Skriptum zur Vorlesung

Variationsrechnung

5. August 2001

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Beispiele zur Variationsrechnung

Beispiel 1.1. (a) Klassische Mechanik (Maupertius, kleinste Wirkung):
Sei $u\colon [0,T] \to \mathbb{R}^3$, $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ Potentialfeld

$$\int_0^T \frac{1}{2}|\dot{u}(t)| - V(u(t))dt \to \min$$

(b) Optik:
$n\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ Brechungsindex

$$\int_0^1 \frac{|u'(t)|}{n(t)}dt \to \min$$

wobei $u(0) = A,\ u(1) = B$ erfüllt sein soll.

(c) Kontinuumsmechanik:
$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3, \mathbf{u}\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ Deformation des Körpers, W gespeicherte Energie

$$\int_\Omega W(D\mathbf{u})\,dx \to \min$$

(d) Elektrostatik:
$p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ Ladungsverteilung
Elektrostatisches Potential

$$\int |\nabla u(x)|^2 - \rho(x)u(x)\,dx \to \min$$

$$\Delta u(x) = \rho(x)$$

(Elliptischer Differentialoperator)

1.2 Die Euler–Lagrange Gleichungen

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, ∂U glatt

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U &\to \mathbb{R} \\ (p_1,\dots,p_n,z,x_1,\dots,x_n) &\mapsto L(p_1,\dots,p_n,z,x_1,\dots,x_n) \end{aligned}$$

Frage: Sei $\mathcal{A} := \{w|_{\partial U} = g\}$

$$I(u) := \int_U L(Du(x),u(x),x)\,dx \tag{1.1}$$

Welche Eigenschaften erfüllt u, wenn

$$I(u) = \inf_{w\in\mathcal{A}} I(w)$$

Antwort:
u erfüllt die Euler–Lagrange Gleichungen:

$$\sum_{i=1}^n \left[L_{p_i}(\nabla u,u,x)\right]_{x_i} + L_z(\nabla u,u,x) = 0 \tag{1.2}$$

wobei $L_{p_i} := \frac{\partial}{\partial p_i}L$, $L_z := \frac{\partial}{\partial z}L$

Spezialfälle:

(a) $L(p,z,x) = \frac{1}{2}|p|^2 = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^n p_i^2$
$L_{p_i} = p_i \qquad L_z = 0 \qquad I(w) = \int_\Omega |\nabla w(x)|^2\,dx$
$I(u) = \min\limits_{w\in\mathcal{A}} I(w) \Rightarrow \Delta u = 0$

(b) $L(p,z,x) = \frac{1}{2} \sum\limits_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) p_i p_j - z f(x)$
$L_{p_i} = \sum a^{ij}(x) p_j \qquad \text{für } i = 1, \dots, n$
$L_z = f(x)$
$I(w) = \frac{1}{2} \int_U \sum\limits_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) w_{x_i}(x) w_{x_j}(x) - w(x) f(x)$
$\sum\limits_i \big(\sum\limits_{j=1}^{n} a^{ij}(x) w_{x_j} \big)_{x_i} x = f(x)$
$\operatorname{div} \big(A(x) \operatorname{grad} u \big) = f(x)$

(c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad F(z) = \int_0^z f(y) dy$
$L(p,z,x) = \frac{1}{2} |p|^2 - F(z)$
$L_{p_i} = p_i \qquad L_z = f(z)$
$I(w) = \int \frac{1}{2} |\nabla w|^2 - F(w) \, dx I(w) = \min_{w \in \mathcal{A}} I(w)$
$\Delta u = f(u)$

Welche Bedingungen an L garantieren die Existenz eines Minimums für I wie in (1.1)? Also mit

$$I(w) := \int_\Omega L(Dw(x), w(x), x) \, dx$$

Notation 1.2. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \qquad \boldsymbol{u} = (u^1, \dots, u^m) \colon \Omega \to \mathbb{R}^m$
$\nabla \boldsymbol{u} = (\partial^j u^k)_{j=1}^{m} {}_{k=1}^{n}$

Antwort: $f \colon \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{nm} \to \mathbb{R}$ sei

(a) meßbar bez. 1. Komponente

(b) stetig bez. 2. und 3. Komponente

(c) $f(x, \xi, \cdot)$ konvex

$$\begin{aligned} I \colon W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m) &\to \overline{\mathbb{R}^+} \\ \boldsymbol{u} &\mapsto \int_\Omega f(x, \boldsymbol{u}(x), \nabla \boldsymbol{u}(x)) \, dx \end{aligned}$$

ist W_p^1 schwach–folgen–unterhalbstetig

(d) $f(x, \xi, \eta) \geq \alpha |\eta|^p - \beta |\xi|^q$ für $x \in \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{nm}, q < p$

Dann ist $I \colon W^{1,p}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}^+}$ koerziv.

2 Topologische Grundbegriffe

Lemma 2.1 (Fundamentallemma der Variationsrechnung). *Sei E Banachraum (z.B: $L^p(\Omega)$, $W^{1,p}(\Omega)$, $W^{1,p}(\partial\Omega)$), $X \subset E$ sei schwach–folgenkompakt. $I\colon X \to \mathbb{R}$ sei schwach–folgen–unterhalbstetig.*
Dann gilt:

$$\exists u \in X\colon I(u) = \inf_{w \in X} I(w).$$

Lemma 2.2. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ kompakt, $f\colon A \to \mathbb{R}$ unterhalbstetig (uhst.).*
Dann gilt:

$$\exists a \in A\colon f(a) = \min_{x \in A} f(x)$$

Beweis. f uhst. $\Leftrightarrow$

$$(x_n \to x) \Rightarrow f(x) \leq \liminf f(x_n)$$

Wähle $x_n \in A$ sodaß

$$f(x_n) < \begin{cases} \inf_{x \in A} f(x) + \frac{1}{n} & \text{falls } \inf_{x \in A} > -\infty, \\ -n & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da A kompakt folgt

$$\exists (x_{n_j}) \subseteq (x_n)\colon \lim_{j \to \infty} x_{n_j} = a$$

und damit die Behauptung:

$$f(a) \underset{uhst.}{\leq} \liminf f(x_{n_j}) = \inf_{x \in A} f(x)$$
$$f(a) = \inf_{x \in A} f(x)$$

■

Definition 2.3. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$. $\operatorname{Dom} f := \{x \in \mathbb{R} | f(x) < \infty\}$.
$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt koerziv, falls $f(x) \to \infty$ für $|x| \to \infty$.

Lemma 2.4. *Folgende Bedingungen seine erfüllt:*

(a) $A \subseteq \mathbb{R}$, *abgeschlossen.*

(b) $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$, $\operatorname{Dom} f \neq \emptyset$.

(c) f *ist koerziv.*

(d) f *ist unterhalbstetig.*

Dann gilt:

$$\exists a \in A\colon f(a) = \inf_{x \in A} f(x)$$

Beweis. Aus (b) folgt

$$\exists x_0 \in A\colon f(x_0) < \infty$$

aus (c)

$$\exists R \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\colon |x| \geq R \Rightarrow f(x) > f(x_0) + 1$$

und aus (a)

$$A_R := \{x \in A \big| \ |x| \leq R\}$$

ist kompakt.
Damit folgt aus Lemma 2.2, daß $f_R\colon A_R \to \mathbb{R}$ ein Minimum besitzt also

$$\exists a \in A_R \subset A\ \forall x \in A_R\colon f(a) \leq f(x). \tag{2.1}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} &\forall x_0 \in A_R\colon f(x_0) \geq f(a) \\ &\forall z \in A \backslash A_R\colon f(z) \geq f(x_0) + 1 \geq f(a) + 1 \\ &\forall z \in A \backslash A_R\colon f(z) \geq f(a) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Aus (2.1) und (2.2) folgt nun

$$\forall w \in A\colon f(a) \le f(w)$$

. ■

Bemerkung 2.5. Sei $I\colon W^{1,p} \to \mathbb{R}, w \mapsto \int L(\Delta w, w, x)\,dx$. Gesucht sind nun hinreichende Bedingungen an L, sodaß I unterhalbstetig bzw. koerziv ist.

Unser Ziel werden nun folgende Aussagen sein:

- Sei X normiert, $B \subseteq X'$ normbeschränkt und in X' abgeschlossen ($b_n \in B, b_n \xrightarrow{X'} b \Rightarrow b \in B$). Dann ist B $\sigma(X', X)$–kompakt.
- X ist reflexiv $\Leftrightarrow B_{\|\cdot\|_X}$ ist $\sigma(X, X')$–kompakt.

Definition 2.6. $E \neq \emptyset$ heißt Topologischer Raum , wenn zu jedem $x \in E$ der Umgebungsfilter $\mathcal{U}(x)$ definiert ist, wobei $\mathcal{U}(x)$ folgenden Axiomen genügt:

($\mathcal{U}$ 1) $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{P}(x)$

($\mathcal{U}$ 2) $U \in \mathcal{U}(x)\colon x \in U$

($\mathcal{U}$ 3) $U \in \mathcal{U}(x),\ V \supset U \Rightarrow V \in \mathcal{U}(x)$

($\mathcal{U}$ 4) $U, V \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow V \cap U \in \mathcal{U}(x)$

($\mathcal{U}$ 5) $\forall U \in \mathcal{U}(x)\ \exists V \in \mathcal{U}(x)\ \forall y \in V\colon U \in \mathcal{U}(y)$

Definition 2.7. (a) Die Topologie τ, die von $\{\mathcal{U}(x), x \in E\}$ definiert wird ist gegeben durch

$$\bigcup_{x \in E} \mathcal{U}(x).$$

(b) Umgebungsbasis: $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{U}(x)\colon \forall U \in \mathcal{U}(x)\ \exists B \in \mathcal{B}(x)\colon B \subseteq U$

Beispiel 2.8.

$$E =]0,1[\tag{2.3}$$

$$\mathcal{B}(x) = \left\{ \left] x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right[\middle| n \in \mathbb{N} \right\} \tag{2.4}$$

$$\mathcal{U}(x) = \left\{ J \middle| J \text{ ist Obermenge einer offenen Teilmenge von }]0,1[\text{, die } x \text{ enthält} \right\} \tag{2.5}$$

Definition 2.9. Eine Menge $O \subset E$ heißt offen im Topologischen Raum (E, τ) :$\Leftrightarrow$

$$\forall x \in O\ \exists B \in \mathcal{B}(x)\colon B \subset O$$

$$\mathcal{O} := \{O \subseteq E \big| O \text{ ist offen in } (E, \tau)\}.$$

Es gelten folgende Axiome:

($\mathcal{O}$ 1) $E \in \mathcal{O},\ \emptyset \in \mathcal{O}$

($\mathcal{O}$ 2) $A_\alpha \in \mathcal{O}, \alpha \in M\colon A := \bigcup_{\alpha \in M} A_\alpha \in \mathcal{O}$

($\mathcal{O}$ 3) $O_1, O_2, \ldots, O_n \in \mathcal{O} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n O_i \in \mathcal{O}$

Sei $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(E)$ mit $\mathcal{O}(1)$ - $\mathcal{O}(3)$. Dann existieren eindeutig bestimmte Umgebungsfilter $\{\mathcal{U}(x) \big| x \in E\}$ (und somit τ), sodaß
$\tilde{\mathcal{O}} = \{O \big| O \text{ ist offen in } (E, \tau)\} = \mathcal{O}$

Definition 2.10. $x \in E$ heißt Berührpunkt von $G \subset E$:$\Leftrightarrow$

$$\forall U \in \mathcal{B}(x)\colon U \cap G \neq \emptyset$$

$$\overline{G} = \{x \in E \big| x \text{ ist Berührpunkt von G}\}$$

$$G = \overline{G} :\Leftrightarrow G \text{ ist abgeschlossen}$$

Satz 2.11. *Es gilt:* $G \subset E$ *ist abgeschlossen* $\Leftrightarrow E \setminus G$ *ist offen in* (E,τ).
$\mathcal{A} := \big\{G \in E \big| G$ *ist abgeschlossen in* $(E,\tau)\big\}$ *erfüllt:*

($\mathcal{A}$ *1)* $\emptyset, E \in \mathcal{A}$ *(also abgeschlossen).*

($\mathcal{A}$ *2)* $A_\alpha, \alpha \in M \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcap_{\alpha\in M} A_\alpha \in \mathcal{A}$ *(abgeschlossen).*

($\mathcal{A}$ *3)* $A_1, A_2, \cdots, A_N \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^N A_i \in \mathcal{A}$ *(abgeschlossen).*

Beweis. Der Beweis folgt sofort aus Definition 2.10. ■

Definition 2.12 (Schwache Konvergenz). $x_n \in E, x \in E$: $x_n \xrightarrow{(E,\tau)} x :\Leftrightarrow$

$$\forall U \in \mathcal{B}(x)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 \in \mathbb{N}: x_n \in U.$$

Beispiel 2.13. Sei E normiert, $\mathcal{B}(x) := \left\{\left\{y \in E : \|x-y\| < \frac{1}{K}\right\}, K \in \mathbb{N}\right\}$.
Dann stimmen schwacher und starker Konvergenzbegriff überein.

Bemerkung 2.14. $x_n \xrightarrow{(E,\tau)} x \Rightarrow x$ ist Berührpunkt der Menge $\big\{x_n \big| n \in \mathbb{N}\big\}$ in (E,τ).

Definition 2.15 (Stetigkeit in Topologischen Räumen). Seien $(E,\tau), (F,\sigma)$ Topologische Räme.
$f\colon E \to F$ heißt stetig $:\Leftrightarrow$

$$\forall V \text{ offen in } (F,\sigma)\colon f^{-1}\text{offen in } (E,\tau)$$
$$\Leftrightarrow \forall x\ \forall V \in B_F\big(f(x)\big)\ \exists U \in B_E(x)\colon f(U) \subset V$$

Bemerkung 2.16. (vgl. Analysis I)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ stetig} :\Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : |w-x| < \delta \Rightarrow |f(w) - f(x)| < \varepsilon$$
$$\forall \underbrace{]f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon[}_{V}\ \exists \underbrace{]x-\delta, x+\delta[}_{U}:\ w \in \underbrace{]x-\delta, x+\delta[}_{U} \Rightarrow f(w) \in \underbrace{]f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon[}_{V}$$

Definition 2.17 (Folgenstetigkeit). $f\colon E \to F$ heißt τ–σ–folgenstetig:$\Leftrightarrow$

$$\forall (x_n) \in E^{\mathbb{N}} : x_n \xrightarrow{\tau} x \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{\sigma} f(x)$$

Definition 2.18. Sei E normiert, E' bezeichne den Dualraum von E, $\varepsilon > 0$, $X_1', X_2', \ldots, X_n' \in E'$, $x_0 \in E$.

$$\begin{aligned}\mathcal{U}^{\varepsilon}_{X_1',\cdots,X_n'}(x_0) &:= \big\{x \in E \big|\ \forall i \le n : |X_i'(x) - X_i'(x_0)| < \varepsilon\big\}\\ \mathcal{B}(x_0) &:= \Big\{\mathcal{U}^{\varepsilon}_{X_1',\cdots,X_n'(x_0)} \Big|\ n \in \mathbb{N},\ X_1', \cdots, X_n' \in E', \varepsilon > 0\Big\}\end{aligned}$$

$\big\{\mathcal{B}(x_0) \big| x_0 \in E\big\}$ ist die Umgebungsbasis der schwachen $\sigma(E,E')$ Topologie (schwache Topologie auf E).

Definition 2.19. Sei $X' \in E', x_1, \ldots, x_n \in E,\ \varepsilon > 0$.

$$\mathcal{B}(X') := \Big\{\big\{Z' \in E' \big| |Z'(x_i) - X'(x_i)| < \varepsilon\big\} \Big| n \in \mathbb{N}, x_1, \cdots, x_n \in E, \varepsilon > 0\Big\}$$

$\big\{\mathcal{B}(X') \big| X' \in E'\big\}$ ist die Umgebungsbasis der $\sigma(E',E)$ Topologie (schwach–*–Topologie).

Definition 2.20. Sei $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}, M \subset E$. Dann heißt $\big\{G \big| G \in \mathcal{S}\big\}$ offene Überdeckung von $M :\Leftrightarrow$

$$M \subset \bigcup_{G\in\mathcal{S}} G$$

$\mathcal{S}' \subset \big\{G \big| G \in \mathcal{S}\big\}$ heißt Teilüberdeckung $:\Leftrightarrow$

$$M \subset \bigcup_{G\in\mathcal{S}'} G$$

Definition 2.21. $K \subset E$ heißt τ–kompakt $:\Leftrightarrow$
Jede offene Überdeckung $\mathcal{S}$ von K besitzt eine <u>endliche</u> Teilüberdeckung.

Satz 2.22. *Sei $f\colon K \to \mathbb{R}$ $(\tau, |\cdot|)$ stetig.*

$$K \textit{ kompakt} \Rightarrow \exists a, b \in K\colon f(a) = \sup_{x\in K} f(x) \qquad f(b) = \inf_{x\in K} f(x)$$

Satz 2.23. *Sei E' der Dualraum von E.*

(a) $\left\{X_i' \middle| \|X_i'\|_{E'} \le 1\right\}$ *ist $\sigma(E', E)$ kompakt.*

(b) $\left\{X' \middle| \|X'\|_{E'} \le 1\right\}$ *ist $\|\cdot\|$ kompakt* $\Leftrightarrow \dim E < \infty$.

