauptung folgt mit (i).

Nun sei $L|_{\mathcal{D}_{K'}}$ für alle kompakten Mengen $K' \subset \Omega$ eine $\mathcal{T}_{K'}$-stetige, lineare Abbildung, und q eine stetige Halbnorm auf Y. Wir definieren nun $p = q \circ T : \mathcal{D}(\Omega) \to [0,\infty)$, also gilt für alle kompakten Mengen $K' \subset \Omega$ dass $p|_{\mathcal{D}_{K'}} = q \circ T_{\mathcal{D}_{K'}}$ als Komposition von stetigen Abbildungen $\mathcal{T}_{K'}$-stetig ist. Demzufolge liegt p in P, also ist p nach Lemma 2.3.1 (ii) $\mathcal{T}$-stetig. Weil q beliebig war folgt mit Satz 2.3.2 (iii) die Behauptung.

□

Satz 3.1.10. *Sei $m \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ offen. Sei $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $\varphi_n \to 0$ bezüglich $\mathcal{T}$.

(ii) Es exisitert eine kompakte Menge $K \subset \Omega$ sodass $\{\varphi_n\}_n \subset \mathcal{D}_K(\Omega)$ und $\varphi_n \to 0$ bezüglich $\mathcal{T}_K$.

(iii) Es exisitert eine kompakte Menge $K \subset \Omega$ sodass $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subset K$, $n \in \mathbb{N}$ und für alle Multiindizes α konvergiert $(D^\alpha\varphi_n)_n$ gleichmäßig gegen 0.

Beweis. Sei $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ fixiert. Wir zeigen zuerst (ii)⇔(iii). Nach Satz 2.3.6 gilt $\varphi_n \to 0$ in $\mathcal{T}_K$ genau dann wenn für jedes $p \in P_K$ gilt $p(\varphi_n) \to 0$. Daraus folgt sofort die Behauptung.

Als nächstes zeigen wir (ii)⇒(i). Sei $K \subset \Omega$ kompakt sodass $\{\varphi_n\}_n \subset \mathcal{D}_K(\Omega)$ und $\varphi_n \to 0$ in $\mathcal{T}_K$. Nach Satz 2.3.6 müssen wir zeigen dass für alle $q \in P$ gilt dass $q(\varphi_n) \to 0$. Sei dazu $q \in P$ fixiert. Weil $q|_{\mathcal{D}_K(\Omega)}$ $\mathcal{T}_K$-stetig ist, folgt aus Lemma 2.3.1 (iii) die Existenz eines $0 \leq M < \infty$ und einer endlichen Menge $F \subset P_K$ sodass

$$q(\varphi) = q|_{\mathcal{D}_K(\Omega)}(\varphi) \leq M \max_{p \in F} p(\varphi), \qquad \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega).$$

Weil F endlich ist, folgt aus Satz 2.3.6 dass $\max_{p \in F} p(\varphi_n) \to 0$, und mit der obigen Ungleichung auch $q(\varphi_n) \to 0$.

Schließlich zeigen wir (i)⇒(ii). Angenommen $\varphi_n \to 0$ in $\mathcal{T}$, und für jede kompakte Menge $K \subset \Omega$ gilt $\{\varphi_n\}_n \not\subset \mathcal{D}_K(\Omega)$. Wir wählen nun induktiv eine Folge von kompakten Mengen K_n, $n \in \mathbb{N}$. Wir beginnen die Induktion indem wir $n_1 = 1$ setzen, und ein $r_1 \geq 1$ so wählen dass

$$\operatorname{supp}(\varphi_{n_1}) \subset K_1 := \big(\Omega^c + B(0, \tfrac{1}{r_1})\big)^c \cap \overline{B}(0, r_1),$$

wobei $B(z_0, \delta)$ die offene Kugel in $\mathbb{R}^m$ um z_0 mit Radius δ bezeichnet. (Wir zeigen im Induktionsschritt dass so eine Wahl von r_1 möglich ist.) Angenommen wir hätten Zahlen $n_1 < n_2 < \ldots < n_{i-1}$, $r_1 < r_2 < \cdots < r_{i-1}$ und kompakte Mengen $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_{i-1}$ so konstruiert dass

$$r_j \geq j, \qquad K_j = \big(\Omega^c + B(0, \tfrac{1}{r_j})\big)^c \cap \overline{B}(0, r_j), \qquad 1 \leq j \leq i-1,$$
$$\operatorname{supp}(\varphi_{n_j}) \subset K_j,\ 1 \leq j \leq i-1, \qquad \text{und} \qquad \operatorname{supp}(\varphi_{n_{j+1}}) \not\subset K_j,\ 1 \leq j \leq i-2.$$

Weil K_{i-1} kompakt ist, so existiert aufgrund unserer Annahme ein Index $n_i > n_{i-1}$ für den gilt $\operatorname{supp}(\varphi_{n_i}) \not\subset K_{i-1}$. Wir wählen $r_i \geq i$ so dass

$$\operatorname{supp}(\varphi_{n_i}) \subset K_i := \big(\Omega^c + B(0, \tfrac{1}{r_i})\big)^c \cap \overline{B}(0, r_i).$$

Wir zeigen nun dass so eine r_i existiert. Dazu zeigen wir zunächst dass ein $k \in \mathbb{N}$ existiert sodass

$$\operatorname{supp}(\varphi_{n_i}) \subset \big(\Omega^c + B(0, \frac{1}{k})\big)^c.$$

Angenommen die Behauptung wäre falsch, dann gilt

$$\operatorname{supp}(\varphi_{n_i}) \cap \big(\Omega^c + B(0, \frac{1}{k})\big) \neq \emptyset, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Also existiert für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein a_k in dem Kompaktum $\operatorname{supp}(\varphi_{n_i})$, für das gilt $\operatorname{dist}(a_k, \Omega^c) \leq \frac{1}{k}$. Aufgrund der Kompaktheit konvergiert eine Teilfolge von $\{a_k\}$ gegen $a \in \operatorname{supp}(\varphi_{n_i})$ und es gilt $\operatorname{dist}(a, \Omega^c) = 0$. Weil Ω^c abgeschlossen ist folgt $a \in \Omega$ und damit der Widerspruch $\operatorname{supp}(\varphi_{n_i}) \cap \Omega^c \neq \emptyset$. Also wissen wir es existiert ein $k \in \mathbb{N}$ sodass $\operatorname{supp}(\varphi_{n_i}) \subset \big(\Omega^c + B(0, \frac{1}{k})\big)^c$, und wir wählen $r_i \geq \max(i, k)$ so dass $\operatorname{supp}(\varphi_{n_i}) \subset B(0, r_i)$. Wir haben also gezeigt es existiert eine Folge $\{r_j\}$ mit $r_j \to \infty$ und kompakte Mengen $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset \Omega$ sodass

$$\operatorname{supp}(\varphi_{n_j}) \subset K_j = \big(\Omega^c + B(0, \tfrac{1}{r_j})\big)^c \cap \overline{B}(0, r_j) \qquad \text{und} \qquad \operatorname{supp}(\varphi_{n_{j+1}}) \not\subset K_j. \tag{3.1.4}$$

Wir zeigen nun dass aus (3.1.4) folgt

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} \operatorname{int} K_j = \Omega. \tag{3.1.5}$$

Einerseits ist klar dass die Vereinigung in Ω liegt. Andererseits, sei $x \in \Omega$, dann existiert ein $\delta > 0$ sodass $B(x, \delta) \subset \Omega$. Sei nun j_0 so dass $r_{j_0} \geq \frac{4}{\delta}$ und so dass $B(0, r_j) \supset B(x, \delta)$, dann gilt

$$B(x, \delta/4) \cap \big(\Omega^c + B(0, \tfrac{1}{r_j})\big) = \emptyset.$$

Angenommen es gäbe ein $y \in \Omega^c$ und ein $z \in B(0, \frac{1}{r_{j_0}})$ sodass $|y + z - x| < \delta/4$, dann wäre $|y - x| \leq |y + z - x| + |z| < \delta/2$, also $y \in B(x, \delta) \subset \Omega$, was unmöglich ist. Also folgt

$$B(x, \delta/4) \subset \big(\Omega^c + B(0, \tfrac{1}{r_{j_0}})\big)^c \cap B(0, r_{j_0}) \subset K_{j_0},$$

also ist x ein innerer Punkt von K_{j_0}, und weil $x \in \Omega$ beliebig war, ist (3.1.5) gezeigt.

Wir wählen nun eine Folge $\{x_j\}_j$ mit $x_j \in K_{j+1} \setminus K_j$, $j \in \mathbb{N}$ sodass $\alpha_j := |\varphi_{n_{j+1}}(x_j)| > 0$. Wir definieren wie im Beweis von Lemma 3.1.9 die Funktionen $\pi, \pi_j : \mathcal{D}(\Omega) \to [0, \infty)$ durch

$$\pi_j(\varphi) := |\varphi(x_j)|\alpha_j^{-1} \quad \text{und} \quad \pi := \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j.$$

Im Beweis von Lemma 3.1.9 haben wir gezeigt dass π_j für jedes $j \in \mathbb{N}$ eine $\mathcal{T}$-stetige Halbnorm auf $\mathcal{D}(\Omega)$ ist. Wir werden nun zeigen, dass auch π wohldefiniert, und eine $\mathcal{T}$-stetige Halbnorm auf $\mathcal{D}(\Omega)$ ist.

Sei $K \subset \Omega$ kompakt. Wir zeigen dass K in einem der K_j, $j \in \mathbb{N}$ enthalten ist. Angenommen, $K \not\subset \operatorname{int} K_j$, $j \in \mathbb{N}$, also $K \cap (\operatorname{int} K_j)^c \neq \emptyset$, $j \in \mathbb{N}$. Weil $K \cap (\operatorname{int} K_j)^c$ kompakt und fallend (K_j ist wachsend, und somit auch $\operatorname{int} K_j$) ist, folgt der Widerspruch

$$\emptyset \neq \bigcap_{j=1}^{\infty} K \cap (\operatorname{int} K_j)^c = K \Big\backslash \bigcup_{j=1}^{\infty} \operatorname{int} K_j = \emptyset.$$

Also liegt jede kompakte Menge $K \subset \Omega$ in einem der K_j, $j \in \mathbb{N}$. Daraus folgt dass für alle $j > j_0$ gilt $x_j \notin K_{j_0}$ und somit $\pi_j|_{\mathcal{D}_{K_{j_0}}} = 0$. Daher sind für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ nur endlich viele π_j verschieden von 0. Insbesondere ist π eine wohldefinierte Halbnorm, und es gilt

$$\pi|_{\mathcal{D}_K(\Omega)} = \sum_{j=1}^{k} \pi_j|_{\mathcal{D}_K(\Omega)}, \qquad \text{falls } K \subset K_k.$$

Im Beweis von Lemma 3.1.9 haben wir gezeigt dass $\pi_j|_{\mathcal{D}_K(\Omega)}$ für jedes kompakte $K \subset \Omega$ eine $\mathcal{T}_K$ stetige Halbnorm ist, also impliziert die obige Identität $\pi|_{\mathcal{D}_K(\Omega)} \in P$. Mit Lemma 2.3.1 (ii) folgt die $\mathcal{T}$-Stetigkeit von π.