Beispiel 2.24. Die Räume $W^{k,p}(\Omega), l^p, L^p(\Omega)$ sind reflexiv für $1 < p < \infty$ aber nicht reflexiv für $p \in \{1, \infty\}$. $C^k(\Omega)$ ist nicht reflexiv.

Notation 2.25.

$$W^{k,p}(\Omega) := H^k(\Omega)$$

H^k sind Hilberträume.

Definition 2.26. Sei $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Dom} f \quad &:= \quad \left\{x \in X \;\middle|\; f(x) \neq \infty\right\}\\
f \text{ heißt eigentlich} \quad &:\Leftrightarrow \quad \operatorname{Dom} f \neq 0\\
f \text{ heißt koerziv} \quad &:\Leftrightarrow \quad \|x\| \to \infty \Rightarrow f(x) \to \infty\\
f \text{ heißt } \tau\text{–folgen–uhst.} \quad &:\Leftrightarrow \quad x_n \to x \Rightarrow f(x) \le \liminf f(x_n)
\end{aligned}$$

Lemma 2.27 (Fundamentallemma). *Sei E reflexiver Banachraum, $X \subseteq E$ schwach–abgeschlossen, $f\colon X \to \{\mathbb{R} \cup \infty\}$ koerziv und schwach–folgen–uhst,* $\operatorname{Dom} f \neq \emptyset$. *Dann gilt*

$$\exists x_0 \in X\colon f(x_0) = \inf_{x\in X} f(x)$$

3 Unterhalbstetigkeit von Integraloperatoren

Im Folgendem sei stets $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \boldsymbol{u} = (u^1, \dots, u^N) \colon \Omega \to \mathbb{R}^N,\ J(\mathbf{u}) = (\nabla u^1, \dots, \nabla u^N)$
mit $\nabla u^i = (\partial_{x_1} u^i, \dots, \partial_{x_n} u^i)^T$

In diesem Kapitel wird unser Ziel folgendes Theorem sein:

Theorem 3.1. *Sei Ω offen, $1 < p < \infty, f \colon \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{nN} \to \mathbb{R}$ meßbar in 1. Komponente, stetig in 2. und 3. Komponente, $f(x, \xi, \cdot) \colon \eta \to f(x, \xi, \eta)$ konvex.*

$$I(u) := \int_\Omega f\big(x, u(x), \nabla u(x)\big)\, dx$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} I \colon W^{1,p}(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto I(u) \end{aligned}$$

ist $\sigma\big(W^{1,p}(\Omega), W^{1,p'}(\Omega)\big)$–folgen–unterhalbstetig.
Erfüllt f zusätzlich noch

$$f(x, \xi, \eta) \geq \alpha|\eta|^p - \beta|\xi|^q$$

mit $q < p$, so ist

$$I \colon W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

koerziv.

3.1 Unterhalbstetigkeit von Integralen

Definition 3.2. Sei (Ω, μ) Maßraum, X, Y topologische Räume

(a) $f \colon \Omega \times X \to Y$ erfülle

  i) $f(\cdot, x) \to Y \colon \omega \mapsto f(\omega, x)$ ist meßbar.

  ii) $f(\omega, \cdot) \to Y \colon x \mapsto f(\omega, x)$ ist stetig.

  Dann heißt f Caratheodory–Funktion.

(b) Sei $u : \Omega \to X$.

$$\begin{aligned} F \colon X^\Omega &\to Y^\Omega \\ u &\mapsto (\omega \mapsto f(\omega, u(\omega)) \end{aligned}$$

  heißt Superpositionsoperator, Einsetzungsoperator.

Bemerkung 3.3. $f(\omega, u(\omega)) = F(u)(\omega)$

Satz 3.4. *Sei $f : \Omega \times X \to \mathbb{R}^m$ Caratheodory–Funktion und $u : \Omega \to X$ meßbar bzgl. (Ω, μ). Dann ist $F(u) : \Omega \to \mathbb{R}^m$ meßbar bzgl. (Ω, μ).*

Beweis. oBdA. $m = 1$.

u ist Limes meßbarer Treppenfunktionen u_k mit $u_k = \sum_{j=1}^{m_k} \overbrace{\mathbb{1}_{A_{k_j}} x_{k_j}}^{v_j :=}$, wobei $x_{k_j} \in \mathbb{R}, A_{k_j}$ paarweise disjunkt (pwd.) und μ-meßbar. $u_k(\omega) \to u(\omega)$
Es gilt

(a) $F(u_k)$ ist meßbar

(b) $F(u)(\omega) = \lim_{k\to\infty} F(u_k)(\omega)$

ad (a)

$$F(v_k)(\omega) = F(x_{k_j}\mathbb{1}_{A_{k_j}})(\omega)$$

$$f(\omega, v_k(\omega)) = \begin{cases} f(\omega, x_j) & \text{falls } \omega \in A_{k_j} \\ f(\omega, 0) & \text{falls } \omega \notin A_{k_j} \end{cases}$$

Es gilt:

$$\underbrace{f(\omega, \overbrace{x_{k_j}}^{\text{fix}})}_{\text{meßbar in } \omega} \overbrace{\mathbb{1}_{A_{k_j}}(\omega)}^{\text{meßbar in } \omega} + \underbrace{f(\omega, 0)}_{\text{meßbar in } \omega} \overbrace{\mathbb{1}_{A^c_{k_j}}(\omega)}^{\text{meßbar in } \omega}$$

damit gilt:

$$F\left(\sum_{j=1}^{m} v_j\right)(\omega) = \sum_{j=1}^{m} f(\omega, x_{k_j})\mathbb{1}_{A_{k_j}} + f(\omega, 0)\mathbb{1}_{[\bigcup A_j]^C}$$

ist meßbar.
ad (b) Folgt aus der Stetigkeit in der 2. Komponente. ■

3.2 Lokale Integrierbarkeit, Dualität

Definition 3.5. (Ω, μ) σ–kompakter Maßraum, $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, K_n kompakt.
$u \colon \Omega \to \mathbb{R}$ μ–meßbar,

$$\|u\|_{p,K} := \left(\int_K |u|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$L^p_{lok}(\Omega) := \left\{u \colon \Omega \to \mathbb{R} \middle| u \text{ ist } \mu\text{–meßbar} \wedge \forall K \subseteq \Omega \text{ kompakt} \colon \|u\|_{p,K} < \infty\right\}$$

Eine Metrik auf $L^p_{lok}(\Omega)$ für $1 < p < \infty$ ist definiert durch

$$d(u, v) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|u - v\|_{p,K_n}}{2^n(1 + \|u - v\|_{p,K_n})}.$$

Mit $u \in L^p_{lok}(\Omega)$ gilt:

$$(\operatorname{supp} U)^C = \left\{\omega \in \Omega \middle| \exists U \subset \Omega \text{ offen}, \omega \in U, \ \forall \varphi \colon U \to \mathbb{R}, \text{stetig} \colon \int_\Omega u\varphi \, d\mu = 0\right\}$$

$$L^p_c(\Omega) := \left\{u \in L^p_{lok}(\Omega, \mathbb{R}) \middle| \operatorname{supp} u \text{ ist kompakt}\right\}$$

Satz 3.6. *Mit den Bezeichnungen von Definition 3.5 gilt:*

(a) $\left(L^p_{lok}(\Omega)\right)'$ „=" $L^q_c(\Omega)$ *für* $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

(b) $T : L^p_{lok}(\Omega) \to E, E$ *normiert ist stetig* $\Leftrightarrow$

$$\exists c \in \mathbb{R} \ \exists K \subseteq \Omega \ \forall x \in K \colon \|Tx\| \leq c\|x\|_{p,K}$$

(c) Sei $v \in L^q_c(\Omega), u \in L^p_{lok}(\Omega)$. *Ein Skalarprodukt ist definiert durch:*

$$\langle v, u\rangle = \int_\Omega v(\omega)u(\omega) \, d\mu(\Omega)$$

Beweis. Beweis von (a)

$$T \in (L^1_{lok})' \Rightarrow \exists c \ \exists K \colon |Tu| < c\|u\|_{p,k}$$

$$\operatorname{supp} u \cap K = \emptyset \Rightarrow Tu = 0$$

$$T \in \left(L^p(K)\right)' \Rightarrow \exists v \in L^q(K) \ \forall u \in L^p(K) \colon Tu = \int_K vu = \int_{Omega} (\mathbb{1}_K v)u$$

$$\forall u \in L^p_{lok}(\Omega)\colon Tu = \int (\mathbb{1}_K v)u,$$

weil

$$\begin{aligned} u \in L^p_{lok}(\Omega) &= u\mathbb{1}_K + (1-\mathbb{1}_K)u, \\ Tu &= T\big(u\mathbb{1}_K\big) + T\big(u(1-\mathbb{1}_K)\big) \end{aligned}$$

Also ist jedes $T \in \big(L^p_{lok}(\Omega)\big)'$ durch $v \in L^q_c(\Omega)$ gegeben. Umgekehrt ist auch jedes $v \in L^q_c$ durch ein $T \in \big(L^p_{lok}(\Omega)\big)$ gegeben, weil

$$v \in L^q_c(\Omega) \Rightarrow \exists K\colon \operatorname{supp} v \subset K \wedge \mu(K) < \infty$$

$$\begin{aligned} \frac{\langle u, v\rangle}{\mu(K)} &= \int_K uv \frac{d\mu}{\mu(K)} \\ &\leq \|u\|_{L^p\left(K \frac{d\mu}{\mu(K)}\right)} \|v\|_{L^q\left(K \frac{d\mu}{\mu(K)}\right)} \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} S\colon L^p_{lok}(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \int_K uv\, d\mu \end{aligned}$$

erfüllt

$$\exists C\ \exists K\colon |S(u)| \leq C\|u\|_{p,K}$$

Damit folgt $S \in \big(L^p_{lok}(\Omega)\big)'$.
Es gilt mit $q \geq p, X \subset Y, \Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ offen

$$\left.\begin{matrix} C(\Omega, \mathbb{R}^n) \hookrightarrow \\ L^\infty_{lok}(\Omega, \mathbb{R}^n) \hookrightarrow \end{matrix}\right\} L^q_{lok}(\Omega, \mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p_{lok}(\Omega, \mathbb{R}^n)$$

$$(X, d_1) \hookrightarrow (Y, d_2) \Leftrightarrow f \mapsto f \qquad \text{ist stetig}$$

■

Bemerkung 3.7.

$$\begin{aligned} L^\infty(\Omega) \not> L^q(\Omega) \not> L^p(\Omega) \not> L^1(\Omega) \\ L^\infty(\Omega) \not\leq L^q(\Omega) \not\leq L^p(\Omega) \not\leq L^1(\Omega) \end{aligned}$$

$I\colon W^{1,p} \to \mathbb{R}$ schwach–folgen–unterhalbstetig

$$|\nabla u|^p \in \begin{cases} L^1(\Omega) & u \in W^{1,p}(\Omega) \\ L^1_{lok}(\Omega) & u \in W^{1,p}_{lok}(\Omega) \end{cases}$$

Satz 3.8 (Hauptsatz 1). *Seien $X \subseteq \mathbb{R}^N, Y \subseteq \mathbb{R}^N$ konvex und abgeschlossen, $\varphi\colon \Omega \times (X \times Y) \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \varphi(\omega, x, y)$ Caratheodoryfunktion und konvex $\forall \omega, x$.*
$I(u, v) = \int_\Omega \varphi(\omega, u(\omega), v(\omega))\, d\mu$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} I\colon \Big(\big(L^1_{lok}(\Omega), d_1\big) \times \big(L^1_{lok}(\Omega), \sigma(L^1, L^\infty)\big)\Big) &\to \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto I(u, v) \end{aligned}$$

ist folgen–unterhalbstetig. Das heißt:

$$(x_n \xrightarrow{L^1_{lok}} x \wedge y_n \xrightarrow{L^1_{lok}} y) \Rightarrow I(x, y) \leq \liminf I(x_n, y_n)$$

Satz 3.9 (abgeschlossene Graphen). *Seien X, Y Banachräume, $T\colon X \to Y$ linear.*
$\big\{(x, Tx)\big| x \in E\big\} \subseteq X \times Y$ ist abgeschlossen $\Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} x_n \xrightarrow{n \to \infty} x \\ y_n \xrightarrow{n \to} y \end{bmatrix} \Rightarrow Tx = y$$

Bemerkung 3.10. $T\colon X \to Y$ bijektiv, stetig ($\|Tx\| \le C\|x\|$) $\Rightarrow$

$$T^{-1}\colon Y \to X \text{ ist stetig.}$$

Es gilt also wieder $\|T^{-1}y\| \le C\|y\|$. Es folgt

$$\exists C \forall x\colon \frac{1}{C}\|x\|_X \le \|Tx\|_Y \le C\|x\|_X$$

$$\Gamma_T := \big\{(x,Tx)\big| x \in X\big\} \text{ ist abgeschlossen in } X \times Y.$$

$$\Gamma_{T^{-1}} := \big\{(T^{-1}y,y)\big| y \in Y\big\} \text{ ist abgeschlossen in } Y \times X.$$

Siehe zu diesem Thema auch [6].

Satz 3.11. *Sei X Banachraum, X^* der Dualraum von X. Weiters sei (x_n) Folge in X, sodaß*

$$\forall x^* \in X^*\colon x^*(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} x^*(x) \text{ also } x_n \rightharpoonup x in\ X$$

Dann gilt:

$$\|x\|_X \le \limsup \|x_n\|.$$

Die Abbildung $Id\colon (X,w) \to (X, \|\cdot\|)$ ist also folgen–unterhalbstetig.

Beweis. Die Abbildung

$$\begin{aligned} T : X^* &\to C \\ x^* &\mapsto x^*(x_n) \end{aligned}$$

ist laut Voraussetzung wohldefinert.

$$\left.\begin{aligned} x_k^* &\xrightarrow{k\to\infty} x_\infty^* \\ Tx_k^* &\xrightarrow{k\to\infty} y \end{aligned}\right] \Rightarrow Tx_\infty^* = y$$

Also ist der Graph von T abgeschlossen. Mit Satz 3.9 folgt sofort $\|T\| < \infty$. Andererseits gilt mit dem Satz von Hahn-Banach:

$$\begin{aligned} \|x\|_X &= \sup_{x^*\in X^*} \big\{x^*(x)\big| \|x^*\| \le 1\big\} \\ &= \sup_{x^*\in X^*} \lim_{n\to\infty} \big\{x^*(x_n)\big| \|x^*\| \le 1\big\} \\ &\le \sup_{x^*\in B_{X^*}} \sup_{n\in\mathbb{N}} x^*(x_n) = \sup_{x^*\in B_{X^*}} \|Tx^*\|_C \end{aligned}$$

■

Beweis von Hauptsatz 1. Mit den Voraussetzungen des Satzes gilt $u \in L^1_{lok}(\Omega), v \in L^1_{lok}(\omega)$,

$$I(u,v) := \int_\Omega \Phi(u,v)\, d\mu(\omega)$$

mit

$$\Phi(u,v)(\omega) := \varphi(\omega, u(\omega), v(\omega)).$$

Wobei $\varphi > 0$ und $\varphi(\omega, v(\omega), \cdot)$ konvex ist auf $\mathbb{R}^{nN}$. Zu zeigen ist

$$\left.\begin{aligned} u_n &\to u \text{ in } L^1_{lok} \\ v_n &\rightharpoonup w \text{ in } L^1_{lok} \end{aligned}\right\} \Rightarrow I(u,v) \le \liminf_{n\to\infty} I(u_n,v_n)$$

Schritt 1) Reduktion: Satz 3.8 ist wahr, wenn $\forall K \subseteq \Omega$, K kompakt gilt:

$$\left.\begin{aligned} I_k\colon L^1(K) \times (L^1(K), \omega) &\to \mathbb{R}^+ \\ (u,v) &\mapsto \int_K \Phi(u,v)\, d\mu \end{aligned}\right] \text{ist folgen unterhalb stetig.} \tag{3.1}$$

Beweis von (1) Falls $K \subset L \subset\subset \Omega$

$$I_K(\Phi(u,v)) \le I_L(\Phi(u,v)) \qquad \text{,weil } \Phi > 0$$

Mit Voraussetzung gilt $\Omega = \bigcup K_n, K_n \subset K_{n+1}$ kompakt. Mit Satz von der Monotonen Konvergenz gilt

$$I(u,v) = \lim_{n\to\infty} I_{K_n}(u,v) = \sup_{n\in\mathbb{N}} I_{K_n}(u,v).$$

Es gilt immer:

$$\left.\begin{aligned} f_n \text{ unterhalbstetig} \\ f = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow f \text{ unterhalbstetig} \tag{3.2}$$

mit $f_n\colon T \to \mathbb{R}$.
Beweis von (3.2) Sei x_k Folge in K, $x_k \to x$

$$\begin{aligned} f_n(x) \le \liminf_{k\in\mathbb{N}} f_n(x_k) \Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) &\le \sup\left[\liminf_{k\in\mathbb{N}} f_n(x_k)\right] \\ &\le \liminf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x_k) \end{aligned}$$