Einerseits folgt aus der $\mathcal{T}$-Stetigkeit von π und der Konvergenz $\varphi_n \to 0$ bezüglich $\mathcal{T}$ dass $\pi(\varphi_{n_j}) \to 0$. Andererseits ist

$$\pi(\varphi_{n_{j+1}}) \geq \pi_j(\varphi_{n_{j+1}}) = 1, \qquad j \in \mathbb{N},$$

was einen Widerspruch darstellt. □

Definition 3.1.11. Der Dualraum von $(\mathcal{D}(\Omega), \mathcal{T})$ wird mit $\mathcal{D}^*(\Omega)$ bezeichnet und heißt *Raum der Distributionen* auf Ω, seine Elemente heißen *Distributionen*.

Satz 3.1.12. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für eine lineare Abbildung $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ sind äquivalent:*

(i) $T \in \mathcal{D}^*(\Omega)$.

(ii) Für alle kompakten $K \subset \Omega$ gilt $T|_{\mathcal{D}_K(\Omega)} \in \big(\mathcal{D}_K(\Omega)\big)^*$.

(iii) Für alle kompakten $K \subset \Omega$ existieren $m \in \mathbb{N}_0$ und $C \geq 0$ sodass für alle $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ gilt

$$\big|T(\varphi)\big| \leq C\, p_m(\varphi) = C \max_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} \big|\big(D^\alpha \varphi\big)(x)\big|.$$

(iv) Falls $\varphi_n \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ bezüglich $\mathcal{T}$, so folgt $T(\varphi_n) \to 0$ in $\mathbb{C}$.

Beweis. Die Äquivalenz von (i) und (ii) folgt aus Lemma 3.1.9 (iii). Mit Satz 2.3.2 erhalten wir die Äquivalenz von (ii) und (iii). Weil Folgen eine Spezialisierung von Netzen sind, folgt mit Satz 1.4.13 die Implikation (i)⇒(iv).

Wir werden nun den Satz beweisen indem wir die Implikation (iv)⇒(ii) zeigen. Diese Implikation sagt aus, dass aus Folgenstetigkeit topologische Stetigkeit folgt (was allgemein nicht der Fall ist). Wir beweisen, dass die Topologie $\mathcal{T}_K$ für jedes kompakte $K \subset \Omega$ von einer Metrik erzeugt wird (man sagt die Topologie $\mathcal{T}_K$ ist metrisierbar). Weil in metrischen Räumen Folgenstetigkeit äquivalent zur topologischen Stetigkeit ist, folgt daraus die Behauptung.

Sei p_m, $m \in \mathbb{N}$ eine Aufzählung der Halbnormen p_α, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex. Dann definieren wir die Abbildung $d : \mathcal{D}(\Omega)^2 \to [0,\infty)$ durch

$$(\varphi,\psi) \mapsto \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} \frac{p_m(\varphi-\psi)}{1+p_m(\varphi-\psi)}.$$

Man sieht sofort dass d wohldefiniert ist.

Schritt 1. In diesem Schritt zeigen wir dass d eine Metrik auf $\mathcal{D}(\Omega)$ ist. Offen sichtlich ist $d(\varphi,\varphi)=0$ und $d(\varphi,\psi)=d(\psi,\varphi)$. Sei nun $d(\varphi,\psi)=0$, dann ist $p_m(\varphi-\psi)=0$, $m\in\mathbb{N}$, also gilt insbesondere $\sup_{x\in\Omega}|\varphi(x)-\psi(x)|=0$, und somit $\varphi=\psi$. Wir müssen also nur mehr die Dreiecksungleichung zeigen.

Bevor wir damit beginnen, stellen wir fest dass

$$t \mapsto \frac{t}{1+t} = \frac{1}{1+\frac{1}{t}} \quad \text{monoton wachsend in } t \geq 0 \text{ ist.}$$

Nun seien $\varphi,\psi,\vartheta \in \mathcal{D}(\Omega)$ fixiert, dann gilt wegen $p_m(\varphi-\vartheta) \leq p_m(\varphi-\psi)+p_m(\psi-\vartheta)$, $m\in\mathbb{N}$ dass

$$d(\varphi,\vartheta) \leq \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} \frac{p_m(\varphi-\psi)+p_m(\psi-\vartheta)}{1+p_m(\varphi-\psi)+p_m(\psi-\vartheta)} \leq \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} \left(\frac{p_m(\varphi-\psi)}{1+p_m(\varphi-\psi)} + \frac{p_m(\psi-\vartheta)}{1+p_m(\psi-\vartheta)} \right).$$

Klarerweise ist der letzte Ausdruck gleich $d(\varphi,\psi)+d(\psi,\vartheta)$, also handelt es sich bei d tatsächlich um eine Metrik auf $\mathcal{D}(\Omega)$.

Schritt 2. Hier zeigen wir dass für jedes kompakte $K \subset \Omega$ die Metrik $d|_{\mathcal{D}_K(\Omega)}$ die Topologie $\mathcal{T}_K$ erzeugt, d.h. die bezüglich der Metrik $d|_{\mathcal{D}_K(\Omega)}$ offenen Mengen sind genau die Mengen in $\mathcal{T}_K$. Sei dazu $K\subset\Omega$ eine beliebige kompakte Menge.

Wir zeigen zuerst dass wann immer O offen bezüglich $d|_{\mathcal{D}_K(\Omega)}$ ist, so ist $O \in \mathcal{T}_K$. Sei dazu $\varphi \in O$ fixiert. Wir wissen dass ein $\varepsilon>0$ existiert sodass

$$B_K(\varphi,\varepsilon) := \{\psi \in \mathcal{D}_K(\Omega) : d(\varphi,\psi)<\varepsilon\} \subset O.$$

Wir wählen nun $m_0 \in \mathbb{N}$ so dass $\sum_{m=m_0+1}^{\infty} 2^{-m} < \varepsilon/2$. Dann gilt für alle $\psi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ dass

$$\sum_{m=1}^{m_0} 2^{-m} \frac{p_m(\varphi-\psi)}{1+p_m(\varphi-\psi)} < \varepsilon/2 \qquad \text{impliziert} \qquad \psi \in B_K(\varphi,\varepsilon).$$

Wir definieren die Nullumgebung U durch

$$U = \{\psi \in \mathcal{D}_K(\Omega) : p_m(\psi) \leq \varepsilon/2,\ 1\leq m\leq m_0\},$$

und stellen fest dass

$$\varphi + U \subset B_K(\varphi,\varepsilon) \subset O.$$

Weil φ beliebig war, folgt $O \in \mathcal{T}$.

Sei nun umgekehrt $O \in \mathcal{T}_K$ und $\varphi \in O$. Dann wissen wir dass eine endliche Teilmenge $F \subset P_K$ und ein $\varepsilon>0$ existieren sodass $\varphi + U_{F,\varepsilon} \subset O$, wobei

$$U_{F,\varepsilon} = \{\psi \in \mathcal{D}(\Omega) : p(\psi) \leq \varepsilon,\ p\in F\}.$$

Weil F endlich ist, so existiert ein Index m_0 sodass $F \subset \{p_m : 1\leq m\leq m_0\}$. Wir definieren nun die bezüglich $d|_{\mathcal{D}_K(\Omega)}$ offene Menge

$$B_K\big(\varphi, 2^{-m_0}\tfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\big) = \big\{\psi \in \mathcal{D}_K(\Omega) : d(\varphi,\psi) < 2^{-m_0}\tfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\big\},$$

Somit gilt für jedes $\psi \in B_K\big(\varphi, 2^{-m_0}\tfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\big)$ die Ungleichung

$$2^{-m}\frac{p_m(\varphi-\psi)}{1+p_m(\varphi-\psi)} < 2^{-m_0}\tfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}, \qquad 1\leq m\leq m_0,$$

woraus sofort folgt dass $p_m(\psi)\leq\varepsilon$, $1\leq m\leq m_0$. Also haben wir gezeigt dass

$$B_K\big(\varphi, 2^{-m_0}\tfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\big) \subset \varphi + U_{F,\varepsilon} \subset O.$$

Weil $\varphi \in O$ beliebig war, folgt dass O offen bezüglich der Metrik $d|_{\mathcal{D}_K(\Omega)}$ ist.

Schritt 3. Abschließend zeigen wir dass die Begriffe Folgenstetigkeit und topologische Stetigkeit für metrisierbare Topologien übereinstimmen. Dazu sei (X, d) ein metrischer Raum, Y ein topologischer Raum und $f : X \to Y$. Klarerweise impliziert topologische Stetigkeit die Folgenstetigkeit, also müssen wir nur mehr die Umkehrung zeigen.

Dazu nehmen wir an dass f folgenstetig ist, aber nicht topologisch stetig. Nach Aufgabe 1.4.10 existiert also ein $x_0 \in X$ und eine offene Menge $O \subset Y$ mit $O \ni f(x_0)$ sodass für alle Umgebungen $U \subset X$ von x_0 gilt $f(U) \not\subset O$. Insbesondere gilt also

$$f(\{x \in X : d(x, x_0) \le \tfrac{1}{n}\}) \not\subset O, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Also finden wir eine Folge $\{x_n\}_n \subset X$ mit $d(x_n, x_0) \to 0$ und $f(x_n) \notin O$, $n \in \mathbb{N}$. Aufgrund der Folgenstetigkeit von f folgt $f(x_n) \to 0$, also existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass $f(x_{n_0}) \in O$, was der vorigen Aussage widerspricht. $\square$

Beispiel. (a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ meßbar. Dann heißt f *lokal integrierbar* falls

$$\int_K |f(x)| \,\mathrm{d}x < \infty, \qquad K \subset \Omega \text{ kompakt.}$$

Wir definieren den Raum

$$L^1_{\text{lok}}(\Omega) = \big\{ f : \Omega \to \mathbb{C} \;\;|\;\; f \text{ ist lokal integrierbar} \big\},$$

und für jedes $f \in L^1_{\text{lok}}(\Omega)$ sei die lineare Abbildung $T_f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$T_f(\varphi) = \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Die Abbildung T_f ist wohldefiniert, weil $\operatorname{supp}(\varphi) \subset \Omega$ kompakt ist.