Schritt 2) Sei oBdA. Ω kompakt. Wähle

$$\begin{aligned} u_j &\to u \quad \text{in } L^1(\Omega) \\ v_j &\rightharpoonup v \quad \text{in } L^2(\Omega) \end{aligned}$$

sodaß

$$I(u,v) \le \liminf_{j\to\infty} I(u, v_j).$$

Sei $\varepsilon > 0, L := \underline{\lim}\, I(u,v_j)$, wobei $\underline{\lim} := \liminf$. Bestimme Teilfolge (v_{j_k}) von (v_j), oBdA. (v_j) selbst, sodaß

$$I(u,v_j) \le L + \varepsilon.$$

$$\exists J_{1,\dots,n}\ \exists \alpha_j^l \in J_l,\ \alpha_j^l \ge 0,\ \sum_{j\in J_l} \alpha_j^l = 1\ \exists v \in L^1\colon \underbrace{\sum_{j\in J_l} v_j \alpha_j^l}_{w_l} \xrightarrow[l\to\infty]{\|\cdot\|_{L^1(K)}} v$$

$$\Phi(u, w_l) \le \sum_{j\in J_l} v_j \alpha_j^l \Phi(u, v_k),\ \text{da } \Phi \text{ konvex in der 2. Variable}$$

$$\int \Phi(u,w_l) \le \underbrace{\sum_{j\in J_l} \alpha_j^l}_{=1} \underbrace{\int \Phi(u,v_j)}_{I(u,v_j)} \le L + \varepsilon$$

Schritt 3) Aus $w_l \xrightarrow{L^1} v$ folgt, daß eine Teilfolge (w_{l_k}) von (w_l) existiert, sodaß $w_l \xrightarrow{l\to\infty} v$ fast überall.

$$I(u,v) = \int \Phi(u,v) = \int \underline{\lim}\, \Phi(u,w_l) \le \underline{\lim} \underbrace{\int \Phi(u,w_l)}_{\le L+\varepsilon}$$

$$\begin{aligned} u_k &\xrightarrow{L^1} u \quad L^1(\Omega),\ \Omega \text{ kompakt} \\ v_k &\rightharpoonup v \qquad\qquad\quad L^1(\Omega) \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\exists(n_k)\ \forall\delta>0\colon \mu\Big(\big\{\omega\ \big||\Phi(u_{n_k},v_{n_k})(w)-\Phi(u,v_{n_k})(\omega)|>\delta\big\}\Big)\xrightarrow{k\to\infty}0$$

Beweis: Annahme

$$\text{Teilfolge }\exists\delta>0\ \exists\varepsilon>0\colon \varliminf_{n\to\infty}\mu\big\{\omega\big||\Phi(u_n,v_n)-\Phi(u,v)|>\delta\big\}>\varepsilon$$

$$v_n\rightharpoonup v \text{ in } L^1\Rightarrow\exists C\ \forall n\colon \|u_n\|_{L^1}\le C$$

$$\exists K(C,\varepsilon)\colon\ \big\{\omega\big||v_n(\omega)|>K\big\}\le\frac{\|v_n\|}{K}\le\frac{C}{K}\le\frac{\varepsilon}{4}$$

$$\hat\Omega_n:=\Omega_n\setminus\big\{\omega\big||v_n(\omega)|>K\big\}$$

$$\exists n_0\ \forall n>n_0\colon \mu(\hat\Omega_n)\ge\mu(\Omega_n)-\mu\left(\big\{\omega\big||v_n(\omega)|>K\big\}\right)\ge\varepsilon-\frac{\varepsilon}{4}=\frac{3\varepsilon}{4}$$

$$\Omega^\infty:=\bigcap_{n=n_0}^{\infty}\underbrace{\bigcup_{k\ge n}\hat\Omega_k}_{\mu(\cdot)\ge\frac{3\varepsilon}{4}}\Rightarrow\mu(\Omega^\infty)\ge\frac{3\varepsilon}{4}$$

Es gilt

$$u_k\xrightarrow{L^1}u\Rightarrow\exists(u_{k_n})\subset(u_k)\colon u_{k_n}\to u\text{ fast überall}$$

also

$$\mu\left(\big\{\omega\big||u_{n_k}(\omega)-u(\omega)|\not\to 0\big\}\right)=0$$

$$\forall\omega\in\Omega\colon |v_n(\omega)|\le K$$

Sei nun $\omega\in\Omega^\infty$ beliebig aber fix.

$$\exists(v_{n_k})\subset(v_n),\ v_{n_k}\xrightarrow{k\to\infty}y\colon \varphi\big(\omega,u_n(\omega),v_n(\omega)\big)\to\varphi\big(\omega,u(\omega),v(\omega)\big)\tag{3.3}$$

weiters gilt

$$v_n\rightharpoonup v\Rightarrow z=v(\omega)$$

Andererseits

$$\varphi\big(\omega,u(\omega),v_{n_k}(\omega)\big)\to\varphi\big(\omega,u(\omega),v(\omega)\big)\tag{3.4}$$

Aus (3.3) und (3.4) folgt

$$\forall\omega\in\Omega^\infty\colon |varphi\big(\omega,u_{n_k}(\omega),v_{n_k}(\omega)\big)-\varphi\big(\omega,u_{n_k}(\omega),v(\omega)\big)|\to 0$$

Schritt 4)

$$\begin{aligned}u_n&\to u\quad\text{in }L^1\\ v_n&\rightharpoonup v\quad\text{in }L^1\end{aligned}$$

Dann $\exists(u_{n_k},v_{n_k})$, sodaß

$$\forall\varepsilon>0\ \exists A^\varepsilon\subset\Omega,\ \mu(\Omega\setminus A^\varepsilon)<\varepsilon\colon\sup_{\omega\in A^\varepsilon}|\Phi(u_{n_k},v_{n_k})(\omega)-\Phi(u,v_{n_k})(\omega)|\xrightarrow{k\to\infty}0$$

Schritt 5)

$$L=\varliminf I(v_n,u_n)=\varliminf\int_\Omega\varphi\big(\omega,u(\omega),v(\omega)\big)\,d\omega$$

$L\ge I(u,v)$. Sei (u_{n_k},v_{n_k}) Teilfolge von (u_n,v_n) (oBdA. Folge selbst), sodaß

$$L=\lim_{n\to\infty}(u_n,v_n)$$

Wähle $\varepsilon > 0$ beliebig aber fix. Bestimme A^ε mit Schritt 4

$$\begin{aligned}
I(u_n, v_n) &= \int_\Omega \varphi\big(\omega, u_n(\omega), v_n(\omega)\big)\, d\mu \\
&\underset{\varphi\geq 0}{\geq} \int_{A^\varepsilon} \varphi\big(\omega, u_n(\omega), v_n(\omega)\big)\, d\mu \\
&= \int_\Omega \mathbb{1}_{A^\varepsilon}(\omega)\Phi(u, v_n)\, d\mu + \int_{A^\varepsilon} \Phi(u_n, v_n)(\omega) - \Phi(u, v_n)(\omega)\, d\mu \\
&\geq \int_\Omega \mathbb{1}_{A^\varepsilon}(\omega)\Phi(u, v_n)\, d\mu - \underbrace{\int_{A^\varepsilon} |\Phi(u_n, v_n)(\omega) - \Phi(u, v_n)(\omega)|\, d\mu}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} \\
&\xrightarrow{n\to\infty} \int_\Omega \mathbb{1}_{A^\varepsilon}(\omega)\Phi(u, v) = \int_\Omega \Phi(u, v)\, d\mu - \int_{\Omega\setminus A^\varepsilon} \Phi(u, v)\, d\mu
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\int_\Omega (u, v)\, d\mu - \int_{\Omega\setminus A^\varepsilon} \Phi(u, v)\, d\mu \xrightarrow[\int_{\Omega\setminus A^\varepsilon} \Phi\to 0]{\substack{\varepsilon\to 0\\ \mu(\Omega\setminus A^\varepsilon)\to 0}} \int_\Omega \Phi(u, v)\, d\mu$$

■

Definition 3.12. $T\colon E \to F$ kompakt:$\Leftrightarrow$

$$\forall (x_n) \in E^{\mathbb{N}}\colon \|x_n\| \leq 1 \Rightarrow \exists (x_{n_k}) \subseteq (x_n)\ \exists x \in E\colon Tx_{n_k} \to Tx$$

Satz 3.13. *Sei* $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$*,* $p > 1$

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \;\Big|\; \int_\Omega |u|^p\, d\mu + \int_\Omega |\nabla u|^p\, d\mu < \infty \right\}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} id\colon W^{1,p}(\Omega) &\to L^1(\Omega) \\ f &\mapsto f \end{aligned}$$

ist kompakt.

Beweis. Beweis zu diesem Satz in der Vorlesung über Sobolevräume. ■

Theorem 3.14. *Sei* $1 < p < \infty$*,* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $f\colon \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{nm} \to \mathbb{R}$ *Caratheodory–Funktion und* $f(x, \xi, \cdot) > 0$ *konvex.*

$$I(u) = \int_\Omega f\big(x, u(x), \nabla u(x)\big)\, dx$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} I\colon W^{1,p} &\to \overline{\mathbb{R}^+} \\ u &\mapsto I(u) \end{aligned}$$

ist schwach–folgen–unterhalbstetig.

Beweis. Sei (u_j) Folge in $W^{1,p}$ mit $u_j \rightharpoonup u$.

$$id : W^{1,p} \to L^1$$

Damit folgt starke Konvergenz von u_j gegen u in L^1.

$$u_j \xrightarrow{L^1} u$$

Mit der Defintion der Sobolevräume gilt

$$u_j \xrightarrow[W^{1,p}]{w} \Leftrightarrow \left[u_j \xrightarrow[L^p]{w} u \wedge \nabla u_j \xrightarrow[L^p]{w} \nabla u \right]$$

$$\nabla u_j \xrightarrow[L^p]{w} \nabla u \overset{p\geq 0}{\Longrightarrow} \nabla u_j \xrightarrow{L^1} \nabla u$$

Damit folgt mit Satz 3.8

$$I(u) = \int f\big(x, u(x), \nabla u(x)\big) \leq \underline{\lim} \int f\big(x, u_j(x), \nabla u_j(x)\big)\, dx$$

■

Theorem 3.15. *Sei $f\colon \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{nN} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ wie oben*

$$F(x,\xi,\eta) \geq \alpha|\eta|^p - a(x) - \beta|\xi|^q$$

mit $a \in L^1$, $q < p$, $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$, $I(u_0) < \infty$. Dann gilt $X = u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$

$$I\colon (X, \|\cdot\|_{E^{1,p}}) \to \mathbb{R}^+$$

ist koerziv und schwach–folgen–unterhalbstetig. X ist schwach abgeschlossen.
Mit Lemma 2.1 folgt

$$\exists u_1 \in X\colon I(u_1) = \inf_{u\in X} I(u)$$

Satz 3.16.

$$\left.\begin{array}{r} K\colon E \to F \text{ kompakt} \\ x_n \rightharpoonup x \text{ in } E \end{array}\right] \Rightarrow \big(Tx_n\big) \text{ konvergiert in } F$$

Beweis.

$$x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow \forall z \in E^*\colon \langle z, x_n\rangle \to \langle z, x\rangle$$

Wähle $z \in F^*$, $y = T^*z \in E^*$. Dann folgt

$$\forall z \in F^*\colon \langle x_n, T^*z\rangle \to \langle x, T^*z\rangle$$
$$\overset{\text{Def}}{=} \big(\forall z \in F^*\colon \langle Tx_n, z\rangle \to \langle Tx, z\rangle\big) \Leftrightarrow Tx_n \rightharpoonup Tx$$

■

Satz 3.17. *Sei $T\colon E \to F$ stetig, $x_n \rightharpoonup x$. Dann gilt*

$$Tx_n \rightharpoonup Tx$$

Beweis. Es gilt

$$\big(z_n \rightharpoonup z \wedge z_{n_k} \to z_0\big) \Rightarrow z = z_0 \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} \big(x_n \rightharpoonup x \text{ in } E\big) &\Rightarrow \big(\exists K\ \forall n \in \mathbb{N}\colon \|x_n\| \leq K\big) \\ &\Rightarrow \big(Tx_{n_k}\big) \text{ konvergiert, } \lim_{n_k\to\infty} \|Tx_{n_k} - z\|_F = 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Andererseits folgt aus (3.6)

$$\big(Tx_n \rightharpoonup Tx\big) \Rightarrow z = Tx$$

Angenommen (Tx_n) konvergiert nicht. Dann folgt

$$\exists \varepsilon_0\ \exists (n_l), (m_l)\ \forall l\colon \|T\|x_{n_l} - Tx_{m_l} > \varepsilon_0$$

Aus Kompaktheit folt

$$\exists (n_{l_k}), (m_{l_K})\colon \big(Tx_{n_{l_k}} \to Tx\big), \big(Tx_{m_{l_k}} \to Tx\big)$$

Es folgt mit (3.5)

$$\|Tx_{n_{l_k}} - Tx_{m_{l_k}}\| \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

■

4 Koerzivität von Variationsintegralen

Unser Ziel ist es hinreichende Bedingungen an f zu finden, sodaß

$$I\colon u_n \mapsto \int f\big(x, u_n, \nabla u_n\big)\, dx$$

koerziv ist.

Satz 4.1 ((Allgemeine) Poincaré Ungleichung). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$, $1 \leq q \leq \infty$, $f \in \big(W^{1,q}(\Omega)\big)^*$, sodaß mit $c \in W^{1,q}(\Omega)$ gilt*

$$c = \ \ const \Rightarrow \big(\langle f, c\rangle = 0 \Rightarrow c = 0\big)$$

Dann gilt

$$\exists C\ \forall u \in W^{1,p}\colon \|u\|_{1,p} = \|u\|_1 + \|\nabla u\|_1 \leq C\big(\|\nabla u\|_1 + |\langle f, u\rangle|\big).$$

Korollar 4.2 (Wichitge Folgerungen). *Sei Ω beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$, $A \subset \Omega$ offen, $|A| > 0$. Dann gilt*

a)

$$\exists C > 1\colon \frac{1}{C}\|u\|_{1,q} \leq \left[|\int_A u\, dx| + \|\nabla u\|_1\right] \leq \|u\|_{1,q} \tag{4.1}$$

b)

$$\|u\|_{1,q} \leq C\|\nabla u\|_q + \left(\int_A |u|^r\, dx)^{1/r}\right) \tag{4.2}$$

mit r aus Theorem 3.13

Beweis. Beweis von 4.1: wir zeigen

$$\begin{aligned} f\colon W^{1,q} &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \int_A u \end{aligned}$$

ist stetig. $\int_A u := \langle f, u\rangle$. zz: $|f(u)| \leq C\|u\|_{1,q}$. Es gilt

$$\begin{aligned} |\int_A u| \leq \int_A |u| &= \int \mathbb{1}_A u \\ &\leq \|\mathbb{1}_A\|_p \|u\|_q \\ &\leq |A|^{1/p}(\|\nabla u\|_q + \|\nabla u\|) \\ &= |A|^{1/p}\|u\|_{1,q}. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung mit $C := |A|^{1/p} \geq \|f\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.
Beweis von 4.2 Mit Satz 4.1 gilt

$$\begin{aligned} \|u\|_{1,q} &\leq C\big[\|\nabla u\|_1 + |\langle f, u\rangle|\big] \\ &\leq \|\nabla u\|_{1,q} + \left(\int_A |u|^r\right)^{1/r} \left(|A|^{1/r'}\right) \\ \leq \max(a, |A|^{1/r'})\, [\|\nabla u\|_{1,q} + \|u\|_{r,A}] \end{aligned}$$

gilt nun $W^{1,q} \hookrightarrow L^r$, so folgt

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^r} &\leq C\|u\|_{1,q} \\ &\leq \max(a, |A|^{1/r'})\, [\|\nabla u\|_{1,q} + \|u\|_{1,q}] \\ &\leq C|A|\big(\|u\|_{1,q}\big) \end{aligned}$$

∎

Satz 4.3. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen. f erfülle*

$$f(x,\xi,\eta) \geq \alpha|\eta|^p - a(x) - \beta|\xi|^q \tag{4.3}$$

mit $q < p, A \in L^1(\Omega), x \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^n, \eta \in \mathbb{R}^{nN}$.

$$I(u) := \int_\Omega f\big(x, u, \nabla u(x)\big)\,dx$$

Weiters sei $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ und erfülle $I(u_0) < \infty$.

$$X := u_0 + W^{1,p}(\Omega) \text{ (abgeschlossen)}$$

Dann gilt $I\colon X \to \mathbb{R}$ ist koweziv.