Wir zeigen nun dass $T_f \in \big(\mathcal{D}(\Omega)\big)^*$, mit anderen Worten, T_f ist eine Distribution. Für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt

$$\big|T_f(\varphi)\big| = \Big| \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x \Big| \le \int\limits_{\operatorname{supp}(\varphi)} \big|f(x)\,\varphi(x)\big|\,\mathrm{d}x \le \int\limits_{\operatorname{supp}(\varphi)} \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x \sup_{x \in \Omega} \big|\varphi(x)\big|$$

Das Integral ist eine Konstante $C = C(f, \operatorname{supp}(\varphi))$, und das Supremum ist $p_0(\varphi)$, wobei die stetige Halbnorm p_0 in Satz 3.1.12 (iii) definiert ist. Damit erhalten wir

$$\big|T_f(\varphi)\big| \le C p_0(\varphi),$$

und mit Satz 3.1.12 die Stetigkeit von T_f. Die Distribution T_f heißt dir zu $f \in L^1_{\text{lok}}(\Omega)$ gehörige *reguläre Distributionen.*

Wir zeigen jetzt dass die Abbildung $f \mapsto T_f : L^1_{\text{lok}}(\Omega) \to \big(\mathcal{D}(\Omega)\big)^*$ injektiv ist. Dazu sei $f \in L^1_{\text{lok}}(\Omega)$ so dass $T_f = 0$, also

$$\int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{3.1.6}$$

Mit Satz 3.1.6 erhalten wir daraus $f = 0$ fast überall (siehe Aufgabe 3.1.13).

(b) Sei $x_0 \in \Omega$ fixiert. Wir betrachten das lineare Funktional $\delta_{x_0}\mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, $\varphi \mapsto \varphi(x_0)$. Es gilt $\delta_{x_0} \in \big(\mathcal{D}(\Omega)\big)^*$, denn

$$\big|\delta_{x_0}(\varphi)\big| = \big|\varphi(x_0)\big| \le p_0(\varphi).$$

Also ist δ_{x_0} eine Distribution; sie heißt *Deltadistribution.* Wir zeigen nun dass δ_{x_0} *keine* reguläre Distribution ist. Dazu setzen wir $\Omega_0 = \Omega \setminus \{x_0\}$, und stellen fest $\delta_{x_0}|_{\mathcal{D}(\Omega_0)} = 0$. Angenommen $\delta_{x_0} = T_f$ für ein geeignetes $f \in L^1_{\text{lok}}(\Omega)$, dann ist $T_f|_{\mathcal{D}(\Omega_0)} = 0$, und weil $f \mapsto T_f$ injektiv ist folgt somit $f|_{\Omega_0} = 0$ fast überall, und damit natürlich $f = 0$ fast überall. Folglich ist auch $0 = T_f = \delta_{x_0}$, was offenbar falsch ist.

(c) $\varphi \mapsto \varphi'(0) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$, weil $\big|\varphi'(0)\big| \le p_1(\varphi)$.

(d) Sei $T(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(n)$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ exisitert ein $N \in \mathbb{N}$ sodass $\operatorname{supp}(\varphi) \subset [-N, +N]$, und folglich ist

$$\left|T\varphi\right| \leq \sum_{n=0}^{N} \left|\varphi^{(n)}(n)\right| \leq (N+1)\, p_N(\varphi),$$

also $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$.

Aufgabe 3.1.13. Zeigen Sie dass aus (3.1.6) folgt $f = 0$ fast überall.

Definition 3.1.14. Seien X, Y lokalkonvexe Räume, und $T \in L(X, Y)$. Wir definieren $T^* : Y^* \to X^*$ als

$$T^*(y^*) = y^* \circ T, \qquad \text{für alle } y^* \in Y^*.$$

Die Abbildung T^* heißt der zu T adjungierte Operator.

Aufgabe 3.1.15. Zeigen Sie dass die Abbildung T^* linear und wohldefiniert ist.

Definition 3.1.16. Sei X ein lokalkonvexer Raum, dann definieren wir auf seinem Dualraum X^* die schwach* Topologie $\sigma(X^*, X)$ als die von den Halbnormen

$$p_x(x^*) = |x^*(x)| \qquad\qquad P = \{p_x \,:\, x \in X\}$$

induzierte lokalkonvexe Topologie $\mathcal{T}_P$.

Satz 3.1.17. *Seien X und Y lokalkonvexe Räume, und $T \in L(X, Y)$. Dann ist $T^* : Y^* \to X^*$ $\sigma(Y^*, Y)$-$\sigma(X^*, X)$-stetig.*

Beweis. Nach Satz 1.4.13 gilt dass T^* stetig ist genau dann wenn für jedes Netz (y_i^*) in Y^* welches gegen ein $y^* \in Y^*$ bezüglich $\sigma(Y^*, Y)$ konvergiert, gilt dass $(T^* y_i^*)$ gegen $T^* y^*$ bezüglich $\sigma(X^*, X)$ konvergiert. Sei nun (y_i^*) so dass $y_i^* \to y^* \in Y^*$ bezüglich $\sigma(Y^*, Y)$, dann folgt aus Satz 2.3.6 dass

$$(y_i^* - y^*)(y) \to 0, \qquad y \in Y.$$

Insbesondere erhalten wir

$$T^*(y_i^* - y^*)(x) = (y_i^* - y^*)(Tx) \to 0, \qquad x \in X,$$

also folgt mit Satz 2.3.6 dass $T^*(y_i^* - y^*) \to 0$ bezüglich $\sigma(X^*, X)$. □

3.2. Differentiation von Distributionen

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar, und

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Mit partieller Integration folgt dass

$$T_{f'}(\varphi) = -T_f(\varphi'), \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Definition 3.2.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $T \in \mathcal{D}(\Omega)^*$ und α ein Multiindex. Dann definieren wir

$$\left(D^{(\alpha)} T\right)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi), \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Lemma 3.2.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, und α ein Multiindex. Dann ist die Abbildung $D^{(\alpha)} : \mathcal{D}(\Omega)^* \to \mathcal{D}(\Omega)^*$ wohldefiniert und $\sigma(\mathcal{D}(\Omega)^*, \mathcal{D}(\Omega))$-stetig.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $D^\alpha \colon \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$ stetig ist. Nach Satz 3.1.12 ist dies ist genau dann der Fall wenn für alle kompakten $K \subset \Omega$ gilt

$$D^\alpha|_{\mathcal{D}_K(\Omega)} \text{ ist } \mathcal{T}_K\text{-stetig.} \qquad .$$

Sei nun $K \subset \Omega$ fixiert, dann erzeugen die Halbnormen $p_m(\varphi) = \max_{|\beta| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^\beta \varphi(x)|$, $m \in \mathbb{N}$, die Topologie $\mathcal{T}_K$. Wir fixieren $m \in \mathbb{N}_0$ und stellen fest

$$p_m(D^\alpha \varphi) = \max_{|\beta| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |(D^{\alpha+\beta} \varphi)(x)| \leq p_{m+|\alpha|}(\varphi).$$

Daraus folgt mit Satz 2.3.2 dass D^α $\mathcal{T}_K$-stetig ist, und weil K beliebig war, auch dass D^α $\mathcal{T}$-stetig ist. Also ist $(D^\alpha)^*$ nach Satz 3.1.17 $\sigma(\mathcal{D}(\Omega)^*, \mathcal{D}(\Omega))$-stetig, und die Behauptung folgt weil $D^{(\alpha)} = (-1)^{|\alpha|}(D^\alpha)^*$. ☐

Beispiel. (a) Sei $H : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die Heavisidefunktion, das ist

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \geq 0, \\ 0 & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Sei nun $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, dann gilt

$$(T_H)'(\varphi) = -T_H(\varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\varphi(x)\Big|_{x=0}^{\infty} = \varphi(0),$$

also ist $(T_H)' = \delta_0$.

(b) Die distributionelle Ableitung der Deltadistribution ist

$$\delta'(\varphi) = -\delta(\varphi') = -\varphi'(0),$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

3.3. Fouriertransformation von Distributionen

Definition 3.3.1. Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann ist die Fouriertransformation $\mathcal{F} f$ von f für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$\mathcal{F} f(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot x} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Oft bezeichnen wir die Fouriertransformierte von f auch mit $\widehat{f}$.

Definition 3.3.2. Mit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ bezeichnen wir den Vektorraum gegeben durch

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \,\middle|\, \begin{array}{c} \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n),\ p_{m,\alpha}(\varphi) < \infty, \\ m \in \mathbb{N}_0,\ \alpha \text{ Multiindex} \end{array} \right\},$$

wobei die Halbnormen $p_{m,\alpha}$ gegeben sind durch

$$p_{m,\alpha}(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}} (1 + |x|^m) \left|\big(D^\alpha \varphi\big)(x)\right|, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Der Vektorraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ heißt *Schwartzraum*, seine Elemente *Schwartzfunktionen*. Oft wird $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ auch als Raum der *schnell fallenden Funktionen* bezeichnet.

Aufgabe 3.3.3. Seien $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $m \in \mathbb{N}_0$ und α ein Multiindex. Zeigen Sie: für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $r > 0$ sodass

$$(1 + |x|^m)|\big(D^\alpha \varphi\big)(x)| \leq \varepsilon, \qquad |x| \geq r.$$

Aufgabe 3.3.4. Zeigen Sie die Inklusionen $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R})$.

Lemma 3.3.5. *Sei $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und α ein Multiindex. Dann gilt*

(i) $\mathcal{F} \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $D^\alpha(\mathcal{F} \varphi) = (-i)^{|\alpha|}\, \mathcal{F}\big(x \mapsto x^\alpha \varphi(x)\big)$,

(ii) $\big(\mathcal{F}(D^\alpha \varphi)\big)(\xi) = i^{|\alpha|}\, \xi^\alpha\, (\mathcal{F} \varphi)(\xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 3.3.6. Beweisen Sie Lemma 3.3.5.

Lemma 3.3.7. *Für jedes $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt $\mathcal{F} \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Aufgabe 3.3.8. Beweisen Sie Lemma 3.3.7.

Lemma 3.3.9. *Für $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definieren wir den Faltungsoperator $C_g : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ durch*

$$C_g(\varphi)(x) = (g * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann ist C_g wohldefiniert und stetig.

Beweis. Sei $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ fixiert, dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und alle Multiindizes α dass

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha g)(x-y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y\Big| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x-y|^m)}\frac{1}{(1+|y|^{m+n+1})}\,\mathrm{d}y\; p_{m,\alpha}(g)p_{m+n+1,0}(\varphi).$$

Mit Aufgabe 3.3.10 erhalten wir die Abschätzung

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha g)(x-y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y\Big| \leq \frac{1}{c}\frac{1}{(1+|x|^m)}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|y|^{n+1})}\,\mathrm{d}y\; p_{m,\alpha}(g)p_{m+n+1,0}(\varphi),$$

woraus unmittelbar folgt

$$p_{m,\alpha}(C_g(\varphi)) \leq \frac{C}{c}p_{m,\alpha}(g)p_{m+n+1,0}(\varphi),$$

wobei $C = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|y|^{n+1})}\,\mathrm{d}y < \infty$. Die Behauptung folgt mit Satz 2.3.2. □

Aufgabe 3.3.10. Zeigen Sie für alle $m \in \mathbb{N}_0$ die Ungleichung

$$(1+|x-y|^m)(1+|y|^m) \geq c(1+|x|^m) \qquad x,y \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $c = c(m) > 0$ nicht von x, y abhängt.

Bemerkung 3.3.11. Für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ gilt: wann immer $\mathcal{F}\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ so ist $\varphi = 0$. Insbesondere erhalten wir dass für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ gilt $\mathcal{F}\varphi \notin \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Satz 3.3.12. *Die Fouriertransformation ist eine Bijektion von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Die inverse Fouriertransformation $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist gegeben durch*

$$\big(\mathcal{F}^{-1}\varphi\big)(x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\,\varphi(\xi)\,\mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}^n,\; \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Beweis. Ohne Beweis. □

Lemma 3.3.13. *Sei $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ der von den Halbnormen $p_{m,\alpha}$ topologisierte lokalkonvexe Raum, dann gelten folgende Aussage:*

(i) für alle Multiindizes α dass $\varphi \mapsto x^\alpha\varphi$ wohldefiniert und stetig auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist.
(ii) für alle Multiindizes β dass $\varphi \mapsto D^\beta\varphi$ wohldefiniert und stetig auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist.
(iii) es exisitert eine Konstante $C > 0$ sodass

$$\big|\big(\mathcal{F}\varphi\big)(\xi)\big| \leq C\cdot p_{n+1,0}(\varphi), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n,\; \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Beweis. Beweis von (i). Sei α ein beliebiger Multiindex. Nach der Leibnitzformel (siehe Aufgabe 3.3.15) gilt für alle $m \in \mathbb{N}_0$, alle Multiindizes β und alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dass

$$\begin{aligned}p_{m,\beta}(x \mapsto x^\alpha\varphi(x)) &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|^m)|(D^\beta(x^\alpha\varphi))(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|^m)\Big|\sum_{\gamma\leq\beta} c_{\gamma,\beta}D^\gamma(x^\alpha)D^{\beta-\gamma}\varphi(x)\Big|,\\ &\leq \sum_{\gamma\leq\beta}|c_{\gamma,\beta}|\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|^m)|D^\gamma(x^\alpha)||D^{\beta-\gamma}\varphi(x)|,\end{aligned}$$

für geeignete Zahlen $c_{\gamma,\beta} \in \mathbb{R}$. Aus der Multiindex Abschätzung (siehe Aufgabe 3.3.14) $|D^\gamma(x^\alpha)| \leq |x|^{|\alpha|}$ erhalten wir

$$p_{m,\beta}(x \mapsto x^\alpha\varphi(x)) \leq \sum_{\gamma\leq\beta} 2|c_{\gamma,\beta}|\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|^{m+|\alpha|})|D^{\beta-\gamma}\varphi(x)| \leq C_\beta\sum_{\gamma\leq\beta} p_{m+|\alpha|,\beta-\gamma}(\varphi),$$

wobei $C_\beta = 2\max_{\gamma\leq\beta}|c_{\gamma,\beta}|$. Die Behauptung folgt mit Satz 2.3.2.
Beweis von (ii). Weil $p_{m,\gamma}D^\beta\varphi \leq p_{m,\gamma+\beta}\varphi$, folgt die Behauptung unmittelbar aus Satz 2.3.2.
Beweis von (iii). Für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\begin{aligned}|(\mathcal{F}\varphi)(\xi)| &\leq (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi(x)|\,\mathrm{d}x = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{1+|x|^{n+1}}(1+|x|^{n+1})|\varphi(x)|\,\mathrm{d}x\\ &\leq \Big((2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{1+|x|^{n+1}}\,\mathrm{d}x\Big)p_{n+1,0}(\varphi).\end{aligned}$$

Weil $\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{1+|x|^{n+1}}\,\mathrm{d}x$ eine Konstante ist die nur von n abhängt, folgt die Behauptung. □

Aufgabe 3.3.14. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und α ein Multiindex. Zeigen Sie die Ungleichung $|x^\alpha| \leq |x|^{|\alpha|}$.

Aufgabe 3.3.15 (Leibnitzformel)**.** Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ hinreichend oft differenzierbar. Zeigen Sie dass für jeden Multiindex α gilt

$$D^\alpha(fg) = \sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}D^\beta f D^{\alpha-\beta}g, \qquad \text{wobei } \binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1}\cdots\binom{\alpha_n}{\beta_n}.$$

Lemma 3.3.16. *Für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt $\mathcal{F}\mathcal{F}f(x) = f(-x)$, $x \in \mathbb{R}^n$.*

Beweis. Ohne Beweis. □

Satz 3.3.17. *Die Fouriertransformation und ihre Inverse $\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sind stetig bezüglich der von den Halbnormen $p_{m,\alpha}$ erzeugten lokalkonvexen Topologie.*

Beweis. Wegen Lemma 3.3.13 genügt es die Stetigkeit von $\mathcal{F}$ zu zeigen. Dazu seien $m \in \mathbb{N}_0$, α ein Multiindex und $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ fixiert. Wir berechnen mit Hilfe von Lemma 3.3.5

$$(2\pi)^{n/2}p_{m,\alpha}(\mathcal{F}f) = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^m)\Big|D_\xi^\alpha\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i\xi\cdot x}f(x)\,\mathrm{d}x\Big| = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^m)\Big|\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i\xi\cdot x}x^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x\Big|. \tag{3.3.1}$$

Wir definieren nun den Differentialoperator $Q_x f = f - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial_{x_j}^2}f$ und stellen fest dass

$$Q_x(e^{-i\xi\cdot x}) = (1+|\xi|^2)e^{-i\xi\cdot x}, \qquad x,\xi\in\mathbb{R}^n.$$

Durch Iteration ergibt sich daraus

$$Q_x^m(e^{-i\xi\cdot x}) = (1+|\xi|^2)^m e^{-i\xi\cdot x}, \qquad x,\xi\in\mathbb{R}^n.$$

Wir setzen diesen Ausdruck in (3.3.1) ein und erhalten

$$(2\pi)^{n/2}p_{m,\alpha}(\mathcal{F}f) = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\frac{(1+|\xi|^m)}{(1+|\xi|^2)^m}\Big|\int_{\mathbb{R}^n}Q_x^m(e^{-i\xi\cdot x})x^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x\Big| \leq \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\Big|\int_{\mathbb{R}^n}Q_x^m(e^{-i\xi\cdot x})x^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x\Big|.$$

Mittels partieller Integration folgt

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^n}Q_x^m(e^{-i\xi\cdot x})x^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x\Big| = \Big|\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i\xi\cdot x}Q_x^m(x^\alpha f(x))\,\mathrm{d}x\Big|,$$

und so erhalten wir die Abschätzung

$$(2\pi)^{n/2}p_{m,\alpha}(\mathcal{F}f) \leq \Big(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{1+|x|^{n+1}}\,\mathrm{d}x\Big)\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|^{n+1})|Q_x^m(x^\alpha f(x))|.$$

Nun ist $\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{1+|x|^{n+1}}\,\mathrm{d}x$ eine Zahl die nur von n abhängt, und die Abbildung $x \mapsto Q_x^m(x^\alpha f(x))$ ist nach Lemma 3.3.13 stetig, also folgt die Behauptung mit Satz 2.3.2.

□

Definition 3.3.18. (a) Ein lineares Funktional $T \in \big(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\big)^*$ heißt *temperierte Distribution.*

(b) Für $T \in \big(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\big)^*$ ist die Fouriertransformierte $\mathcal{F}T$ definiert durch

$$\big(\mathcal{F}T\big)(\varphi) = T(\mathcal{F}\varphi), \qquad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Bemerkung 3.3.19. Per Definition der Fouriertransformation für temperierte Distribution ist diese der zur Fouriertransformation für schnell fallende Funktionen adjungierte Operator. Mit Satz 3.1.17 folgt dass die Fouriertransformation für temperierte Distributionen eine $\sigma(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^*, \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$-$\sigma(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^*, \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$-stetige Abbildung ist. Weil die Fouriertransformation für schnell fallende Funktionen bijektiv ist, so ist auch die Fouriertransformation für temperierte Distributionen bijektiv.

Satz 3.3.20. *(i) Sei $j : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, gegeben durch $j(\varphi) = \varphi$, dann ist j stetig und hat dichtes Bild.*

(ii) Die Adjungierte $j^* : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^* \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^*$ ist gegeben durch $j^*(T) = T|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}$ und ist injektiv.