Beweis. Betrachte

$$g(x,\xi,\eta) := f(x,\xi,\eta) + a(x) + \beta|\xi|^q \geq 0$$

I_g ist schwach folgen unterhalb stetig.

$$I_f(u) = \int_\Omega f(x,u(x),\nabla u(x)) \geq \int_\Omega |\nabla u|^p(x) - a(x) - |u(x)|^q\,dx$$

$\forall u \in X\colon u = v + u_0$ mit $v \in W_0^{1,p}(\Omega), u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$. Damit folgt mit der 2.$\Delta$–Ungleichung

$$\|u\|_{W^{1,p}} \geq \|v\|_{W^{1,p}} - \|u_0\|_{W^{1,p}}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\int |\nabla u|^p(x) &\geq C(\|\nabla v\|_{L^p}^p - \|\nabla u_0\|_{L^p}^p) \\
&\overset{Satz\ 4.1}{\geq} C(\|v\|_{W^{1,p}}^p - \|u_0\|_{W^{1,p}}^p) \\
&\geq C\big((\|u\|_{W^{1,p}} - \|u_0\|_{W^{1,p}})^p - \|u_0\|_{W^{1,p}}^p\big)
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\|u\|_{W^{1,p}} \to \infty \Rightarrow \int |\nabla u|^p(x)\,dx \to \infty$$

Für $\int_\Omega |u|^q$, $q < p$ gilt

$$\begin{aligned}
\|u\|_q &= \left(\int |u|^q \mathbb{1}_\Omega\right)^{1/q} \\
&\leq \left(\int \mathbb{1}_\Omega^r\right)^{1/r} \left(\int |u|^p\right)^{1/p} \\
&\leq |\Omega|^{1/r} \|u\|_{W^{1,p}}
\end{aligned}$$

wobei $\frac{1,r}{+}\frac{1}{p} = \frac{1}{q}$. Damit gilt

$$\int |u(x)|^q\,dx \leq |\Omega|^{q/r} \|u\|_{W^{1,p}}^q.$$

Insgesamt folgt

$$I(u) \geq C\big(\|u\|_{W^{1,p}}^p\big) - C\|u\|_{W^{1,p}}^q - \int_\Omega a(x)$$

Mit dev Voraussetzungen folgt nun sofort, daß I koerziv ist. ∎

4.1 Variationsproblem mit freien Randbedingungen

Satz 4.4. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $A \subset \Omega$, $|A| > 0$, $1 < p < \infty$, $f(x, \xi, \cdot) > 0$ konvex,*

$$\begin{cases} 1 < r < p(\frac{n}{n-p}) & \text{falls } p \leq n \\ r < \infty & \text{falls } p > n \end{cases} f(x, \xi, \eta) \geq x(|\eta|^p + \mathbb{1}_A(x)|\eta|^r) - a(x) \tag{4.4}$$

Weiters gelte $X(\subseteq W^{1,p})$ schwach abgeschlossen (z.B. $X = W^{1,p}$),

$$\exists u_0 \in X \colon I(u_0) < \infty \tag{4.5}$$

Dann gilt: $I \colon X \to \mathbb{R}$ ist nach unten beschränkt und nimmt sein Infimum an.

$$\exists \bar{u} \in X \colon I(\bar{u}) = \inf_{u \in X} I(u). \tag{4.6}$$

Beweis. I ist schwach–folgen–unterhalbstetig (konvex). Zu zeigen ist, daß I koerziv auf X ist.

$$\begin{aligned} I(u) &= \int_\Omega f\big(, x, u(x), \nabla u(x)\big)\, dx \\ &\geq \int_\Omega |\nabla u(x)|^p + \int_A |u(x)|^q\, dx - \int a(x)\, dx \end{aligned}$$

mit (4.2) folgt

$$I(u) \geq C\|u\|^p_{W^{1,p}}$$

■

Satz 4.5 (freie RWP).

$$\int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{a_0(x)}{r}|u|^r\right] dx \xrightarrow{u \in H^1(\Omega)} MIN \tag{}$$

$$\exists \alpha > 0\ \exists A \subset \Omega,\ |A| > 0\ \forall x \in A \colon a_0(x) > \alpha$$

Dann nimmt $I(u)$ sein Infimum auf $H^1(\Omega)$ an!

Beweis.

$$f(x, \xi, \eta) \geq \frac{1}{2}|\eta|^2 + \frac{\alpha}{r}\mathbb{1}_A(x)|\xi|^r$$

$$f(x, \xi, \eta) > 0, \text{ konvex weil } \eta \mapsto |\eta|^2 \text{ konvex ist.}$$

$I(\bar{u}) = \inf_{u \in W^{1,p}} Iu$ erfüllt

$$\begin{aligned} -\Delta \bar{u} + a_0(x)|\bar{u}|^{r-2}\bar{u} = 0 \quad &\text{auf } \Omega \\ \partial_\nu \bar{u}(x) = 0 \quad &\text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

■

4.2 Eindeutigkeit

Betrachten folgendes Problem für $u \in u_0 + H_0^1(\Omega)$:

$$u \mapsto \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \tag{4.7}$$

$\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2\, dx < \infty$,also $(I(u_0) < \infty)$, garantiert eine Lösung.
Die Lösung von (4.7) erfüllt

$$\Delta u = 0 \tag{4.8}$$

$$u|_{\partial\Omega} = u_0|_{\partial\Omega} = f \tag{4.9}$$

Seien nun u_1, u_2 Lösungen von (4.7).

$$I(\frac{u_1+u_2}{2}) \leq \quad \tfrac{I(u_1)+I(u_2)}{2} = \quad \frac{\min + \min}{2} = \min \tag{4.10}$$

Damit folgt, daß $\frac{u_1+u_2}{2}$ wieder Lösung von (4.7) ist. Es folgt

$$I(\frac{u_1+u_2}{2}) - \frac{1}{2}I(u_1) - \frac{1}{2}I(u_2) = \quad 0 \tag{4.11}$$

$$\int |\nabla \frac{u_1+u_2}{2}|^2 - \frac{1}{2}|\nabla u_1|^2 - \frac{1}{2}|\nabla u_2|^2 \leq \quad 0 \tag{4.12}$$

$$\forall \omega \in \Omega\colon |\nabla \frac{u_1+u_2}{2}(\omega)|^2 - \frac{1}{2}|\nabla u_1(\omega)|^2 - \frac{1}{2}|\nabla u_2(\omega)|^2 \equiv \quad 0 \tag{4.13}$$

Es gilt

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \Leftrightarrow a = b.$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{u_{1,x}+u_{2,x}}{2}\right)^2(\omega) + \left(\frac{u_{1,y}+u_{2,y}}{2}\right)^2(\omega) - \frac{1}{2}\left(u_{1,x}^2(\omega)\right) - \frac{1}{2}\left(u_{1,y}^2(\omega)\right)& \\ - \frac{1}{2}\left(u_{2,x}^2(\omega)\right) - \frac{1}{2}\left(u_{2,y}^2(\omega)\right) &\equiv 0 \\ \Leftrightarrow - \left(\frac{u_{1,x}-u_{2,x}}{2}\right)^2(\omega) - \left(\frac{u_{1,y}-u_{2,y}}{2}\right)^2(\omega) &\equiv 0 \\ \Rightarrow u_{1,x} = u_{2,x} \cap u_{1,y} &= u_{2,y} \end{aligned}$$

Insgesamt gilt damit

$$\forall \omega \in \Omega\colon \left[\nabla u_1(\omega) = \nabla u_2(\omega) \wedge u_1|_{\partial\Omega} = u_2|_{\partial\Omega} = u_0|_{\partial\Omega}\right] \Rightarrow \forall \omega \in \Omega\colon u_1(\omega) \equiv u_2(\omega) \tag{4.14}$$

Beispiel 4.6. Minimalflächenproblem gesucht: $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ sodaß Fläche des Graphen $\{(x, u(x))\,|x \in \Omega\}$ minimal wird unter allen u, die $u|_{\partial\Omega} = f$ erfüllen.

$$I\colon u \to \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2}\, dx \tag{4.15}$$

wobei $u \in u_0 + W^{1,p}(\Omega)$, $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $u_0|_{\partial\Omega} = f$.

$$I(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2}\, dx$$

$$\varphi(x, u, \nabla u) = \sqrt{1 = |\nabla u(x)|^2}, \qquad \varphi(x, \xi, \eta) = \sqrt{1 + |\eta|^2}$$

Erfüllt φ

$$\varphi(x, \xi, \eta) \geq |\eta|^p$$

dann ist I auf $W^{1,p}$ koerziv.

Frage: Für welche p gilt $\varphi(x, \xi, \eta) \geq |\eta|^p$ also

$$\forall \eta \in \mathbb{R}^n\colon \sqrt{1 + |\eta|^2} \geq |\eta|^p?$$

Antwort: $p = 1$. “schlechte Antwort.“ $W^{1,1}(\Omega)$ ist der einzige Sovolevraum von dem wir wissen, daß er *nicht reflexiv* ist.

$$W^{1,1}(\Omega) \text{ ist nicht reflexiv!}$$
$$I\colon \quad W^{1,1}(\Omega) \to \mathbb{R} \text{ ist schwach-folgen-unterhalbstetig.}$$

Deshalb greift die Existenztheorie nicht! Tatsächlich sind Minimalflchenprobleme bedannt, deren Lösung *kein* Graph ist (sondern eine Riemansche Mannigfaltigkeit)! (4.15) hat aber immer eine Lösung siehe etwa [4].

5 Stetigkeit von Superpositionsoperatoren

Frage:
Wann ist

$$\begin{aligned} I\colon W^{1,p}(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \int \varphi(x, u, \Delta u)\, dx \end{aligned} \tag{5.1}$$

stetig und Fr"echet-diggerenzierbar?
Die Antwort muß wie immer am Integranden $\varphi(x, \xi, \eta)$ ablesbar sein. Das ist der letzte Schritt zur Beantwortung der Frage:
Welche Differentialgleichung erfüllt die Lösung des Variationsproblems (5.1) mit $u \in X = u_0 + W_0^{1,p}$?

Wenn $\left.\begin{array}{l} I\colon W^{1,p} \to \mathbb{R} \text{ stetig differenzierbar} \\ I(\bar{u}) = \min\limits_{u \in W^{1,p}} \end{array}\right\} \Rightarrow \forall h \in W^{1,p}\colon I'(u)(h) \equiv 0$, falls $I'(u)(h) \equiv 0$ eine schwache Lösung einer Differentialgleichung ist.

Notation 5.1. In diesem Kapitel sei stets wenn nicht anders verlangt (Ω, μ) ein σ-endlicher Maßraum. Weiters möge gelten:

(a) Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra, $A_n \in \mathcal{A}$.

$$A_n \searrow \emptyset \text{ fast überall} :\Leftrightarrow A_{n+1} \subset A_n, \mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = 0$$

(b) Sei $1 \leq q < \infty$, F endlich dimensional, $M \subseteq L^q\big((\Omega, \mu), F\big)$.
M hat gleichmäßig absolut stetige Normen $:\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall (A_n) \text{ Folge in } \mathcal{A}, A_n \searrow 0 \text{ f.ü. } \exists k(\varepsilon)\ \forall k > k(\varepsilon)\ \forall u \in M\colon \|u \mathbb{1}_{A_k}\| \leq \varepsilon. \tag{5.2}$$

Beispiel 5.2. (a) $M = \{v\} \Leftrightarrow v \in L^q$.

(b) Sei $q = 1$.

$$\begin{aligned} I_n &= \left]2^{-n}, 2^{-n+1}\right[\\ f_n &= 2^n \mathbb{1}_{I_n} \end{aligned}$$

Es gilt: $\forall n \in \mathbb{N}\colon \quad f_n \in L^1(\lambda, [0, 1])$. $\big\{f_n \big| n \in \mathbb{N}\big\}$ hat in L^1 keine gleichmäßig absolut stetige Normen.

Satz 5.3. *Sei $M := \{f_n\}$. $\{f_n\}$ erfüllt (5.2) in L^1 $\Leftrightarrow$*

$$(f_n) \textit{ ist in } L^1 \textit{ schwach–folgen–kompakt.}$$

Bemerkung 5.4. $\neg\big((f_n)$hat in L^1 gleichmäßig absolut beschränkte Normen$\big) \Leftrightarrow$

$$\exists \delta < 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \exists A_k \in \Omega:\ (\mu(A_k) \searrow 0) \vee \int_{A_k} |f_{n_k}|\, d\mu > \delta.$$

Satz 5.5 (Krasnoselski–Vainberg). *$I(u, w)(x) \to \varphi(x, u(x), w(x))$ stetig auf*

$$\begin{aligned} I\colon L^{p_1} \times L^{p_2} &\to L^q \\ u, v &\mapsto \varphi(x, u(x), v(x)) \end{aligned}$$

genau dann wenn

$$\exists U \subseteq L^{p_1} \times L^{p_2} \textit{ offen}\colon I(U) \subseteq L^q \textit{ist beschränkt.}$$

(vgl. Lineare Operatoren $L\colon E \to F$ stetig $\Leftrightarrow \exists M\ \forall x \in E\colon \|x\| < 1 \Rightarrow \|Lx\| \leq M$)

Bemerkung 5.6 *(Motivation von „schwachen“ Lösungen).* Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit C^1 Rand. Mit der 1. Green'schen Identität gilt dann mit $v \in C^2(\Omega), u \in C^1(\Omega)$

$$\int_\Omega u\Delta v + \nabla u \nabla v \, d(x,y) = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} \, dS.$$

Was folg für v, wenn $\forall u \in C_0^1(\overline{\Omega})\colon \int \nabla u \nabla v \, d(x,y) = 0$?

Antwort:

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \Rightarrow \quad \int_{\partial\Omega} u \tfrac{\partial v}{\partial n} \, dS = 0 \tag{5.3}$$
$$(5.3) \Rightarrow \quad \int u\Delta v \, d(x,y) = 0 \quad \forall u \in C_0^1(\Omega) \tag{5.4}$$
$$(5.4) \Rightarrow \quad \forall x \in \Omega\colon \Delta v(x) = 0 \tag{5.5}$$

Beweis. (5.5) Annahme

$$\exists y \in \Omega\colon \Delta v(y) \neq 0 \underset{v \in C^2}{\overset{\Delta v \in C}{\Longrightarrow}} \exists O \subseteq \Omega, \text{offen}\colon \Delta v|_O > 0. \tag{5.6}$$

somit

$$\exists \alpha > 0 \exists \delta > 0\colon \Delta v(y) > \alpha \qquad \forall y \in B(y,\delta)$$

wähle $u \in C^2(\Omega)$, sodaß

$$u|_{\Omega B(y,\delta)} > 0 \quad u|_{B(y,\frac{\delta}{2})} \geq 1 \tag{5.7}$$

dann folgt

$$\int_\Omega u\Delta v \, d(x,y) = \int_{B(y,\delta)} u\Delta v \, d(x,y) \geq \frac{\delta}{2}\alpha$$

zusammen:

$$\forall x \in \Omega\colon \left(\Delta v\right)(x) \equiv 0$$

■

Definition 5.7. $v \in H^2(\Omega)$ heißt „schwache Lösung“ von $\Delta v = 0 :\Leftrightarrow$

$$\forall u \in H_0^2(\Omega)\colon \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx = 0. \tag{5.8}$$

Bemerkung 5.8. In obiger Formulierung kommen nur 1.Ableitungen von v vor im Gegensatz zur ursprueng-lichen Formulierung benötigt man also nicht mehr $v \in C^2$.
$H^2(\Omega)$ ist reflexiver Hilbertraum.

Bemerkung 5.9.

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2_{H^2(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \\ \exists v \in H_0^2(\Omega)&\colon I'(v) = 0 \\ \Rightarrow \forall u \in H_0^2&\colon \langle I'v, u\rangle_{H^2} = 0 \\ &= \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx \equiv 0. \end{aligned}$$

Lemma 5.10 *(Konstruktion). $M \subset L^q$ hat absolut stetige Normen* $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta < 0 \; \forall u \in M \; \forall A \in \mathcal{A}_\mu\colon \mu(A) < \delta \Rightarrow \|u\mathbb{1}_A\|_q \leq \varepsilon \tag{5.9}$$

Beweis. $\Rightarrow$ vgl. Definition 5.2

$$\forall (A_n) \searrow 0 \text{ f.ü. } \forall \varepsilon > 0 \; \exists k(\varepsilon) \; \forall k > k(\varepsilon) \; \forall n \in M\colon \|\mathbb{1}_{A_k} u\|_q \leq \varepsilon \tag{5.10}$$

(5.9) $\Rightarrow$ (5.10): Sei $A_n \searrow 0$ beliebig aber fix. Sei $\varepsilon > 0$

$$\exists k(\varepsilon)\colon \mu\left(A_{k(\varepsilon)}\right) < \delta$$

mit (5.9) folgt nun

$$\mu(A_k) \le \mu\left(A_{k(\varepsilon)}\right) \qquad \forall k \ge k(\varepsilon)$$
$$\mu\left(A_k\right) \ge \delta \overset{(5.9)}{\Rightarrow} \forall u \in M\colon \|u\mathbb{1}_{A_k}\|_q \le \varepsilon.$$

Wir zeigen $\neg(5.9) \Rightarrow \neg(5.10)$.