Beweis. Beweis von (i). Wir zeigen zunächst die Stetigkeit von j. Nach Lemma 3.1.9 (iii) genügt es zu zeigen dass

$$j|_{\mathcal{D}_K(\Omega)} \text{ stetig ist,} \qquad K \subset \Omega \text{ kompakt.}$$

Dazu seien $K \subset \Omega$ kompakt, $m \in \mathbb{N}_0$ und α ein Multiindex fixiert. Dann gilt für alle $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$

$$p_{m,\alpha}(j\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|^m)|(D^\alpha\varphi)(x)| = \sup_{x\in K}(1+|x|^m)|(D^\alpha\varphi)(x)| \le C_K p_\alpha(\varphi).$$

Mit Satz 2.3.2 erhalten wir die Stetigkeit von $j|_{\mathcal{D}_K(\Omega)}$, und somit von j.

Nun zeigen wir, dass j dichtes Bild besitzt. Dazu sei $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ fixiert. Wir wählen eine Funktion $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$0 \le \eta \le 1, \qquad \eta(x) = 1,\ |x| \le 1, \qquad \eta(x) = 0,\ |x| \ge 2.$$

Wir verweisen für die Existenz einer solchen Funktion auf Aufgabe 3.3.21. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ definieren wir nun die Funktion φ_k durch

$$\varphi_k(x) = \eta\big(\tfrac{x}{k}\big)\varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Klarerweise ist φ_k kompakt getragen und glatt, also ist $\varphi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$. Wir zeigen nun dass $\varphi_k \to \varphi$ in der Topologie von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dazu sei nun $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$ und ein Multiindex α fixiert. Dann gilt zunächst nach der Leibnitzformel (siehe Aufgabe 3.3.15)

$$\big(D^\alpha(\varphi - \varphi_k)\big)(x) = \sum_{\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta} D^\beta\big(1-\eta\big(\tfrac{x}{k}\big)\big)D^{\alpha-\beta}\varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Eine kurze Rechnung zeigt dass für alle $\beta \neq 0$ gilt

$$D^\beta\eta\big(\tfrac{x}{k}\big) = k^{-|\beta|}\big(D^\beta\eta\big)\big(\tfrac{x}{k}\big), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

also erhalten wir aus den letzten beiden Gleichungen die Abschätzung

$$\big|D^\alpha(\varphi-\varphi_k)(x)\big| \le \big|\big(1-\eta\big(\tfrac{x}{k}\big)\big)D^\alpha\varphi(x)\big| + \sum_{0\neq\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}k^{-|\beta|}\big|(D^\beta\eta)\big(\tfrac{x}{k}\big)\big|\big|D^{\alpha-\beta}\varphi(x)\big|, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.3.2}$$

Wir schätzen die beiden Terme nacheinander ab. Erstens existiert laut Aufgabe 3.3.3 ein $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$(1+|x|^m)|D^\alpha\varphi(x)| \le \varepsilon, \qquad |x| \ge k_0.$$

Weil $1-\eta\big(\frac{x}{k}\big) = 0$ für $|x| \le k$, erhalten wir die Ungleichung

$$\big|1-\eta\big(\tfrac{x}{k}\big)\big|\big|(1+|x|^m)D^\alpha\varphi(x)\big| \le \varepsilon, \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ k \ge k_0. \tag{3.3.3}$$

Wir kombinieren (3.3.3) mit (3.3.3) und erhalten dass für alle $k \geq k_0$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$(1+|x|^m)\big|D^\alpha(\varphi-\varphi_k)(x)\big| \leq \varepsilon + \sum_{0\neq\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}k^{-|\beta|}\big|(D^\beta\eta)\big(\tfrac{x}{k}\big)\big|(1+|x|^m)|D^{\alpha-\beta}\varphi(x)|$$
$$\leq \varepsilon + \frac{1}{k}\Bigg(\sum_{0\neq\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\big|(D^\beta\eta)\big(\tfrac{x}{k}\big)\big|\Bigg)\max_{\beta\leq\alpha} p_{m,\alpha-\beta}(\varphi).$$

Weil $\big|(D^\beta\eta)\big(\frac{x}{k}\big)\big| \leq C_{\eta,\alpha-\beta}$, $x \in \mathbb{R}^n$, hängt die Summe im letzten Ausdruck nur von η und α ab. Wir haben also gezeigt

$$p_{m,\alpha}(\varphi-\varphi_k) \leq \varepsilon + \frac{1}{k}C_{\eta,\alpha}\max_{\beta\leq\alpha} p_{m,\alpha-\beta}(\varphi) \to \varepsilon, \qquad k\to\infty.$$

Weil ε beliebig war, folgt dass $\varphi_k \to \varphi$ in der Topologie von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, und damit die Stetigkeit von j.

Beweis von (ii). Siehe Aufgabe 3.3.22. ☐

Aufgabe 3.3.21. Zeigen Sie die Existenz einer Funktion $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$0 \leq \eta \leq 1, \qquad \eta(x) = 1,\ |x| \leq 1, \qquad \eta(x) = 0,\ |x| \geq 2.$$

Hinweis: Zeigen Sie die Existenz von η indem Sie die Funktion φ in Aufgabe 3.1.7 mit der charakteristischen Funktion $\chi_{B_{\mathbb{R}^n}}$ falten, wobei $B_{\mathbb{R}^n}$ die Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

Aufgabe 3.3.22. Beweisen Sie Satz 3.3.20 (ii).

Definition 3.3.23. Wir definieren nun die temperierte distributionenelle Differentiation $\widetilde{D}^{(\alpha)} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^* \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^*$ durch

$$\widetilde{D}^{(\alpha)}T = (-1)^{|\alpha|}T\circ D^\alpha, \qquad T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^*.$$

Wir schreiben meistens einfach $D^{(\alpha)}$ statt $\widetilde{D}^{(\alpha)}$.

Bemerkung 3.3.24. Nach Lemma 3.3.13 (ii) ist $\varphi \mapsto D^\alpha\varphi$ stetig auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, also ist $T\circ D^\alpha \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^*$, und somit ist $\widetilde{D}^{(\alpha)}$ wohldefiniert. Eine Konsequenz von Satz 3.3.20 ist, dass für alle $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^*$ gilt

$$\big(D^{(\alpha)}j^*T\big)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}T(D^\alpha\varphi) = (\widetilde{D}^{(\alpha)}T)(j(\varphi)) = (j^*\widetilde{D}^{(\alpha)}T)(\varphi), \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Mit anderen Worten, für alle Multiindizes α gilt

$$j^*\widetilde{D}^{(\alpha)} = D^{(\alpha)}j^*.$$

Satz 3.3.25. *Für alle $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^*$ gilt*

$$\mathcal{F}(D^{(\alpha)}T) = i^{|\alpha|}x^\alpha\,\mathcal{F}(T).$$

Beweis. Für einen Multiindex α definieren wir die nach Lemma 3.3.13 (i) stetige lineare Abbildung $M_\alpha : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ durch $\varphi \mapsto= x^\alpha\varphi$. Dann gilt wegen Lemma 3.3.5 für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dass

$$(\mathcal{F}(D^{(\alpha)}T))(\varphi) = (D^{(\alpha)}T)(\mathcal{F}\varphi) = (-1)^{|\alpha|}T(D^\alpha\,\mathcal{F}\varphi) = (-1)^{|\alpha|}(-i)^{|\alpha|}T(\mathcal{F}M_\alpha\varphi)$$
$$= i^{|\alpha|}T(\mathcal{F}M_\alpha\varphi) = i^{|\alpha|}M_\alpha^*\,\mathcal{F}T\varphi.$$

Nach Satz 3.1.17 ist M_α^* ein $\sigma(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^*, \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$-stetiger Operator, wegen Bemerkung 3.3.19 so auch $\mathcal{F}$, und daher $M_\alpha^*\mathcal{F} = \mathcal{F}D^{(\alpha)}$. ☐

Bemerkung 3.3.26. Wir schreiben x^α für M_α^*.

Beispiel. (a) Sei $1 \leq p \leq \infty$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

dass $T_f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^*$.

(b) Sei $a \in \mathbb{R}^n$, dann ist $\delta_a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^*$, und es gilt

$$\big(\mathcal{F}\,\delta_a\big)(\varphi) = \delta_a(\mathcal{F}\,\varphi) = (2\,\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\,a\cdot x}\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

also ist $\mathcal{F}\,\delta_a$ die von der L^∞ Funktion $x \mapsto (2\,\pi)^{-n/2}\,e^{-i\,a\cdot x}$ induzierte Distribution. Wir schreiben dafür auch $\mathcal{F}\,\delta_a = (2\,\pi)^{-n/2}\,e^{-i\,a\cdot x}$.

(c) Sei $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dann zeigt eine einfache Rechnung dass

$$\big(\mathcal{F}\,\mathcal{F}(\varphi)\big)(x) = \varphi(-x).$$

Bezeichnen mit χ die konstante Funktion 1, so folgt dann mit dem vorigen Beispiel

$$\big(\mathcal{F}\,T_\chi\big)(\varphi) = \big(\mathcal{F}\,\mathcal{F}\,\delta\big)(\varphi) = \delta(\mathcal{F}\,\mathcal{F}\,\varphi) = \varphi(-0) = \delta(\varphi).$$

KAPITEL 4

Schwache Topologien

4.1. Definition schwacher Topologien

Definition 4.1.1. Seien X, Y Vektorräume und $(x,y) \mapsto \langle x, y\rangle \in \mathbb{R}$ eine Bilinearform. Das Tupel $(X, Y, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ heißt duales Paar, falls

(a) für alle $x \in X \setminus \{0\}$ ein $y \in Y$ existiert sodass $\langle x, y\rangle \neq 0$, und
(b) für alle $y \in Y \setminus \{0\}$ ein $x \in X$ existiert sodass $\langle x, y\rangle \neq 0$.

Beispiel. (a) Sei X ein lokalkonvexer Hausdorffraum, dass bedeutet für alle $x \in X \setminus \{0\}$ existiert ein $p \in P$ mit $p(x) \neq 0$. Mit dem Satz von Hahn-Banach folgt dass $(x, x^*) \mapsto x^*(x)$ mit (X, X^*) ein duales Paar bildet.
(b) (X^*, X) mit $(x^*, x) \mapsto x^*(x)$ ist ein duales Paar.
(c) $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ bezeichnet wie üblich den Vektorraum $\{f : R \to R\}$. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ setzen wir $\delta_t(f) = f(t)$. Dann ist $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \operatorname{span}\{\delta_t : t \in \mathbb{R}\})$ ausgestattet mit der Bilinearform

$$\Big\langle f, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{t_i} \Big\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(t_i), \qquad f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ t_i \in \mathbb{R},\ \lambda_i \in \mathbb{R},$$

ein duales Paar.