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall k\ \exists A_k \in \mathcal{A}_\mu\ \exists u_k \in M\colon \mu(A_k) \le 2^{-k} \vee \|u_k\mathbb{1}_{A_k}\|_q > \varepsilon.$$

$B_m := \bigcup_{k=m}^\infty A_k,\ B_m \supset B_{m+1}$ Es gilt

$$\mu(B_m) \le \sum_{k=m}^\infty \mu(A_k) \le 2^{-m+1}$$

und daher

$$\mu\left(\bigcap_{m=1}^\infty\right) = 0$$

weil

$$B_m \supset B_{m+1} \Rightarrow \mu\left(\bigcap_{m=1}^\infty\right) = \lim_{N\to\infty} \mu\left(\bigcap_{m=1}^N\right) = \lim_{N\to\infty} \mu(B_N) = 0.$$

Weiters gilt $A_k \subseteq B_k$ und

$$\varepsilon \le \|u_k\mathbb{1}_{A_k}\|_q \le \|u_k\mathbb{1}_{B_k}\|_q.$$

Insgesamt folt

$$\exists B_k \searrow \emptyset \text{ f.ü.} \exists \varepsilon > 0 \forall m \exists k \ge m\colon \|u_k\mathbb{1}_{B_K}\| \ge \varepsilon \quad \Leftrightarrow \neg(5.10).$$

■

Lemma 5.11. *(a)*

$$\exists r > 0 \forall u \in L^{p_1}\ \forall v \in L^{p_2}\colon \varphi\left(x, u(x), v(x)\right) \in L^q \tag{5.11}$$
$$\|u\|_{p^1} \le r, \qquad \|v\|_{p_2} \le r \tag{5.12}$$

(b) $u_k \in L^{p_1}, v_k \in L^{p_2}$

$$\sum \left(\|u_k\|_{p_1} + \|v_k\|_{p_2}\right) \le r \tag{5.13}$$

Dann gilt:

$$\varphi(x, u_k(x), v_k(x)) \textit{ hat in } L^q \textit{ gleichmäßig absolut stetige Normen.} \tag{5.14}$$

Beweis. Kontraposition. Es gelte

$$\exists \alpha > 0\ \exists A_k \searrow \emptyset \text{ f.ü. } \exists(u_{k_j}, v_{k_j}) \subseteq (u_k, v_k) \text{ oBdA. } (u_k, v_k) \text{ selbst}\colon \left(\forall k\colon \|\varphi(\cdot, u_k(\cdot), v_k(\cdot))\|_q \ge \alpha\right) \tag{5.15}$$

Andererseits gilt mit dem Satz von Lebesgue und (a)

$$k \in \mathbb{N}\ \exists A_{m_k}, m_k > k\colon \|\varphi(\cdot, u_k, v_k)\mathbb{1}_{A_{m_k}}\|_q < \frac{\alpha}{4} \tag{5.16}$$
$$\|\varphi(\cdot, u_k, v_k)\mathbb{1}_{A_k \setminus A_{m_k}}\|_q \ge \alpha - \frac{\alpha}{4} \tag{5.17}$$

$k_0 = 0,\ k_{j=1} = m_{k_j},\ B_j = A_{k_j} \setminus A_{k_{j+1}}$

$$y_j = u_{k_j} \qquad z_j = v_{k_j} \tag{5.18}$$
$$y = \sum_j u_j \mathbb{1}_{B_j} \qquad z = \sum_j z_j \mathbb{1}_{B_j} \tag{5.19}$$

B_j sind paarweise disjunkt. Weiters gilt

$$\|y\|_{p_1} \le \sum_j \|y_j\|_{p_1} \le r$$

$$\|z\|_{p_2} \leq \sum_j \|z_j\|_{p_2} \leq r$$

$$\|\varphi(\cdot, y_j(\cdot), z_j(\cdot))\mathbb{1}_{B_j}\| = \|\varphi(\cdot, y(\cdot), z(\cdot))\mathbb{1}_{B_j}\|$$

damit folgt der Widerspruch

$$\alpha - \frac{\alpha}{4} \leq \|\varphi\big(\cdot, y_j(\cdot), z_j(\cdot)\big)\mathbb{1}_{B_j}\|_q = \|\varphi\big(\cdot, y(\cdot), z(\cdot)\big)\mathbb{1}_{B_j}\|_q \xrightarrow{j\to\infty} 0.$$

■

Theorem 5.12. *Sei $U \subseteq L^{p_1} \times L^{p_2}$ offen, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2), \Phi(\boldsymbol{u})(x) = \varphi(x, u_1(x), u_2(x))$.*
Dann folgt $\Phi\colon U \to L^2$ ist stetig.

Beweis. Wir zeigen den Satz für den Fall wo $\Phi(\sigma) = \varphi(\cdot, \sigma(\cdot), \sigma(\cdot)) = 0$ und $\sigma \in U, U$ offen. Damit gilt

$$\exists r > 0\colon rB_{L^{p_1}\times L^{p_2}} \subseteq U$$

Annahme Φ ist nicht stetig im Punkt $\sigma \in U$, also

$$\exists u_k \in L^{p_1} \times L^{p_2},\ u_k \to \sigma\colon \Phi(u_k) \not\to \Phi(\sigma) \tag{5.20}$$

also

$$\exists \varepsilon > 0\ \exists (u_{n_k}) \subseteq (u_n) \text{ oBdA. } (u_n) \text{ selbst}\colon \|\Phi(u_{n_k})\|_q > \varepsilon$$

wähle Teilfolge (oBdA. wieder Folge selbst), sodaß

$$\sum \|u_{n_k}\|_{L^{p_1}\times L^{p_2}} < r \tag{5.21}$$

$$u_{n_k} \to \sigma \text{ f.ü.} \tag{5.22}$$

Damit folgt für fast alle $x \in \Omega$

$$\Phi(u_k)(x) = \varphi(x, u_k^1(x), u_k^2(x)) \to \varphi(x, \sigma(x), \sigma(x)) \equiv \sigma \tag{5.23}$$

Damit folgt mit Lemma 5.11

$$\{\Phi(u_k)\colon k \in \mathbb{N}\}\text{hat gleichgradig absolut stetige Normen.} \tag{5.24}$$

Die Aussagen (5.23), (5.24) stehen im Widerspruch zu $\|\Phi(u_k)\|_q \geq \varepsilon$.
Sei nun

$$\Omega = \bigcup \Omega_m \tag{5.25}$$

$$\Omega_m \subset \Omega_{m+1} \subset \cdots \Omega \text{ kompakt} \tag{5.26}$$

$$\mu(\Omega_m) < \infty \tag{5.27}$$

Es gilt

$$\Omega_m^c \searrow \emptyset \qquad \mu(\Omega_m) \to 0 \qquad \big(\lim \mu(\Omega_m) = \mu(\Omega)\big)$$

$$(5.24) \Rightarrow \exists m\ \forall k\colon \quad \|\Phi(u_k)\mathbb{1}_{\Omega_m^c}\|_q < \tfrac{\varepsilon}{3} \tag{5.28}$$

$$(5.23) \Rightarrow \exists B \subset \Omega_m\colon \quad \mu(\Omega_m \setminus B) \leq \delta(\varepsilon) \wedge \sup_{x\in B}\|\Phi(u_k(x) - \sigma\| \xrightarrow{k\to\infty} 0 \qquad \text{mit Egoroff} \tag{5.29}$$

Andererseits

$$(5.24) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon)\ \forall A \in \mathcal{A}\colon \mu(A) < \delta \Rightarrow \forall k\colon \|\Phi(u_k)\mathbb{1}_A\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Betrachte k_0

$$\forall k > k_0\colon sup_{x\in B}|\Phi(u_k)(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\forall k \geq k_0\colon &\left(\int_\Omega |\Phi(u_k)|^q(x)\,d\mu(x)\right)^{1/q}\\
&= \left(\int_{\Omega\setminus\Omega_m} |\Phi(u_k)|^q(x)\,d\mu(x) + \int_{\Omega_m\setminus B} |\Phi(u_k)|^q(x)\,d\mu(x) + \int_B |\Phi(u_k)|^q(x)\,d\mu(x)\right)^{1/q}\\
&\leq \left(\int_{\Omega\setminus\Omega_m} |\Phi(u_k)|^q(x)\,d\mu(x)\right)^{1/q} + \left(\int_{\Omega_m\setminus B} |\Phi(u_k)|^q(x)\,d\mu(x)\right)^{1/q} + \left(\int_B |\Phi(u_k)|^q(x)\,d\mu(x)\right)^{1/q}\\
&\leq 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Reduktion des Allgemeinen Falles: zu zeigen ist jetzt $\Phi(\cdot)$ ist stetig im Punkt $u_0 \in U$

$$\psi(x,\xi) = \varphi(x, u_0(x)+\xi) - \varphi(x, u_0(x)) \qquad \text{Caratheodory–Funktion}$$

$$\psi(x,\sigma) = \sigma \Rightarrow \Psi(\sigma) = \sigma \tag{5.31}$$

$$\Psi(u)(x) = \psi(x,(u(x)) = \varphi\big(x, u_0(x)+u(x)\big) - \varphi\big(x, u_0(x)\big)$$

$$\sigma \in U - u_0 + \{w - u_0 \big| w \in U\} \tag{5.32}$$

$$\Psi(U-u_0) \subset L^2 \tag{5.33}$$

$(5.31), (5.32), (5.33) \Rightarrow \Psi$ ist stetig in σ, weil der erste Schritt auf Ψ anwendbar ist.

$$u_k \to \sigma \Rightarrow \Psi(u_k) \to \sigma w_k \to u_0 \Rightarrow w_k - u_0 \xrightarrow{L^{p_1}\times L^{p_2}} \sigma \qquad \Psi(w_k - u_0) \xrightarrow{L^q} \sigma$$

$$\underbrace{\|\Psi(w_k-u_0)\|_q}_{\to\sigma} = \|\Phi\big(u_0 + (w_k - u_0)\big) - \Phi(u_0)\|_q \tag{5.34}$$

$$+\|\Phi(w_k) - \Phi(u_0)\|_q \tag{5.35}$$

■

Satz 5.13. *Sei* $1 \leq p_j < \infty,\ 1 \leq j \leq n-1,\ p_n = \infty, 1 \leq q < \infty,\ a \in L^q_+(\Omega)$

$$\forall x \in \Omega\colon \big(a_\infty(x,\cdot)\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \textit{ ist monoton.}\big) \tag{5.36}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}^+\colon \big(a_\infty(\cdot,t) \in L^q(\Omega)\big) \tag{5.37}$$

Weiters gelte

$$\varphi(x,\boldsymbol{\xi}) \leq a(x) + \beta\sum_{j=1}^{n-1}|\xi|^{p_j/q} + a_\infty(x,|\xi_n|) \qquad \forall x \in \Omega,\ \forall\boldsymbol{\xi} = (\xi_1,\ldots,\xi_n). \tag{5.38}$$

Dann gilt: $\Phi \in C(L^{\vec{p}}, L^q)$ *und* $U \subset L^{\vec{p}}$ *beschränkt* $\Rightarrow \Phi(u) \subset L^q$ *ist beschränkt, wobei* $L^{\vec{p}} = L^{p_1} \times L^{p_2} \times \cdots \times L^{p_n}$.

Beweis.

$$\||u|^r\|_s = \left(\int (|u|^r)^s\right)^{1/s} = \left(\int |u|^{rs}\right)^{1/s} = \left(\int |u|^{rs}\right)^{r/rs} = \|u\|^r_{rs} \tag{5.39}$$

$\boldsymbol{u} \in L^{\vec{p}},\ \boldsymbol{u} = (u_1,\ldots,u_n),\ \Phi(u)(x) = \varphi\big(x, u_1(x),\ldots,u_n(x)\big)$
Frage: $\big(U \subset L^{\vec{p}}\text{offen}\big) \Rightarrow \big(\Phi(U) \subseteq L^q \text{ beschränkt}\big)$?
zu zeigen:

$$u \in L^{\vec{p}} \Rightarrow \Phi(u) \in L^q$$

$$
\begin{aligned}
\|\Phi(u)\|_{L^q} &= \left(\int |\varphi\bigl(x, u_1(x), \ldots, u_k(x)\bigr)|^q \, d\mu(x) \right) \\
&\leq \|a\|_q + \sum_{i=1}^{n-1} \| |u_i(x)|^{p_1/q} \|_q + \|a_\infty\bigl(\cdot, u_n(x)\bigr)\|_q \\
&\overset{(5.39)}{\leq} \|a\|_q + \sum_{i=1}^{n-1} \|u_i\|_{p_i}^{p_i/q} + \|a_\infty(\cdot, \|u_n\|_\infty)\|_q
\end{aligned} \tag{5.40}
$$

■

5.1 Anwendung des Satzes von Krasnoski–Vainberg auf Variationsintegrale

Bemerkung 5.14. Mit $f_1,\ f_2 \in W^{1,p}$ gilt, daß auch wieder

$$\max(f_1, f_2) \in W^{1,p} |f| \in W^{1,p}$$

Sei wieder $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$, $1 < p < \infty$.

Definition 5.15. (a)

$$p^* = p\frac{n}{n-p}$$

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$$

für $p < n$ heißt kritischer, konjugierter Sobolevindex. $f \in \mathrm{Car}(\Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{n \times N}, \mathbb{R})$ hat optimales Wachstum:⇔

$$f(x, \xi, \eta) \leq \begin{cases} \alpha(x) + \bar{\alpha}(|\xi|^r + |\eta|^p) & p \leq n \\ a(x, |\xi|) + \bar{\alpha}(|\eta|^p) & p > n \end{cases} \tag{5.41}$$

mit

$$a \in \mathrm{Car}(\Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$$

$$\forall t \colon a(\cdot, t) \in L^1(\Omega)$$

$$a(x, \cdot) \text{ monoton wachsend}$$

$$\alpha(x) = a(x, 0)$$

(b)

$$p_d^* := p\frac{n-1}{n-p}$$

$$\frac{1}{p_d^*} = \frac{1}{p} - \frac{1 - \frac{1}{p}}{n-p}$$

fuer $p < n$ heißt kritischer Randsobolevindex. $g \in \mathrm{Car}(\partial\Omega \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ hat optimales Wachstum:⇔

$$g(x, \xi) \leq \begin{cases} b(y) + \beta|\xi|^s & p \leq n \\ b(y, \xi) & p > n \end{cases} \tag{5.42}$$

mit

$$\forall t \colon b(\cdot, t) \in L^1(\partial\Omega) \forall x \colon b(x, \cdot) \text{ monoton wachsend}$$

$$I_f^\Omega(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx \qquad u \in W^{1,p}(\Omega)$$

$$I_g^\Omega(u) = \int_\Gamma g(x, \gamma u(x))\, d\sigma(x) \qquad u \in W^{1,p}(\Omega),\ \Gamma \subseteq \partial\Omega,\ |\Gamma|_{m-1} > 0$$

wobei

$$\begin{aligned} \gamma \colon W^{1,p}(\Omega) &\to L^p(\partial\Omega) \\ f &\mapsto f \end{aligned} \tag{5.43}$$

den Spuroperator bezeichnet.

Definition 5.16 *(Bezeichnung).* f hat suboptimales Wachstum :⇔

$$r < p^*$$

g hat suboptimales Wachstum :⇔

$$s < p_d^*$$

Satz 5.17. *f, g opitmales Wachstum. Dann gilt*

(a)

$$I_f^\Omega + I_g^\Omega\colon W^{1,p}(\mathbb{R}) \textit{ ist stetig.} \tag{5.44}$$

(b) g hat sub*optimales Wachstum* $\Rightarrow$

$$I_g^\Gamma\colon W^{1,p} \to \mathbb{R} \textit{ ist schwach–folgenstetig}$$

(c) f hat sub*optimales Wachstum* $\Rightarrow$

$$I_f^\Omega\colon W^{1,p} \to \mathbb{R} \textit{ ist schwach–folgenstetig}$$

Beweis. zeigen zuerst (5.44). $f,\ g$ optimales Wachstum

$$\begin{aligned} W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N) &\to L^r(\Omega) \\ f &\mapsto f \end{aligned} \quad \text{ist stetig}$$

$$\big(u \mapsto (u,\nabla u)\big) \in L\big(W^{1,p}(\Omega), L^{1/p}(\Omega) \times L^p(\Omega)\big)$$

Superpositionsoperator

$$F\big(u\big)(x) = f\big(x, u(x), \nabla u(x)\big)$$

$F \in C\big(\underbrace{L^r(\Omega) \times L^p(\Omega)}_{L^{\vec{p}}}, \underbrace{L^1(\Omega)}_{L^q}\big)$ mit Satz 5.5

$$\begin{tikzcd} W^{1,p}(\Omega) \arrow[r, "\big(u\mapsto(u,\nabla u)\big)", "A"'] \arrow[d, "I_f^\Omega"'] & L^r(\Omega) \times L^p(\Omega) \arrow[d, "B"', "F"] \\ \mathbb{R} & L^1 \arrow[l, "C"', "\big(v\mapsto\int_\Omega v(x)\,dx\big)"] \end{tikzcd}$$

I_f^Ω ist stetig, weil

- A stetig ist, mit Satz 3.13,
- B stetig ist, mit Satz 3.13, Satz 5.5,
- C stetig ist (Lebesgue).

$$\begin{tikzcd} W^{1,p}(\Omega) \arrow[r, "Spuroperator"] \arrow[d, "I_g^\Gamma"'] & W^{1-1/p,p}(\partial\Omega) \arrow[r, "Id"] & L^s(\partial\Omega) \arrow[d, "G\big(u\big)(x)"] \\ \mathbb{R} & \big(v \mapsto \int v(y)\,d\sigma(y)\big) \arrow[l] & L^1 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Damit folgt wie oben, daß I_g^Γ stetig ist.