Definition 4.1.2. Sei $(X, Y, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein duales Paar.

(a) Für jedes $y \in Y$ betrachten wir die Halbnorm $p_y : X \to [0,\infty)$, $p_y(x) = |\langle x, y\rangle|$ und $P = \{p_y : y \in Y\}$. Die von P auf X erzeugte Topologie wird mit $\sigma(X, Y)$ bezeichnet.
(b) Für jedes $x \in X$ betrachten wir die Halbnorm $q_x : Y \to [0,\infty)$, $q_x(y) = |\langle x, y\rangle|$ und $Q = \{q_x : x \in X\}$. Die von Q auf Y erzeugte Topologie wird mit $\sigma(Y, X)$ bezeichnet.

Bemerkung 4.1.3. Aus Definition 4.1.2 und Satz 2.3.6 folgt:

(a) Ein Netz $(x_i) \subset X$ konvergiert bezüglich $\sigma(X, Y)$ gegen x genau dann wenn für alle $y \in Y$ gilt $\langle x_i - x, y\rangle \to 0$.
(b) Ein Netz $(y_i) \subset Y$ konvergiert bezüglich $\sigma(Y, X)$ gegen y genau dann wenn für alle $x \in X$ gilt $\langle x, y_i - y\rangle \to 0$.

Lemma 4.1.4. *Sei (X, Y) ein duales Paar, und $K \subset X$ eine $\sigma(X, Y)$-kompakte Menge. Dann ist K eine $\sigma(X, Y)$-abgeschlossene Menge.*

Beweis. Wir zeigen zunächst dass für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}_X$ existiert sodass $(x_1 + U) \cap (x_2 + U) = \emptyset$. Dazu seien $x_1 \neq x_2$ fixiert. Dann existiert laut Definition 4.1.1 ein $y \in Y$ sodass $\langle x_1 - x_2, y\rangle = \delta > 0$. Wir definieren $U = \{x \in X : |\langle x, y\rangle| \leq \delta/3\} \in \mathfrak{U}_X$, und stellen fest dass U das Gewünschte leistet.

Sei nun $K \subset X$ eine $\sigma(X, Y)$-kompakte Menge und $x_0 \notin K$. Wir werden zeigen dass x_0 eine von K disjunkte Umgebung besitzt. Für jedes $x \in K$ finden wir nach dem oben Gezeigten eine $\sigma(X, Y)$-offene Menge O_x sodass $(x_0 + O_x) \cap (x + O_x) = \emptyset$. Die Kollektion $\{x + O_x : x \in K\}$ ist somit eine eine $\sigma(X, Y)$-offene Überdeckung von K, also existieren $x_1, \dots, x_n \in K$ sodass $K \subset \bigcup_{j=1}^n (x_j + O_{x_j})$. Wir definieren die $\sigma(X, Y)$-offene Menge $O = \bigcap_{j=1}^n O_{x_j}$ und sehen dass $(x_0 + O) \cap \bigcup_{j=1}^n (x_j + O_{x_j}) = \emptyset$, insbesondere gilt $(x_0 + O) \cap K = \emptyset$. Weil $x_0 \notin K$ beliebig war, folgt K^c ist offen. $\square$

Lemma 4.1.5. *Sei X ein Vektorraum, $\ell, \ell_1, \dots, \ell_n : X \to \mathbb{R}$ linear und $N = \{x : \ell_i(x) = 0,\ 1 \le i \le n\}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $\ell \in \operatorname{span}\{\ell_1, \dots, \ell_n\}$.

(ii) *Es gibt eine Konstante $C \ge 0$ sodass für alle $x \in X$*
$$|\ell(x)| \le C \max_{1 \le i \le n} |\ell_i(x)|.$$

(iii) $\bigcap_{1 \le i \le n} \ker(\ell_i) \subset \ker(\ell)$, *das heißt $\ell(x) = 0$ falls $x \in N$.*

Beweis. Die Implikationen (i)⇒(ii)⇒(iii) sind offensichtlich. Wir beweisen nun (iii)⇒(i). Dazu definieren wir zuerst die Menge
$$V := \{(\ell_i(x))_{1 \le i \le n} : x \in X\} \subset \mathbb{R}^n.$$
Es ist leicht einzusehen dass V ein linearer Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist. Als nächstes definieren wir die Abbildung $\varphi : V \to \mathbb{R}$ durch
$$(\ell_i(x))_{i \le n} \mapsto \ell(x),$$
und wir stellen fest dass φ wegen (iii) wohldefiniert und linear ist. Wir wissen aus der linearen Algebra dass eine lineare Erweiterung $\widehat{\varphi}$ von φ auf ganz $\mathbb{R}^n$ existiert, also $\widehat{\varphi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist linear und $\widehat{\varphi}|_V = \varphi$. Wir schreiben $\widehat{\varphi}$ in der Form
$$\widehat{\varphi}(\xi) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i, \qquad \xi = (\xi_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n,$$
wobei die α_i geeignete Skalare sind. Damit gilt also
$$\ell(x) = \varphi((\ell_i(x))_{i=1}^n) = \widehat{\varphi}((\ell_i(x))_{i=1}^n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \ell_i(x_i), \qquad x \in X.$$
□

Korollar 4.1.6. *Ein Funktional auf X ist genau dann $\sigma(X,Y)$-stetig wenn es von der Form*
$$x \mapsto \langle x, y \rangle$$
ist. Es gilt also
$$(X, \sigma(X,Y))^* = Y.$$

Beweis. Sei $\ell \colon X \to \mathbb{R}$ linear. Dann ist ℓ nach Satz 2.3.2 $\sigma(X,Y)$-stetig genau dann wenn endlich viele $y_1, \dots, y_n \in Y$ und eine Konstante $C > 0$ existieren sodass
$$|\ell(x)| \le C \max_{1 \le i \le n} |\langle x, y_i \rangle|, \qquad x \in X.$$
Wir definieren nun $\ell_i : X \to \mathbb{R}$ durch $\ell_i(x) = \langle x, y_i \rangle$, dann folgt aus der obigen Ungleichung und Lemma 4.1.5 dass
$$\ell(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \ell_i(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle x, y_i \rangle = \Big\langle x, \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i \Big\rangle, \qquad x \in X.$$
Abschließend setzen wir $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i$ und stellen fest dass mit der obigen Gleichung gilt $\ell = \langle \cdot, y \rangle$. □

Wir halten die folgenden beiden Spezialfälle fest.

Korollar 4.1.7. *Sei X ein Vektorraum und $\mathcal{T}_P$ die von der Familie von Halbnormen P induzierte lokalkonvexe Topologie.*

(i) *Sei $\ell : X \to \mathbb{R}$ linear. Dann gilt ℓ ist genau dann $\mathcal{T}_P$-stetig wenn ℓ bezüglich $\sigma(X, (X, \mathcal{T}_P)^*)$ stetig ist.*

(ii) *Sei $\ell : X^* \to \mathbb{R}$ linear. Dann ist ℓ genau dann $\sigma((X, \mathcal{T}_P)^*, X)$-stetig wenn ein $x \in X$ existiert sodass $\ell(x^*) = x^*(x)$, $x^* \in (X, \mathcal{T}_P)^*$.*

Beweis. Beweis von (i). Sei zuerst ℓ eine $\mathcal{T}_P$-stetige Abbildung. Dann ist ℓ per Definition in $(X, \mathcal{T}_P)^*$. Also folgt aus Satz 2.3.2 mit $F = \{x \mapsto |\ell(x)|\}$ und $M = 1$

$$|\ell(x)| \leq M \max_{p \in F} p(x), \qquad x \in X,$$

also die $\sigma(X, (X, \mathcal{T}_P)^*)$-Stetigkeit von ℓ.

Ist nun ℓ eine $\sigma(X, (X, \mathcal{T}_P)^*)$-stetige Abbildung, so existiert nach Korollar 4.1.6 ein $x^* \in (X, \mathcal{T}_P)^*$ sodass

$$\ell(x) = x^*(x), \qquad x \in X.$$

Damit ist natürlich auch ℓ in $(X, \mathcal{T}_P)^*$, also $\mathcal{T}_P$-stetig.
Beweis von (ii). Sei $\ell : X^* \to \mathbb{R}$ eine $\sigma((X, \mathcal{T}_P)^*, X)$-stetige Abbildung, dann existiert nach Korollar 4.1.6 ein $x \in X$ sodass

$$\ell(x^*) = x^*(x), \qquad x^* \in (X, \mathcal{T}_P)^*.$$

Die Umkehrung folgt analog zum Beweis von (i). □

Satz 4.1.8. *Seien $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ lokalkonvexe Topologien auf X und sei $(X, \mathcal{T}_1)^* = (X, \mathcal{T}_2)^*$. Dann ist eine konvexe Menge $C \subset X$ genau dann $\mathcal{T}_1$-abgeschlossen wenn sie $\mathcal{T}_2$-abgeschlossen ist.*

Beweis. Sei $C \subset X$ abgeschlossen bezüglich $\mathcal{T}_2$. Wir werden zeigen $C^c \subset \left(\overline{C}^{\mathcal{T}_1}\right)^c$, woraus natürlich folgt dass $\overline{C}^{\mathcal{T}_1} \subset C$, also die $\mathcal{T}_1$-Abgeschlossenheit von C.

Dazu sei $x_0 \notin C$. Wir wählen mit Satz 2.3.15 ein $\mathcal{T}_2$-stetiges lineares Funktional x^* und ein $\varepsilon > 0$ sodass

$$x^*(x) + \varepsilon \leq x^*(x_0), \qquad x \in C. \tag{4.1.1}$$

Unsere Hypothese besagt dass x^* auch $\mathcal{T}_1$-stetig ist, also ist

$$U = \{x \in X : |x^*(x)| < \varepsilon\} \tag{4.1.2}$$

eine bezüglich $\mathcal{T}_1$ offene Nullumgebung. Wir müssen zeigen dass $(x_0 + U) \cap \overline{C}^{\mathcal{T}_1} = \emptyset$. Wegen (4.1.2) und (4.1.1) gilt dass

$$x^*(x_0 + x) = x^*(x_0) + x^*(x) \geq x^*(x_0) - \varepsilon \geq x^*(y), \qquad x \in U,\ y \in C. \tag{4.1.3}$$

Angenommen $(x_0 + U) \cap \overline{C}^{\mathcal{T}_1} \neq \emptyset$, dann existiert nach Definition 1.4.7 ein $x \in U$ und ein Netz $(x_i) \subset C$ sodass $x_i \to x_0 + x$ bezüglich $\mathcal{T}_1$. Insbesondere gilt also $x^*(x_i) \to x^*(x_0 + x)$, was im Widerspruch zu (4.1.3) steht. □

Bemerkung 4.1.9. Sei X ein Vektorraum und $\mathcal{T}_P$ eine lokalkonvexe Topologie auf X. Dann ist nach Korollar 4.1.6 $(X, \mathcal{T}_P)^* = \big(X, \sigma(X, (X, \mathcal{T}_P))^*\big)^*$, und mit Satz 4.1.8 ist eine konvexe Menge $C \subset X$ genau dann $\mathcal{T}_P$-abgeschlossen wenn sie $\sigma(X, (X, \mathcal{T}_P)^*)$-abgeschlossen ist.