Beweis von (c).
I_f^Ω: f suboptimales Wachstum $\Leftrightarrow (r < p^*)$
Rellich–Kondrachov:

$$\begin{aligned} W^{1,p}(\Omega) &\to L^r(\Omega) \\ u &\mapsto u \end{aligned}$$

ist *kompakt* und stetig.

$$K\colon E \to F \text{ kompakt:} \qquad \big(x_n \rightharpoonup x\big) \Rightarrow \big(\|Kx_n - K_x\|_F \xrightarrow{n\to\infty} 0\big)$$

Wir zeigen

$$\big(u_n \rightharpoonup u\big) \Rightarrow \big(I_f^\Omega(u_n) \to I_f^\Omega(u)\big).$$

Da $A\colon W^{1,p} \to L^r \times L^p$ kompakt ist, für $r < p^*$ folgt

$$\begin{aligned} \big(u_n \rightharpoonup u \text{ in } W^{1,p}\big) &\Rightarrow \big[(u_n, \nabla u_n) \to (u,\nabla u) \text{ in } L^r \times L^p\big] \\ &\Rightarrow F(u_n) \to F(u) \end{aligned}$$

Da $F\colon L^r \times L^p \to L^1$ stetig ist folgt

$$\left(\int_\Omega F\big(u_n\big)(x)\,dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_\Omega F(u)\,dx\right) \Leftrightarrow \left(\int_\Omega f\big(x,u_n(x),\nabla u_n(x)\big)\,dx \to \int_\Omega f\big(x,u(x),\nabla u(x)\big)\,dx\right)$$

Beweis von (b) folgt analog dazu. ∎

Satz 5.18. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt, $1 < p < \infty$.*
$f \in \mathrm{Car}(\Omega \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{n\times N}, \mathbb{R})$ optimales Wachstum
$f_0 \in \mathrm{Car}(\Omega, \mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ suboptimales Wachstum, $f_0 \geq 0$

$$f(x,\xi,\eta) \geq f_0(x,\xi)$$
$$f(x,\xi,\cdot) \text{ konvex}$$

$g \in \mathrm{Car}(\Omega \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ optimales Wachstum

$$g(x,\cdot) \text{ konvex}$$

g suboptimales Wachstum

$$\Gamma \subseteq \partial\Omega, \sigma(\Gamma) > 0$$

Dann gilt

$$I\colon I_f^\Omega + I_g^{\partial\Omega}\colon W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

ist stetig und schwach–folgenunterhalbstetig.

Beweis. $f_1 = f + f_0$ habe optimales Wachstum. $I_g^{\partial\Omega}, I_{f_1}^\Omega, I_f^\Omega, I_{f_0}^\Omega\colon W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ stetig.

$$\big[f_1 > 0 \wedge f_1(x,\xi,\cdot) \text{ konvex}\big] \overset{Satz\ 3.8}{\Rightarrow} I_{f_1}^\Omega\colon W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R} \text{ ist } \omega\text{–folgen–unterhalbstetig.}$$

Weiters gilt

$$I_{f_0}^\Omega\colon W^{1,p} \to \mathbb{R} \text{ ist } \omega\text{–folgen–unterhalbstetig}$$

und da

$$I_{f_1}^\Omega = I_f^\Omega + I_{f_0}^\Omega \Rightarrow I_f^\Omega = I_{f_1}^\Omega - I_{f_0}^\Omega \text{ ist } \omega\text{–folgen–unterhalbstetig.}$$

g suboptimal:

$$I_g^{\partial\Omega}\colon W^{1,p} \to \mathbb{R} \text{ ist } \omega\text{–folgen–stetig und stetig.}$$
$$I_g^{\partial\Omega}\colon W^{1,p} \to \mathbb{R} \text{ ist } \omega\text{–folgen–unterhalbstetig.}$$

∎

Satz 5.19. *Es seien die Vorraussetzungen aus Satz 5.17 erfüllt. Zusätzlich gelte $X \subset W^{1,p}(\Omega)$ reflexiv, schwach abgeschlossen*

$$I = I_f^\Omega + I_g^\Omega \text{ ist koerziv auf } X$$

Dann gilt

$$I\colon X \to \mathbb{R}$$

besitzt Minimum und ist stetig.

Beweis. Die Vorraussetzungen des Fundamentallemmas sind erfüllt. Damit folgt die Behauptung. ∎

6 Differentialrechnung in Banachräumen

Definition 6.1. Seien E, F normiert, $X \subseteq E$, $x \in X$, $h \in E$

$$[x - \epsilon h, x + \epsilon h] \subseteq X$$

$$\delta f(x,h) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}$$

Falls $x \in X \subseteq E$ offen und

$$\forall h \in E\colon \delta f(x,h) \text{ existiert,}$$

dann heißt f in $x \in X$ Gateauxdifferenzierbar. Es gilt:

$$\delta f(x,h) \in F \tag{6.1}$$

$$\delta f(x,h+g) = \delta f(x,h) + \delta f(x,g) \tag{6.2}$$

$$\left.\begin{aligned} \delta f(x)\colon E &\to F \\ h &\mapsto \delta f(x,h) \end{aligned}\right\} \text{ ist linearer beschränkter Operator (Open–Mapping–Theorem).} \tag{6.3}$$

Fréchetableitung von $f\colon X \to E$ im Punkt $x \in E$:

$$\exists \partial f(x) \in L(E,F)\colon f(x+h) - f(x) = \partial f(x)h + o(\|h\|) \Leftrightarrow \frac{\|f(x+h) - f(x) - \partial f(x)h\|}{\|h\|} \xrightarrow{\|h\| \to 0} 0 \tag{6.4}$$

rechtsseitige Variation:

$$\{x + t\epsilon h \in X \big| t \in [0,1]\}$$

$$\delta^+ f(x,h) + \lim_{t \searrow 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}$$

Satz 6.2 *(Notwendiges Kriterium zur Existenz von Minima). $f\colon X \to E$ habe in x_0 ein (lokales) Minimum. Dann gilt:*

- *Falls $\delta^+ f(x_0,h)$ existiert, dann gilt $\delta^+ f(x_o,h) > 0$.*
- *Falls $\delta f(x_0,h)$ existiert, dann gilt $\delta f(x_o,h) \equiv 0 \in E$.*

Bemerkung 6.3. E Banachraum, $X \subseteq E$ offen, $f \in C(X,\mathbb{R})$, $f\colon X \to \mathbb{R}$, $\partial f(x)$ existiert und $\partial f \in C(X,E')$. Dann heißt x kritischer Punkt $\Leftrightarrow \partial f(x_0) = 0$.

Definition 6.4 *(Vorraussetzungen).* $\partial\Omega \in C^1$, $\Gamma = \partial\Omega$, $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$, Γ_i ist offen und abgeschlossen in Γ. Weiters sei

$$f \in C^{0,k}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{n \times N}, \mathbb{R}) \tag{6.5}$$

$$g \in C^{o,k}(\Gamma \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \tag{6.6}$$

$$\varphi_0 \in C^1(\Gamma_0, \mathbb{R}) \tag{6.7}$$

$$\varphi_0\colon \int_\Omega f\big(x, u(x), \nabla u(x)\big)\, dx + \int_\Gamma g\big(u(y)\big)\, d\sigma(y) \longrightarrow \text{MIN}$$

$$u \in C^1(\overline{\Omega},\ u|_{\Gamma_0} = \varphi_0$$

Notation 6.5.

$$f_\xi\big(x, u(x)\nabla u(x)\big)\boldsymbol{h}(x) = \sum_{r=1}^N f_{\xi^r}(x, u(x), \nabla u(x)\big)h^r(x)$$

$$f_\eta\big(x, u(x), \nabla u(x)\big)\nabla\boldsymbol{h}(x) = \sum_{r=1}^n \sum_{k=1}^n f_{\eta^{r_k}}\big(x, u(x), \nabla u(x)\big)\partial_k h^r(x)$$

Satz 6.6. *Sei $I \in C^1(E\mathbb{R})$. Dann gilt*

$$\forall u, h \in E\colon \partial I(u)h = \int_\Omega \Big(f_\xi\big(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot)\big)h(\cdot) + f_\eta(\cdot)\nabla h(\cdot)\Big)\, dx + \int_\Gamma g_\xi\big(\cdot, u(\cdot)\big)g(\cdot)\, d\sigma(y)$$

Beweis. Mit Kettenregel:

$$\varphi(t) := I(u+th) \qquad t \in \mathbb{R}$$
$$\varphi \in C^1\big(]a,b[, \mathbb{R}\big)$$
$$\partial I(u)h = \lim_{t\to 0} \frac{I(u+th) - I(u)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'(0)$$

$$\begin{aligned}
\varphi'(0) &= \frac{d}{dt}\left(\int_\Omega f(\cdot, u(\cdot) + th(\cdot), \nabla u(\cdot) + th(\cdot))\, dx + \int_\Gamma g(\cdot, u(\cdot) + th(\cdot))\, d\sigma(y)\right) \\
&= \int_\Omega \frac{d}{dt}\big|_{t=0} f(x, u(x) + th(x), \nabla u(x) + t\nabla h(x))\, dx + \int_\Gamma \frac{d}{dt}\big|_{t=0} g(x, u(x) + th(x)) d\sigma \\
&= \int_\Omega f_\xi(x, u(x), \nabla u(x))h(x)\, dx + f_\eta(x, u(x), \nabla u(x))\nabla h(x)\, dx + \int_\Gamma g(y, u(y))h(y) d\sigma(y)
\end{aligned}$$

■

Satz 6.7. *Sei $u \in E = \{u \in C^1(\overline{\Omega})\big| u|_{\Gamma_0} = 0\} = C^1_{\Gamma_0}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ kritischer Punkt von I, $\partial I(u) = 0$. Dann gilt*

$$\forall h \in E\colon \int_\Omega f_\xi(x, u, \nabla u)h\, dx + f_\eta(x, u, \nabla u)\nabla h\, dx + \int_\Gamma g(x, u)h\, d\sigma = 0$$

ist überdies

$$\Big(x \to f_\eta\big(x, u(x), \nabla u(x)\big)\Big) \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^{nN}),$$

so geltern die Euler–Lagrange–Gleichungen.

$$\forall r \le N\colon \sum_{k=1}^{r} \partial_k \left[f_{\eta_k^r}\big(x, u(x), \nabla u(x)\big)\right] + f_{\xi^r}\big(x, u(x)\big) = 0 \text{ in } \Omega \tag{6.8}$$

$$\forall r \le N\colon \nu^k(x) f_{\eta_k^r}\big(x, u(x), \nabla u(x)\big) + g_{\xi^r}\big(x, u(x)\big) = 0 \text{ in } \Gamma_1 \tag{6.9}$$

mit $\boldsymbol{\nu}(x) = \big(\nu^1(x), \dots, \nu^N(x)\big)$ Außennormale an $\partial\Omega$ in Γ_1 und $E = \{u \in C^1(\overline{\Omega}\big||u|_{\Gamma_0} = 0\}$.

Beweis. Wenden Stokes auf jede der N Gleichungen an.
betrachten $k = (0, \dots, 0, v, 0, \dots, 0)$ mit v an der r. Stelle.

$$0 = \partial I(u)h = \int_\Omega \left[f_{\xi^r}\boldsymbol{\nu} + \sum_k f_{\eta_k^r}\partial_k \boldsymbol{\nu}\right] dx + \int_\Gamma g_{\xi_r}\boldsymbol{\nu}\, d\sigma$$

$$\left[\begin{aligned} \sum f_{\eta_r^k}\partial_k \boldsymbol{\nu} &= \sum \partial_k(\boldsymbol{\nu} f_{eta_k^r}) - \sum \boldsymbol{\nu}\delta_k f_{\eta_k^r} \\ &= \operatorname{div}(\boldsymbol{\nu} f_{\eta_k^r}) - \boldsymbol{\nu}\partial_k f_{\eta_k^r}\end{aligned}\right]$$

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega f_{\xi^r}\boldsymbol{\nu} - (\partial_k f_{\eta_k^r}\boldsymbol{\nu}\, dx + \int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{\nu} f_{\eta^r})\, dx + \int_\Gamma g_{\xi^k}\boldsymbol{\nu}\, d\sigma \\
&= \int_\Omega f_{\xi_r}\boldsymbol{\nu} - (\partial_k f_{\eta_k^r})\boldsymbol{\nu}\, dx + \int_\Gamma \boldsymbol{\nu} f_{\eta_k^r}\nu^k\, dx + \int_\Gamma g_{\xi_k}\boldsymbol{\nu}\, dx \qquad \boldsymbol{\nu}\big|_{\Gamma_0} = 0,\ \forall \delta \in C^1_{\Gamma_0}(\overline{\Omega})
\end{aligned}$$

Testfunktion $v \in C^\infty(\Omega)$, $\operatorname{supp} v$ kompakt. Dann folgt

$$\int_\Omega v(f_{\xi^r} + \partial_k(f_{\eta_k^r}))\, dx = 0 \tag{6.10}$$

Annahme

$$
\begin{aligned}
&\exists x_0 \in \Omega: && \big(f_{\xi^r} + \partial_k f_{\eta_k^r}\big)((x_0) \neq 0 \qquad (\text{oBdA} > 0)\\
\Rightarrow &\exists U(x,\varepsilon)\ \forall z \in U(x,\varepsilon): && \big(f_{\xi^r} + \partial_k f_{\eta_k^r}\big)(z) > 0\\
\Rightarrow &\exists v_0 \in C_0^c(\Omega): && \sup_{(6.11)} V \subset U(x,\varepsilon)\\
& && V \geq \frac{1}{2}\text{auf } U(x, \frac{1}{2}\varepsilon)
\end{aligned}
$$

$$
\|u\|_{C^1} = \max_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)| + \max_{x\in\Omega'} |u'(x)|; \big(E, \|\cdot\|_{C^1}\big) \text{ ist Banachraum } I(u) = I_f^{\Omega}(u) + I_g^{\partial\Omega}(u), \qquad u \in E \tag{6.11}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &< \int v_0 \big(f_{\xi^r} + \partial_k f_{\eta_k^r}\big)(x)\, dx\\
0 &= \int_\Gamma v\big(f_{\eta^r}\nu^k + g_{\xi^r}\big)\, d\sigma\\
0 &= \int_{\Gamma_1} v\big(f_{\eta^r}\nu^k + g_{\xi^r}\big)\, d\sigma \qquad \forall v \in E
\end{aligned}
$$

Annahme

$$
\exists y_0 \in \Gamma_1 : \big(f_{\eta_k^r}\nu^k + g_{\xi^r}\big)\, d\sigma \neq 0 \qquad (\text{oBdA.} > 0)
$$

$$
\begin{aligned}
&\exists U(y_0,\varepsilon)\forall z \in U(y_0,\varepsilon)\cap\Gamma_1 : && \big(f_{\eta_k^r}\nu^k + g_{\xi^r}\big)(y) > 0\\
\Rightarrow &v_0 \in E: && \operatorname{supp} v \cap \Gamma_1 \subset U(y_0,\varepsilon)\cap\Gamma_1\\
& && u = 0 \qquad \text{auf } \Gamma_0
\end{aligned}
$$

■

Beispiel 6.8 *(Quellbeisiele).* $N = 1$

1) Es gilt:

$$
\begin{aligned}
-\operatorname{div}\big(f_{\nabla u}(\cdot,u,\nabla u)\big) + f_u(\cdot,u,\nabla u) &= 0\\
u &= 0 \qquad \text{in } \Gamma_0 // \big\langle \nu, f_{\nabla u}(\cdot,u,\nabla u) + g_u(\cdot,u)\big\rangle \ = 0
\end{aligned}
$$

mit $\boldsymbol{\nu}(x) = \big(\nu^1(x),\dots,\nu^n(x)\big)$ Außennormale

2)

$$
f(x,\xi,\eta) = \frac{1}{2}\sum_j\sum_k a_{jk}(x)\eta_j\eta_k + b(x,\xi) \qquad (a_{ij} \text{ symmetrisch}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\eta_i} f(x,\xi,\eta) &= \sum_k \frac{1}{2}a_{ik}(x)\eta_k + \sum_j \frac{1}{2}a_{j,i}(x)\eta_j\\
&= \sum_k a_{1,k}(x)\eta_k\\
&= \Big(\big(a_{jk}(x)\big)\Big)_i\\
f_\eta(x,\xi,\eta) &= A(x)\eta\\
f_{\nabla u}(x,u,\nabla u) &= A(x)\nabla u(x)\\
-\operatorname{div}(A(x)\nabla u(x)) + b_u(x,u(x)) &= 0\\
\langle \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}), A(x)\nabla u(x)\rangle &= 0
\end{aligned}
$$

3) Spezialfall (A const)

$$
\begin{aligned}
a_{jk}(x) &= a_{jk} \in \mathbb{R}\\
-\operatorname{div}\big(A(x)\nabla u(x)\big) &= \operatorname{div}\big(\sum_k a_{1k}u_{x_k}(x),\dots,\sum_k a_{nk}u_{x_k}(x)\big)\\
&= \sum_k a_{ak}u_{x_kx_1}(x) + \dots + \sum_k a_{nk}u_{x_kx_n}(x)\\
&= \sum_k\sum_j a_{j_k}u_{x_jx_k}
\end{aligned}
$$

4) Spezialfall ($A = E$)

$$f(x,\xi,\eta) = \frac{1}{2}|\eta|^2 + b(x,\xi)$$

$$I(f) = \frac{1}{2}\int_{Omega} |\nabla u|^2 + b(x,u(x)) + \int_\Gamma g(x,u)\,dx$$

$$\left[\begin{aligned} -\Delta u + b_n(x,u) &= 0 &&\text{in } \Omega\\ u_0 &= 0 &&\text{auf } \Gamma_0\\ \partial_\nu u_0 + g_u(\cdot,u_0) &= 0 &&\text{auf } \Gamma_0 \end{aligned}\right.$$

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix},\ \langle \nu(x), A(x)\nabla u(x)\rangle = \langle \nu(x), \nabla u(x)\rangle = \partial_\nu u(x)$$

$$\sum_{i,j} a_{ij} u_{x_i x_j} = \Delta u(x)$$

5)

$$\begin{aligned} f(x,\xi,\eta) &= \frac{1}{2}|\eta|^2\\ g(x,\xi) &= b(x)|\xi|^s \qquad , s > 1\\ g_\xi(x,\xi) &= b(x)|\xi|^{s-2}\xi \end{aligned}$$

$$I(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{1}{s}\int_{\partial\Omega} b|u|^s\,d\sigma \to \text{ Min}$$

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 &&\text{in } \Omega\\ \partial_\nu u + b(x)|u|^{s-2}(x)u(x) &= 0 &&\text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

Bemerkung 6.9.

$$\left.\begin{array}{r} \text{Falls } I \text{ aus } V \subset W^{1,p}(\Omega) \text{ Minimum hat}\\ \text{Falls } I \text{ aus } V \subset W^{1,p}(\Omega) \text{ F–diffbar} \end{array}\right] \Rightarrow \big(\partial I(u), h\big) = 0 \qquad \forall h \in V$$

Damit folgt, daß u schwache Lösung "einer" Differentialgleichung ist. Offen ist noch: Wann ist I auf $V \subset W^{1,p}$ differenzierbar, wobei die Antwort nicht mit anderen Bedingungen(I koerziv, I schwach–folgen–unterhalbstetig) im Konflikt stehen soll.