Satz 4.1.10. *Die schwache Topologie $\sigma(X, Y)$ ist initial bezüglich Y, das heißt für jeden topologischen Raum T und jede Abbildung $f : T \to (X, \sigma(X, Y))$ gilt: f ist genau dann stetig wenn die Abbildung $y \circ f : T \to \mathbb{R}$ gegeben durch*

$$t \mapsto \langle f(t), y \rangle$$

für alle $y \in Y$ stetig ist.

Beweis. Wir wissen dass die Abbildung $x \mapsto \langle x, y \rangle$ für jedes $y \in Y$ stetig ist. Also folgt aus der Stetigkeit von f die Stetigkeit von $t \mapsto \langle f(t), y \rangle$. Sei nun umgekehrt sei $t \mapsto \langle f(t), y \rangle$ für alle $y \in Y$ stetig. Wir zeigen nun dass f stetig in $t_0 \in T$ ist. Dazu sei U eine beliebige $\sigma(X, Y)$-Nullumgebung. Es ist zu zeigen dass es eine Umgebung W von t_0 existiert, sodass $f(W) \subset f(t_0) + U$. Wir wählen $y_1, \ldots, y_n \in Y$ so dass und $\varepsilon > 0$ so dass für $V = \{x \in X : |\langle x, y_i \rangle| \leq \varepsilon,\ 1 \leq i \leq n\}$ die Inklusion

$$V \subset U$$

gilt. Aufgrund unserer Hypothese erhalten wir dass

$$W_i = \{t \in T : |\langle f(t) - f(t_0), y_i \rangle| \le \varepsilon\}$$

für jedes $1 \le i \le n$ ein Umgebung von t_0 ist, und so ist auch

$$W = \bigcap_{i=1}^{n} W_i$$

eine Umgebung von t_0. Damit haben wir erreicht dass $f(W) \subset f(t_0) + V \subset f(t_0) \subset U$. $\square$

4.2. Bipolarensatz

Definition 4.2.1. Sei (X, Y) ein duales Paar, $A \subset X$ und $B \subset Y$.

(a) Die Polare von A ist gegeben durch

$$A^\circ = \big\{y \in Y \,:\, \langle x, y \rangle \le 1,\ x \in A\big\},$$

(b) und die Polare von B ist definiert als

$$B^\circ = \big\{x \in X : \langle x, y \rangle \le 1,\ y \in B\big\}.$$

Beispiel. Für einen normierten Raum Z bezeichnet B_Z die normabgeschlossene Einheitskugel von Z. Ist X ein normierter Raum und $Y = X^*$, dann ist $(B_X)^\circ = B_{X^*}$ und $(B_{X^*})^\circ = B_X$. Falls $U \subset X$ ein Unterraum ist, dann gilt $U^\circ = U^\perp$, und falls $V \subset X^*$ ein Unterraum ist, so gilt $V^\circ = V_\perp$.

Lemma 4.2.2. *Sei (X, Y) ein duales Paar, und seien $A, A_i \subset X$, $i \in I$, dann gilt:*

(i) *A° ist konvex und $\sigma(Y, X)$-abgeschlossen, $A^\circ = (\overline{\mathrm{co}}\, A)^\circ$, wobei der Abschluss in der $\sigma(X, Y)$-Topologie zu verstehen ist.*

(ii) $0 \in A^\circ$, $A \subset A^{\circ\circ}$ *und wann immer* $A_1 \subset A_2$ *folgt* $A_2^\circ \subset A_1^\circ$.

(iii) *Ist A kreisförmig, so ist es auch A°.*

(iv) $(\lambda A)^\circ = \frac{1}{\lambda} A^\circ$, $\lambda > 0$.

(v) $\big(\bigcup_{i \in I} A_i\big)^\circ = \bigcap_{i \in I} A_i^\circ$.

(vi) $(\bigcap_{i \in I} A_i)^\circ \supset \overline{\mathrm{co}} \bigcup_{i \in I} A_i^\circ$, *wobei der Abschluss in der $\sigma(Y, X)$-Topologie zu verstehen ist.*

Beweis. Für den Beweis von (ii) bis (v) verweisen wir auf Aufgabe 4.2.3.

Wir beweisen nun (i). Dazu definieren wir für fixiertes $x \in X$ die $\sigma(Y, X)$-stetige und lineare Abbildung $\ell_x : Y \to \mathbb{R}$ durch $y \mapsto \langle x, y \rangle$. Dann sind die Mengen

$$\{y \in Y : \ell_x(y) \le 1\}, \qquad x \in A,$$

$\sigma(Y, X)$-abgeschlossen und konvex, und somit auch ihr Durchschnitt. Weil offenbar

$$\bigcap_{x \in A} \{y \in Y : \ell_x(y) \le 1\} = A^\circ,$$

folgt damit die Konvexität und $\sigma(Y, X)$-Abgeschlossenheit von A°.

Klarerweise haben wir $A \subset \overline{\mathrm{co}}\, A$, also ist nach (vi) $(\overline{\mathrm{co}}\, A)^\circ \subset A^\circ$. Sei nun $y \in A^\circ$, also gilt für alle $x_1, x_2 \in A$ dass $\langle x_1, y \rangle \le 1$ und $\langle x_2, y \rangle \le 1$ ist. Damit ist natürlich für alle $0 \le t \le 1$ die Konvexkombination $\langle t x_1 + (1 - t) x_2, y \rangle \le 1$. Somit erhalten wir

$$\langle x, y \rangle \le 1, \qquad x \in \mathrm{co}\, A.$$

Dass die obige Ungleichung auch für alle $x \in \overline{\mathrm{co}}\, A$ gilt folgt mit Argumentation über Netze, und damit erhalten wir $y \in (\overline{\mathrm{co}}\, A)^\circ$.

Zum Beweis von (vi) setzen wir zunächst $A = \bigcap_{i \in I} A_i$ und halten fest dass natürlich $A \subset A_i$ für alle $i \in I$ gilt. Mit (ii) erhalten wir daraus $A^\circ \supset A_i^\circ$, $i \in I$. Die Vereinigung über alle $i \in I$ ergibt

$$\bigcup_{i \in I} A_i^\circ \subset A^\circ,$$

und die Behauptung $\overline{\mathrm{co}} \bigcup_{i \in I} A_i^\circ \subset A^\circ$ folgt mit dem ersten Teil von (i). $\square$

Aufgabe 4.2.3. Beweisen Sie Lemma 4.2.2 (ii) bis (v).

Satz 4.2.4 (Bipolarensatz)**.** *Für ein duales Paar* (X, Y) *und* $A \subset X$ *gilt*

$$A^{\circ\circ} = \overline{\mathrm{co}}(A \cup \{0\}),$$

wobei sich der Abschluss bezüglich $\sigma(X, Y)$ *versteht.*

Beweis. Nach Lemma 4.2.2 (ii) ist $A \cup \{0\} \subset (A \cup \{0\})^{\circ\circ}$, und wegen Lemma 4.2.2 (i) sind Polare immer abgeschlossen und konvex, also erhalten wir $\overline{\mathrm{co}}(A \cup \{0\}) \subset (A \cup \{0\})^{\circ\circ}$, wobei der Abschluss in $\sigma(X, Y)$ genommen wird.

Angenommen die Inklusion ist echt, also $\overline{\mathrm{co}}(A \cup \{0\}) \subsetneq A^{\circ\circ}$, dann existiert ein $x_0 \in A^{\circ\circ}$ welches nicht V liegt, wobei $V = \overline{\mathrm{co}}(A \cup \{0\})$. Per Definition ist V konvex und $\sigma(X, Y)$-abgeschlossen, also finden wir mit Hilfe von Satz 2.3.15 ein $\sigma(X, Y)$-stetiges lineares Funktional $x^* : X \to \mathbb{R}$, welches x_0 von V trennt, i.e. es existiert ein $\alpha \in \mathbb{R}$ sodass

$$x^*(v) \leq \alpha < x^*(x_0), \qquad v \in V.$$

Insbesondere erhalten wir für $v = 0$ dass $x^*(x_0) > \alpha \geq 0$. Nach Korollar 4.1.6 ist $(X, \sigma(X, Y))^* = Y$, also existiert ein $y \in Y$ sodass $x^*(x) = \langle x, y\rangle$, $x \in X$. Kombiniert mit der obigen Ungleichung erhalten wir durch Skalierung mit $\frac{1}{\alpha}$ die Ungleichungen

$$\langle x, y\rangle \leq 1 < \langle x_0, y\rangle, \qquad x \in A.$$

Die erste Ungleichung besagt dass $y \in A^\circ$, und damit besagt die zweite dass $x_0 \notin A^{\circ\circ}$; Widerspruch. $\square$

Korollar 4.2.5. *Sei* (X, Y) *ein duales Paar und* $C \subset X$ *konvex mit* $0 \in C$*.* C *ist genau dann* $\sigma(X, Y)$*-abgeschlossen wenn es ein* $B \subset Y$ *gibt sodass* $C = B^\circ$*.*

Beweis. Falls es ein $B \subset Y$ gibt sodass $X = B^\circ$, dann ist C nach Lemma 4.2.2 (i) $\sigma(X, Y)$-abgeschlossen.