7 Differenzierbarkeit von Superpositionsoperatoren

Definition 7.1 *(Voraussetzungen).* Sei (Ω,μ) Maßraum.

$$\varphi\colon \Omega\times E \to F \qquad \in \mathrm{Car}(\Omega\times E, F) \tag{7.1}$$
$$\varphi\colon (\omega,\cdot) \in C^1(E,F) \quad E,F \text{ Banachraum}(\mathbb{R}^n) \tag{7.2}$$
$$\partial\varphi(\omega,\cdot) \in \mathcal{L}(E,F) \tag{7.3}$$
$$\Phi\big(u\big)(x) := \varphi\big(x,u(x)\big) \tag{7.4}$$

Satz 7.2. *Sei $\varphi(\cdot,0) \in L^q(\Omega,F)$ mit $\frac{1}{q} = \frac{1}{r} = \frac{s}{p}$, $a \in L^r_+(\Omega)$ und*

$$|\partial\varphi(\omega,\xi)| \le a(\omega) + \alpha|\xi|^{p/q-s} \qquad \forall \omega\in\Omega\ \forall\xi\in E$$

Dann gilt

$$\Phi \in C^1\big(L^p(\Omega,E), L^q(\Omega,F)\big)$$

$$\underbrace{\partial\Phi\big(u\big)}_{\in L(L^p,L^q)}(h) = \partial_\xi\varphi\big(\cdot,u(\cdot)\big)h(\cdot)$$

$\Phi, \partial\Phi$ *bilden beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen ab.*

$$\begin{aligned}\big(\partial\Phi(u)\big)h &= \partial_\xi\varphi(\cdot,u)h\\ \big(\partial\Phi(u)\big) &= \partial_\xi\varphi(\cdot,u)\\ \partial\Phi &= \hat{\varphi}_\xi\end{aligned}$$

wobei $\hat{\varphi}_\xi$ *den Einschränkungsoperator bezeichnet.*

Beweis.

$$\begin{aligned}\varphi(x,\xi) &= \varphi(x,0) + \int_0^1 \partial_\xi\varphi(x,t\xi)\xi\,dt \qquad \xi\in\mathbb{R}^n\\ |\varphi(x,\xi)| &\le |\varphi(x,0)| + \int_0^1 a(x)|\xi| + \alpha|\xi|^{p/q}t^{p/q-1}\,dt\\ \|\Phi(u)\|_q &\le \|\Phi(0)\|_q + \|a|u|\|_q + \alpha\||u|^{p/q}\|_q\\ \|a|u|\|_q &\le \|a\|_r\|u\|_p\\ \||u|^{p/q}\|_q &\le \|u\|_p^{p/q}\end{aligned}$$

Φ bildet beschränkte Mengen von L^p in beschränkte Mengen von L^q ab.

$$\Rightarrow \Phi\in C(L^p,L^q)$$

$$Au = \partial_\xi\varphi\big(\cdot,u(\cdot)\big) \qquad \text{Superpositionsoperator}$$

Es folgt

$$A\in C\big(L^p(\Omega),L(E,F)\big)$$

$$\frac{\|\Phi(u+h)-\Phi(u)-\big(Au\big)h\|_{L^q}}{\|h\|_{L^p}} \xrightarrow{\|h\|_{L^p}} 0$$

■

8 Beispiele

Definition 8.1 *(Generalvoraussetzungen).* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet, $\partial\Omega$ glatt
$\Gamma \subset \partial\Omega \quad (n-1)$–dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$
$1 < p < \infty,\ W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow V \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega)$

- V abgeschlossener Teilraum von $W^{1,p}(\Omega)$

- $\mathrm{Vor}(a)\ : a \in \mathrm{Car}(\Omega \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} \exists A \in \mathrm{Car}(\Omega \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})\colon \nabla_\eta A = a \\ A(0,0) = 0 \\ \exists \alpha \geq 0\colon |a(x,\eta)| \leq \alpha(1 + |\eta|^{p-1}) \qquad \forall (x,\eta) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{8.1}$$

- $\mathrm{Vor}(f)\ : f \in \mathrm{Car}(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$1 \leq q \begin{cases} \leq p^* - 1 & n \geq 3 \\ < \infty & n \leq 2 \end{cases} \tag{8.2}$$

mit $p^* = \frac{np}{n-p}$.

$$\exists \alpha \geq 0\colon |f(x,\xi)| \leq \alpha(1 + |\xi|^{q-1}) \qquad \forall (x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}$$

- $g \in \mathrm{Car}(\Gamma \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$1 \leq r \begin{cases} \leq p^* - 1_\partial & n \geq 3 \\ < \infty & n \leq 2 \end{cases} \tag{8.3}$$

mit $p_\partial^* = \frac{n-1}{n-p}$.

$$|g(y,\xi)| \leq \alpha(1 + |\xi|^{r-1}) \qquad \forall (x,\xi) \in \Gamma \times \mathbb{R}$$

$$F(x,\xi) := \int_0^\xi f(x,t)\,dt \Rightarrow F \in \mathrm{Car}^1(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R}), \qquad \partial_2 F = f \tag{8.4}$$

$$G(y,\xi) := \int_0^\xi g(y,t)\,dt \Rightarrow G \in \mathrm{Car}(\Gamma \times \mathbb{R}, \mathbb{R}), \qquad \partial_2 G = g \tag{8.5}$$

$$I(u) := \int_\Omega [A(x, \nabla u(x)) - F(x, u(x))]\ dx - \int_\Gamma G(y, \gamma_\partial u(y)\, d\sigma(y) \tag{8.6}$$

Theorem 8.2. *Mit Definition 8.1 gilt mit $I \in C^1(V, \mathbb{R})$ und $\forall u, v \in V$*

$$\langle \partial I(u), v\rangle = \int_\Omega [a(\cdot, \nabla u) \cdot \nabla v - f(\cdot, u)v]\ dx - \int_\Gamma g(\cdot, \gamma_\partial u) \cdot \gamma_\partial u\, d\sigma \tag{8.7}$$

Beweis. i)

$$\hat{A} := \text{Nemytskii-Operator von } A. \tag{8.8}$$

$$\hat{A}(0) = 0. \tag{8.9}$$

$$(8.1) \Rightarrow \hat{A} \in C^1(L^p(\Omega, \mathbb{R}^n), L^1(\Omega, \mathbb{R})\partial\hat{A}(u)h = a(\cdot, u(\cdot))h(\cdot) = \hat{a}(u)h \qquad \forall u, v \in L^p(\Omega)$$

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{i} & W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\nabla} & L^p(\Omega, \mathbb{R}^n) \\ {\scriptstyle I_A^\Omega}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \hat{A}} \\ \mathbb{R} & \longleftarrow & T = \int \cdot dx & \longleftarrow & L^1(\Omega, \mathbb{R}) \end{array}$$

$$I_A^\Omega = T \circ \hat{A} \circ \nabla \circ i \Rightarrow I_A^\omega \in C^1(V, \mathbb{R})$$
$$\partial I_A^\Omega v = T([\hat{a} \circ \nabla \circ i](u))(\nabla \circ i](v)) = T(\hat{a}(\nabla \cdot u))\nabla v$$

und somit

$$\langle \partial I_A^\Omega(u), v) \rangle = \int_\Omega \hat{a}(\nabla u) \cdot \nabla v \, dx$$

ii) $(8.1) \Rightarrow \hat{F} \in C^1(L^q(\Omega), L^1(\Omega, \mathbb{R})$.

$$\partial \hat{F}(u)v = \hat{f}(u)v.$$

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{i} & W^{1,p}(\Omega) & \xrightarrow{\text{Satz 3.13}} & L^q \\ {\scriptstyle I_F^\Omega}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \hat{F}} \\ \mathbb{R} & \longleftarrow & T = \int \cdot dx & \longleftarrow & L^1(\Omega, \mathbb{R} \end{array}$$

$I_F^\Omega \in C^(V, \mathbb{R})$ und $\langle \partial I_F^\Omega(u), v \rangle = \int_\Omega f(\cdot, u))v \, dx$.

iii)

$$(8.3) \Rightarrow \hat{G} \in C^1(L^p(\Gamma), L^2(\Gamma))\partial \hat{G}(u)v = g(\cdot, u)v.$$

Dann gilt:

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{i} & W^{1,p}(\Omega) & \xrightarrow{\gamma_s} & W^{1-\frac{1}{p}}(\Gamma) \\ {\scriptstyle I_G^\Gamma}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \text{Satz 3.13}} \\ \mathbb{R} & \xleftarrow[T=\int \cdot d\sigma x]{} & L^1(\Gamma) & \xleftarrow[\hat{a}]{C^1} & L^p(\Gamma) \end{array}$$

■

Definition 8.3. $u \in V$ heißt kritischer Punkt von $I :\Leftrightarrow$

$$\partial I(u) = 0$$

Satz 8.4. *Es gilt dann:*
$u \in V$ ist kritischer Punkt von $I \Leftrightarrow u$ erfüllt die Euler Gleichung:

$$\int_\Omega a(\cdot, \nabla u) \cdot \nabla v - f(\cdot, u)v \, dx - \int_\Gamma g(\cdot, u)\gamma_\partial v \, d\sigma = 0 \qquad \forall v \in V \tag{8.10}$$

Beweis.

$$\partial I(u) = 0 \qquad \mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{V}$$
$$\Rightarrow \int_\Omega [a(\cdot, \nabla u)\nabla\varphi - f(\cdot, u)\varphi] \, dx = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$$\begin{aligned} f(\cdot, u) &\in L^{q'}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \\ a(\cdot, \nabla u) &\in L^{\vec{p}}(\Omega, \mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^n) \\ -\langle \nabla \cdot a(\cdot, \nabla u), \varphi \rangle_\mathcal{D} &= \langle a(\cdot, \nabla u), \nabla\varphi \rangle_\mathcal{D} \\ = \int_\Omega a(\cdot, \nabla u) \cdot \nabla\varphi \, dx &= \int_\Omega f(\cdot, u)\varphi \, dx \\ &= \langle f(\cdot, u), \varphi \rangle \end{aligned}$$

■

8.1 Wichtige Bemerkung und Beispiele

(a) Dirichlet Randwertbedingung.
Sei $V = W_0^{1,p}(\Omega)$, $\Gamma = \emptyset$. $u \in V$ kritischer Punkt von

$$I(u) = \int_\Omega [A(\cdot, \nabla u) - (F(\cdot, u)\varphi]\, dx = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

$\Leftrightarrow u \in V$ und

$$\int_\Omega [a(\cdot, \nabla u)\nabla\varphi - f(\cdot, u)\varphi]\, dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{8.11}$$

$\Leftrightarrow$: $u \in V$ ist schwache Lösung des RWP

$$-\nabla a(\cdot, \nabla u) \quad = f(\cdot, u) \quad \text{in } \Omega \tag{8.12}$$
$$\gamma_\partial u \quad = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \tag{8.13}$$

(b) Neumann Randwertproblem.
Sei $V = W^{1,p}(\Omega), \Gamma = \partial\Omega$. $u \in V$ ist kritischer Punkt von $I \Leftrightarrow$
$u \in V$ und die Eulergleichung (8.10) ist erfüllt
$\Leftrightarrow$: $u \in V$ ist schwache Lösung des RWP

$$-\nabla \cdot a(\cdot, \nabla u) \quad = f(\cdot, u) \quad \text{in } \Omega \tag{8.14}$$
$$\nu \cdot a(\cdot, \nabla u) \quad = g(\cdot, u) \quad \text{auf } \Gamma \tag{8.15}$$

(c) Der Semilineare Fall

$$a(x, \xi) = a(x)\xi$$

mit $a \in \mathcal{L}(\Omega)$ $\mathcal{L}$ symm $(\mathbb{R}^n)$. $p = 2$

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow V \hookrightarrow H^1(\Omega)$$

$$A(x, \xi) = \frac{1}{2}a(x)\xi \cdot \xi$$

$$I(u) := \int_\Omega \left[\frac{1}{2}(a\nabla u) \cdot \nabla u - F(\cdot, u)\right]\, dx = -\int_\Gamma G(\cdot, u)\, d\sigma \tag{8.16}$$

$I \in C^1(V, \mathbb{R})$

$$\langle \partial I(u), v\rangle_V = \int_\Omega [(a\nabla u) \cdot \nabla v - f(\cdot, u)v]\; dx = -\int_\Gamma g(\cdot, u)\gamma_0 v\, d\sigma \qquad \forall v \in V$$

Ist $u \in V$ kritischer Punkt, so gilt

$$-\nabla \cdot (a\nabla u) = f(\cdot, u) \qquad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega)$$

(d) Gemischtes semilineares Randwertproblem
Im Folgendem seinen Wachstumsschranken erfüllt:

$$2^* = 2\frac{n}{n-2} \qquad\qquad 2^*_\partial = \frac{2n-2}{n-2} \tag{8.17}$$
$$2^* - 1 = \frac{n-2}{n+2} \qquad\qquad 2^*_\partial - 1 = \frac{n}{n-2} \tag{8.18}$$

$$|f(x, \xi)| \leq \alpha(1 = |\xi|^s) \quad 0 \leq s \begin{cases} \leq \frac{n+2}{n-2} & n \geq 3 \\ < \infty & n \leq 2 \end{cases}$$

$$|f(x, \xi)| \leq \alpha(1 + |xi|^t) \quad 0 \leq r \begin{cases} \leq \frac{n}{n-2} & n \geq 3 \\ < \infty & n \leq 2 \end{cases}$$

$\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ abgeschlossen, $\mathring{\Gamma}_0 \cap \mathring{\Gamma}_1 = \emptyset$, $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \partial\Omega$.

$$V = \big\{u \in H^1(\Omega) \colon gamma_{\partial} u|_{\Gamma_0} = 0\big\}$$

V ist abgeschlossener Teilfram von $H^1(\Omega)$

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow V \hookrightarrow H^1(\Omega)$$

$u \in U$ sei kritischer Punkt von I (8.16),d. h.

$$\forall v \in V \colon \langle \partial I u, v\rangle = 0$$

$\Leftrightarrow$: u ist schwache Lösung in V von

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a\nabla u) = f(\cdot, u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \Gamma_0 \\ \partial_{\nu_a} u = g(\cdot, u) & \text{auf } \Gamma_2 \end{cases}$$

(e) Transmissionsprogleme

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Sigma$$

Ω_ρ beschränktes Gebiet für $\rho = 1, 2$

$$\begin{array}{lll} \Gamma_\rho = \partial\Omega_\rho & \Omega_\rho \in C^1 & \rho = 1, 2 \\ \Sigma \quad (n-1)\text{dim} & C^1 \quad \text{UMF} & \overline{\Sigma} \quad \text{kompakt} \end{array}$$

$$a_\rho \in C\big(\overline{\Omega}_\rho, \mathcal{L}_{\text{symm}}(\mathbb{R}^n)\big) \qquad \rho = 1, 2$$

$$a = \begin{cases} a_1 & \text{auf } \Omega_1 \times \mathbb{R} \\ a_2 & \text{auf } \Omega_2 \times \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow a \in \mathcal{L}_\infty\big(\Omega, \mathcal{L}_{\text{symm}}(\mathbb{R}^n)\big)$$

$$f_\rho \in \text{Car}(\overline{\Omega}_\rho \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$$f = \begin{cases} f_1 & \text{auf } \Omega_1 \times \mathbb{R} \\ f_2 & \text{auf } \Omega_1 \times \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow f \in \text{Car}(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$$|f_g(x, \xi)| \le \alpha(a + |\xi|^{q-1})$$

für

$$\begin{cases} 1 \le q \le \frac{2n}{n-2} & n \ge 3 \\ q < \infty & n \le 2 \end{cases}$$

$$V = H_0^1(\Omega)$$

$$I(u) := \int_\Omega \left[\frac{1}{2}(a\nabla u) \cdot \nabla u - F(\cdot, u)\right] dx$$

$u \in V$ sei stationärer Punkt von $V \Rightarrow$

$$\forall v \in V \colon \int_\Omega [(a\nabla u) \cdot \nabla v - f(\cdot, u) \cdot v] \, dx = 0$$

mit

$$\partial_\rho := \text{äußere Normale an } \Omega_\rho \qquad \rho = 1, 2$$

$$u_\rho := u|_{\Omega_\rho} \qquad \rho = 1, 2$$

Wähle $\varphi_\rho \in \mathcal{D}(\Omega_\rho) \subset V$

$$\int_{\Omega_\rho} (a\nabla u_\rho)\nabla\varphi_\rho - f(\cdot, u_\rho)\varphi_\rho \, dx = 0 \qquad \forall \varphi_\rho \in \mathcal{D}(\Omega_\rho)$$

Dann folgt:

$$
\begin{aligned}
-\nabla \cdot (a_\rho \nabla u_\rho) &= f(\cdot, u_\rho) && \text{in } \Omega_\rho \\
u_\rho &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \cap \Gamma_\rho \\
u_1 &= u_2 && \text{auf } \Sigma \text{ (Stetigkeitsbedingung)} \\
\partial_{\nu_{a_1}} u_1 + \partial_{\nu_{a_2}} u_2 &= 0 && \text{auf } \Sigma \text{ (Transmissionsbedingung)}
\end{aligned}
\tag{8.19}
$$

(f) Ist u eine klassische Lösung eines der obigen RWP so auch eine *schwache Lösung*:

Beispiel (d)

$$
\begin{aligned}
-\nabla \cdot (a\nabla u) &= f(\cdot u) && \text{in } \Omega \\
u &= 0 && \text{auf } \Gamma_0 \text{ (Zwangs–RB)} \\
\partial_{\nu_a} u &= g(\cdot, u) && \text{auf } \Gamma_1 \text{ (natürliche RB.)}
\end{aligned}
$$

(g) i) In den obigen Beispielen wurde nur $a = a^T$ vorausgesetzt.

ii) Es wurden noch keine Aussagen über die Existenz von kritischen Punkten bewiesen.