Sei nun umgekehrt $C \subset X$ konvex, $0 \in C$ und C eine $\sigma(X, Y)$-abgeschlossene Menge. Dann setzen wir $B = C^\circ$, und es gilt nach dem Bipolarensatz Satz 4.2.4 dass $B^\circ = C^{\circ\circ} = \overline{\mathrm{co}}(C \cup \{0\}) = \overline{\mathrm{co}}\, C = C$. $\square$

4.3. Der Satz von Bourbaki-Alaoglu

Satz 4.3.1 (Satz von Bourbaki-Alaoglu)**.** *Sei* U *eine Nullumgebung eines lokalkonvexen Raumes* $(X, \mathcal{T})$*. Dann ist* U° *bezüglich* $\sigma(X^*, X)$ *kompakt.*

Beweis. Zunächst stellen wir fest dass die $\sigma(X^*, X)$-Topologie auf X^* genau die Topologie der punktweisen Konvergenz auf X^* ist. Die natürliche Einbettung von $(X^*, \sigma(X^*, X))$ in den Raum Produktraum $\prod_{x \in X} \mathbb{R}$ (siehe Definition 1.4.17) ist gegeben durch die Abbildung

$$\Phi \colon (X^*, \sigma(X^*, X)) \to \Big(\prod_{x \in X} \mathbb{R}, \mathcal{P}\Big), \qquad x^* \mapsto x^*,$$

wobei $\mathcal{P}$ die Topologie der punktweisen Konvergenz auf $\mathbb{R}^X$ bezeichnet. Nach Aufgabe 1.4.20 ist die Topologie $\mathcal{P}$ exakt die Produkttopologie. Offensichtlich ist Φ injektiv. Außerdem ist Φ eine homöomorphe Einbettung von X^* in $\prod_{x \in X} \mathbb{R}$ (d.h. Φ ist stetig, und die Abbildung $\Psi : \Phi(X^*) \to X^*$, $\Phi(x^*) \mapsto x^*$ ist stetig).

Die zweite Bemerkung ist dass es für jede Nullumgebung $U \subset X$ ein $V \in \mathcal{U}_\mathcal{T}$ mit $V \subset U$ gibt, also folgt aus Lemma 4.2.2 dass $U^\circ \subset V^\circ$, und sowohl U° als auch V° sind $\sigma(X^*, X)$-abgeschlossen. Es ist mit Satz 1.4.24 leicht einzusehen dass falls V° $\sigma(X^*, X)$-kompakt ist, so ist U° als $\sigma(X^*, X)$-abgeschlossene Teilmenge ebenso $\sigma(X^*, X)$-kompakt. Deshalb können wir ohne Einschränkung annehmen dass $U \in \mathcal{U}_\mathcal{T}$.

Wir beginnen nun mit dem eigentlichen Beweis. Sei dazu $U \in \mathcal{U}_\mathcal{T}$. Wir zeigen dass $\Phi(U^\circ)$ kompakt in der Produkttopologie $\mathcal{P}$ von $\prod_{x \in X} \mathbb{R}$ ist. (Mit Aufgabe Aufgabe 1.4.25 folgt dann dass $\Psi\big(\Phi(U^\circ)\big) = U^\circ$ kompakt ist.) Nach Behauptung 2.2.1 (iv) ist U absorbierend, also existiert für jedes $x \in X$ ein $\lambda_x > 0$ sodass $\frac{x}{\lambda_x} \in U$, also gilt per Definition der Polare

$$x^*(x) \le \lambda_x, \qquad x^* \in U^\circ.$$

Falls $x \in U$, so wählen wir $\lambda_x \le 1$. Weil U nach Behauptung 2.2.1 (vi) kreisförmig ist, gilt die obige Ungleichung auch für $-x$ statt für x. Also erhalten wir

$$|x^*(x)| \le \lambda_x, \qquad x^* \in U^\circ. \tag{4.3.1}$$

Wir definieren nun für jedes $x \in X$ das in $\mathbb{R}$ kompakte Intervall $K_x = [-\lambda_x, \lambda_x]$. Dann wissen wir mit dem Satz von Tychonoff Satz 1.4.26 dass $K := \prod_{x\in X} K_x$ in *seiner* Produkttopologie $\mathcal{P}_K$ kompakt ist. Wegen (4.3.1) gilt $\Phi(U^\circ) \subset K$, also müssen wir nur mehr zeigen dass $\Phi(U^\circ)$ bezüglich $\mathcal{P}_K$ abgeschlossen in K ist.

Dazu sei $f \in \overline{\Phi(U^\circ)}^{\mathcal{P}_K}$. Weil nach Definition 1.4.7 f der punktweise Limes eines Netzes (x_i^*) linearer Funktionen ist, so ist f selbst linear und es gilt $f(x) \le \lambda_x$, $x \in X$. Weil $\lambda_x \le 1$ für alle $x \in U$, folgt

$$f(U) \subset [-1, +1].$$

Es ist leicht einzusehen dass $|f(x)| \le 2p_U(x)$ (p_U bezeichnet das Minkowskifunktional), und damit folgt aus der Stetigkeit von p_U die Stetigkeit von f bezüglich $\mathcal{T}$, d.h. $f \in X^* = (X, \mathcal{T})^*$. Also ist $f \in \Phi(U^\circ)$, und weil $f \in \overline{\Phi(U^\circ)}^{\mathcal{P}_\mathcal{K}}$ beliebig war, haben wir gezeigt dass $\Phi(U^\circ)$ abgeschlossen in der Topologie $\mathcal{P}_\mathcal{K}$ ist. Damit ist $U^\circ = \Psi(\Phi(U^\circ))$ bezüglich der Topologie $\sigma(X^*, X)$ kompakt. □

Korollar 4.3.2 (Satz von (Banach-)Alaoglu)**.** *Sei X ein normierter Raum, so ist*

$$B_{X^*} = \big\{x^* \in X^* \,:\, \|x^*\| \le 1\big\}$$

kompakt in der schwach* Topologie $\sigma(X^*, X)$.

Die folgende Bemerkung dient als Warnbeispiel.

Bemerkung 4.3.3. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n\big((x_j)_{j=1}^\infty\big) = x_n, \qquad (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell^\infty.$$

Es gilt dass $\|f_n\|_{(\ell^\infty)^*} \le 1$, $n \in \mathbb{N}$. Sei nun $\{f_{n_k}\}$ eine beliebige Teilfolge von $\{f_n\}$. Wir definieren $x = (x_j)_{j=1}^\infty$ durch

$$x_j = \begin{cases} (-1)^k & j = n_k, \\ 0 & j \notin \{n_k\}_{k=1}^\infty. \end{cases}$$

Dann gilt $x \in \ell^\infty$ und

$$f_{n_k}(x) = (-1)^k, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

D.h. wir haben gezeigt dass $\{f_n\}$ keine $\sigma((\ell^\infty)^*, \ell^\infty)$ konvergente Teilfolge besitzt.

Widerspricht Satz 1.4.24 diesem Beispiel?

Für einen normierten Raum Z bezeichnet B_Z die normabgeschlossene Einheitskugel.

Satz 4.3.4 (Satz von Goldstine)**.** *Sei X ein normierter Raum, und $J_X : X \to X^{**}$ die kanonische Einbettung von X in seinen Bidualraum X^{**}, i.e. $J_X(x) = (x^* \mapsto x^*(x))$. Dann ist $\overline{J_X(B_X)}^{\sigma(X^{**},X^*)} = B_{X^{**}}$, und somit $\overline{J_X(X)}^{\sigma(X^{**},X^*)} = X^{**}$.*

Beweis. Wir definieren $A = J_X(B_X)$ und betrachten das duale Paar (X^{**}, X^*). Wir können leicht feststellen dass $A^\circ = B_{X^*}$, und $A^{\circ\circ} = B_{X^*}^\circ = B_{X^{**}}$. Der Bipolarensatz Satz 4.2.4 ergibt dann $B_{X^{**}} = \overline{\mathrm{co}}(A \cup \{0\}) = \overline{A}^{\sigma(X^{**},X^*)}$. □

Definition 4.3.5. Sei X ein Banachraum und $J_X : X \to X^{**}$ die *kanonische Einbettung* in seinen Bidualraum X^{**}, gegeben durch $x \mapsto (x^* \mapsto x^*(x))$. Der Banachraum X heißt *reflexiv* genau dann wenn $J_X(X) = X^{**}$.

Satz 4.3.6. *Für einen Banachraum X sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) X ist reflexiv.

(ii) B_X ist $\sigma(X, X^*)$-kompakt.

Beweis. Nach Aufgabe 4.3.7 ist $J_X : (X, \sigma(X, X^*)) \to (J_X(X), \sigma(X^{**}, X^*))$ ein Homöomorphismus, d.h. sowohl J_X als auch seine Inverse ist stetig.

Wir beweisen zuerst (i)⇒(ii). Nach dem Satz von Alaoglu (Korollar 4.3.2) ist $B_{X^{**}}$ kompakt bezüglich $\sigma(X^{**}, X^*)$. Weil X reflexiv ist, ist $J_X^{-1}(B_{X^{**}})$ wohldefiniert (und zwar nicht als Urbild der Funktion J_X, sondern als Bild der Funktion J_X^{-1}), und nach der obigen Bemerkung $\sigma(X, X^*)$-kompakt.

Für die Implikation (ii)⇒(i) stellen wir fest dass $J_X(B_X)$ eine $\sigma(X^{**}, X^*)$-kompakte Menge ist (weil das stetige Bild einer kompakten Menge selbst kompakt ist, siehe Aufgabe 1.4.25). Nach Lemma 4.1.4 ist $J_X(B_X)$ somit $\sigma(X^{**}, X^*)$-abgeschlossen. Damit erhalten wir gemeinsam mit dem Satz von Goldstine (Satz 4.3.4) dass

$$J_X(B_X) = \overline{J_X(B_X)}^{\sigma(X^{**}, X^*)} = B_{X^{**}}$$

□

Aufgabe 4.3.7. Sei X ein Banachraum. Zeigen Sie dass die kanonische Einbettung $J_X : (X, \sigma(X, X^*)) \to (J_X(X), \sigma(X^{**}, X^*))$ ein Homöomorphismus ist, und dass $J_X(B_X) \subset B_{X^{**}}$ normabgeschlossen ist.

Literaturverzeichnis

[Wer11] Dirk Werner. *Functional analysis. (Funktionalanalysis.) 7th revised and expanded ed.* Springer-Lehrbuch. Berlin: Springer. xiii, 552 p. EUR 36.95; SFR 46.00 , 2011.