Beispiel 8.5. Nichtlineare Wellengleichung
$T > 0$ fix, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $a(x,t) = \left(\begin{smallmatrix} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n} & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{L}_{\text{symm}}(\mathbb{R}^{n+1})$

$$
\frac{1}{2}(a\nabla_{(x,t)}u, \nabla_{(x,t)}u) = \frac{1}{2}\left[|\nabla u|^2 - |\partial_t u|^2\right]
$$

$$
V = \left\{u \in H^1(Q_T) \middle| \gamma_{\partial Q_T} u|_{\Gamma_0 \times (0,T)} = 0,\ u(0,0) = u(\cdot, T)\right\}
$$

$$
H_0^1(Q_T) \subset V \subset H^1(Q_T)
$$

$$
I(u) = \int_{Q_T} \frac{1}{2}\left[|\nabla u|^2 - |\partial_t u|^2\right] - F(x,t,u)\, d(x,t) - \int_{\Gamma_1 \times (0,T)} G(y,t,u) d(\sigma t)
$$

$u \in V$ sei stationärer Punkt von I. Dann gilt

$$
\forall v \in V\colon \int_0^T \int_\Omega \left[(a\nabla u, \nabla v) - \partial_t u \cdot \partial_t v\right] - f(\cdot, u)v \, dxdt - \int_0^T \int_{\Gamma_1} g(\cdot, u) v d\sigma dt = 0
$$

$\Leftrightarrow$ $u \in V$ und u ist schwache Lösung von

$$
\begin{aligned}
\partial_t^2 u - \Delta u &= f(x,t,u) && \text{in } \Omega \times (0,T) \\
u &= 0 && \text{auf } \Gamma_0 \times (0,T) \\
\partial_{\nu_a} u &= g(y,t,u) && \text{auf } \Gamma_1 \times (0,T) \\
u(\cdot, 0) &= u(\cdot, T) && \text{in } \Omega
\end{aligned}
\tag{8.20}
$$

entspricht T–periodischen Llösungen einer nicht–linearen Wellengleichung.

Bemerkung 8.6. I kann auf V kein lokales Minimum haben, da die Legendre Bedingung nicht erfüllt ist.

Satz 8.7. *Degenerierte elliptische RWP*
$1 < p < \infty$

$$
\begin{aligned}
-\nabla \cdot (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) &= f(\cdot, u) && \textit{in } \Omega \\
u &= 0 && \textit{auf } \partial\Omega
\end{aligned}
\tag{8.21}
$$

mit

$$
-\alpha(1 + |\xi|^q) \le f(x,\xi)\xi \le \alpha(1 + |\xi|)
$$

$$
1 \le q \begin{cases} \le p^* \frac{2p}{n-p} & n > 2 \\ < \infty & n \le p \end{cases}
$$

Behauptung: (8.21) *besitzt mindestens eine schwache Lösung in* $W_0^{1,p}(\Omega)$, *d.h.*

$$
\exists u \in W_0^{1,p}(\Omega)\colon \int \left[|\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v - f(\cdot, u) v\right] dx = 0 \qquad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)
$$

Ist $F(x, \cdot)$ *strikt fallend, so ist* u *eindeutig!*

Bemerkung 8.8. (a)

$$\Delta_p := \nabla(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \; \ldots \text{p–Laplace–Operator}$$

$$\Delta_2 = \Delta$$

Setzt man

$$a(\nabla u) = |\nabla u|^{p-2}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

so ist

$$\Delta_p = -\nabla(a(\nabla u) \cdot \nabla u$$

und Δ_p ist strikt elliptisch im Punkt $x \in \Omega \Leftrightarrow$

$$\nabla u \neq 0$$

(b) Falls $\Omega \in C^\infty,\ f \in C^\infty$, so gilt

$$\begin{cases} u \in C^\infty(\Omega) & p = 2 \\ u \in C^{2-}\left(\overline{\Omega}\right) & p \neq 2 \end{cases}$$

9 Polykonvexität

Satz 9.1. *Sei (f_k) eine Folge von Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$,*

$$|f_k(x)| \leq M \qquad (k = 1, \dots, x \in \mathbb{R}^n)$$

und (f_k) gleichgradig stetig. Dann existiert eine Teilfolge $(f_{k_j}) \subseteq (f_k)$ und eine stetige Funktion f, sodaß

$$f_{k_j} \to f \text{gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von } \mathbb{R}^n$$

Theorem 9.2 *(Morreys Ungleichung). Sei $n < p \leq \infty$. Dann gilt*

$$\exists C(p,n) \colon \ \|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall u \in C^1(\mathbb{R}^n) \tag{9.1}$$

mit

$$\gamma := 1 - \frac{n}{p}$$

$$\|\cdot\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n} := \|u\|_{C(\overline{U})} + \sup_{x \neq y} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\gamma} \right\}$$

Beweis. siehe[3] ∎

Lemma 9.3 *(Schwache Stetigkeit von Determinanten). Sei $n < q < \infty$ und*

$$\boldsymbol{u_k} \rightharpoonup \boldsymbol{u} \text{ schwach in } W^{1,q}(U;\mathbb{R}^n).$$

Dann gilt

$$\det D\boldsymbol{u}_k \rightharpoonup D\boldsymbol{u}.$$

Beweis. Aus $(\det P)I = P(\operatorname{cof} P)^T$ folgt komponentenweise angeschrieben

$$\det P = \sum_{j=1}^n P^i_j (\operatorname{cof} P)^i_j \qquad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Sei nun $\boldsymbol{w} \in C^\infty(U;\mathbb{R}^n), \boldsymbol{w} = (w^1, \dots, w^n)$. Dann gilt

$$\det D\boldsymbol{w} = \sum_{j=1}^n w^i_{x_j} (\operatorname{cof} D\boldsymbol{w})^i_j \qquad \text{für } i = 1, \dots, n. \tag{9.2}$$

Aus $\sum_{j=1}^n (\operatorname{cof} D\boldsymbol{w})^i_{j,x_j} = 0$ folgt nun, daß sich (9.2) in der Form

$$\det D\boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^n (w^i (\operatorname{cof} D\boldsymbol{w})^i_j)_{x_j}$$

schreiben läßt. Sei nun $v \in C^\infty_c(U)$. Dann gilt für alle $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} \int_U v \det D\boldsymbol{w}\, dx &= \sum_{j=1}^n \int_U v w^i (\operatorname{cof} D\boldsymbol{w}^i_{j,x_j}\, dx \\ &= -\sum_{j=1}^n \int_U v_{x_j} w^i (\operatorname{cof} D\boldsymbol{w})^i_j\, dx. \end{aligned} \tag{9.3}$$

Mit Dichtheitsargument folgt nun für $k \in \mathbb{N}$

$$\int_U v \det D\boldsymbol{u}_k\, dx = -\sum_{j=1}^n \int_U v_{x_j} u^i_k (\operatorname{cof} D\boldsymbol{u}_k)^i_j\, dx. \tag{9.4}$$

Da nun wegen Voraussetzung gilt, daß $n < q < \infty$ und $\boldsymbol{u}_k \rightharpoonup \boldsymbol{u}$ in $W^{1,q}(U;\mathbb{R}^n)$, folgt Theorem 9.2 daß (u_k) beschränkt ist in $C^{0,1-n/q}(U;\mathbb{R}^n)$. Mit Arzela-Ascoli folgt $\boldsymbol{u}_k \to \boldsymbol{u}$ gleichmäßig. Damit folft aus (9.4)

$$\lim_{k\to\infty} \int_U v \det D\boldsymbol{u}_k\, dx \stackrel{!}{=} -\sum_{i=1}^n \int_U v_{x_j} u^i (\operatorname{cof} D\boldsymbol{u})^i_j\, dx = \int_U v \det D\boldsymbol{u}\, dx, \tag{9.5}$$

falls

$$\lim_{k\to\infty}\int_U \psi(\operatorname{cof} D\boldsymbol{u}_k)^i_j\,dx = \int_U \psi(\operatorname{cof} D\boldsymbol{u})^i_j\,dx, \qquad \forall i,j=1,\dots,n\ \forall\psi\in C_c^\infty(U). \tag{9.6}$$

$(\operatorname{cof} D\boldsymbol{u}_k)^i_j$ ist aber die Determinante einer $(n-1)\times(n-1)$ Matrix und kann daher als Summe von $(n-2)\times(n-2)$ Untermatrizen mit gleichmäßig beschränkten Faktoren geschrieben werden. Wir setzen fort bis nur mehr $(1)\times(1)$ Matrizen übrig sind und müssen nur mehr zeigen, daß die Einträge von $D\boldsymbol{u}_k$ schwach gegen die Einträge von $D\boldsymbol{u}$ konvergieren.
Insgesamt gilt, da (U_k) in $W^{1,q}(U,\mathbb{R}^n)$ beschränkt und $|\det D\boldsymbol{u}_k|\leq C|D\boldsymbol{u}_k|^n$ ist, daß $(\det D\boldsymbol{u}_k)$ beschränkt in $L^{q/n}(U)$. Also hat jede Teilfolge eine schwach konvergente Teilfolge in $L^{q/n}(U)$. Mit (9.5) folgt nun daß diese Teilfolge $\det D\boldsymbol{u}$ konvergiert. ∎

Bemerkung 9.4. Unser Ziel wird nun sein eine analoge Aussage zum Theorem 3.8 zu zeigen, für den Fall daß $L(P,z,x)$ nicht konvex in P, sondern nur polykonvex ist. Sei dazu nun $m=n$.

Definition 9.5 *(Polykonvexität).* Sei $P\in\mathbb{R}^{n\times n}, z\in\mathbb{R}^n, x\in U\subseteq\mathbb{R}^n$. L heißt polykonvex $:\Leftrightarrow$

(a)

$$L(P,z,x)=F(P,\det P,z,x) \tag{9.7}$$

mit $F:\mathbb{R}^{n\times n}\times\mathbb{R}^n\times\overline{U}\to\mathbb{R}\in C^\infty$.

(b) Für alle $z\in\mathbb{R}^n$, $x\in\mathbb{R}$ beliebig aber fix ist die Abbildung

$$(P,r)\mapsto F(P,r,z,x) \tag{9.8}$$

konvex.

Theorem 9.6. *Sei $n<q<\infty$. Weiters sei L nach unten beschränkt und polykonvex. Dann gilt:*

$$I[\cdot] \text{ ist schwach folgen unterhalb stetig in } W^{1,q}(U;\mathbb{R}^n).$$

Beweis. Sei $(\boldsymbol{u}_k)$ eine beliebige Folge, die in $W^{1,q}(U;\mathbb{R}^n)$ schwach gegen $\boldsymbol{u}$ konvergiert.
Mit Lemma 9.3 folgt, daß $\det D\boldsymbol{u}_k$ in $L^{q/n}(U)$ schwach gegen $\det D\boldsymbol{u}$ konvergiert.
Definiere $l:=\liminf_{k\to\infty} I[\boldsymbol{u}_k]$. Zu zeigen ist nun

$$I[u]\leq l. \tag{9.9}$$

Weiters ist $(\boldsymbol{u}_k)$ $\|\cdot\|_{W^{1,q}(U)}$-beschränkt. O.B.d.A gelte

$$l=\lim_{k\to\infty} I[\boldsymbol{u}_k].$$

Weiters gilt aus Satz 3.8 mit $p=q$, daß $\boldsymbol{u}_k\to\boldsymbol{u}$ in $L^q(U)$ stark konvergiert. Daraus folgt, daß es eine Teilfolge (o.B.d.A die Folge selbst) gibt, sodaß

$$\boldsymbol{u}_k\to\boldsymbol{u} \qquad \text{f.ü. in } U. \tag{9.10}$$

Sei nun $\varepsilon>0$ beliebig aber fix. Dann folgt mit (9.10) und Egoroff´s Theorem

$$\boldsymbol{u}_k\to\boldsymbol{u} \text{ gleichmäßig auf } E_\varepsilon \tag{9.11}$$

wobei E_ε meßbar ist und

$$|U-E_\varepsilon|\leq\varepsilon. \tag{9.12}$$

Definiere

$$F_\varepsilon:=\left\{x\in U\middle||u(x)|+|Du(x)|\leq\frac{1}{\varepsilon}\right\}. \tag{9.13}$$

Damit gilt wieder

$$|U-F_\varepsilon|\xrightarrow{\varepsilon\to 0}0. \tag{9.14}$$

Sei nun

$$G_\varepsilon:=E_\varepsilon\cap F_\varepsilon \tag{9.15}$$

Es gilt wieder $|U - G_\varepsilon| \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$. Da nun L nach unten beschraenkt ist (o.B.d.A. $L \geq 0$) folgt

$$\begin{aligned} I[\boldsymbol{u}_k] &= \int_U L(D\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_k, x)\,dx \\ &\geq \int_{G_\varepsilon} L(D\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_k, x)\,dx \\ &= \int_{G_\varepsilon} F(D\boldsymbol{u}_k, \det D\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_k, x)\,dx \\ &\geq \int_{G_\varepsilon} F(D\boldsymbol{u}, \det D\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_k, x)\,dx \\ &\quad + \int_{G_\varepsilon} F_p(D\boldsymbol{u}, \det D\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_k, x) \cdot (D\boldsymbol{u}_k - D\boldsymbol{u}) \\ &\qquad + \int_{G_\varepsilon} F_r(D\boldsymbol{u}, \det D\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_k, x) \cdot (\det D\boldsymbol{u}_k - \det D\boldsymbol{u}) \end{aligned} \tag{9.16}$$

Mit der Wahl von G_ε folgt nun

$$\lim_{k\to\infty} \int_{G_\varepsilon} F(D\boldsymbol{u}, \det D\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_k, x)\,dx = \int_{G_\varepsilon} F(D\boldsymbol{u}, \det D\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, x)\,dx. \tag{9.17}$$

Weiters gilt, weil $F_p(D\boldsymbol{u}, \det D\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_k, x)\,dx \to F_p(D\boldsymbol{u}, \det D\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, x)\,dx$ bzw. $F_r(D\boldsymbol{u}, \det D\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_k, x)\,dx \to F_r(D\boldsymbol{u}, \det D\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, x)\,dx$ gleichmäßig auf G_ε und $D\boldsymbol{u}_k \rightharpoonup D\boldsymbol{u}$ bzw. $\det D\boldsymbol{u}_k \rightharpoonup \det D\boldsymbol{u}$ folgt, daß der 2. und 3. Term auf der rechten Seite in (9.16) mit $k \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Damit haben wir gezeigt

$$L = lim_{k\to\infty} I[u_k] \geq \int_{G_\varepsilon} F(D\boldsymbol{u}, \det D\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, x)\,dx.$$

Da (9) für alle $\varepsilon > 0$ gilt folgt mit $\varepsilon \to 0$ und dem Satz über Monotone Konvergenz ($L \geq 0$) (9.9). ■

Daraus folgt sofort mit Lemma 2.1

Theorem 9.7 *(Existenz von Minimierer für polykonvexe Funktionale). Sei $n < q < \infty$, L koerziv und polykonvex und $\mathcal{A} \neq \emptyset$.*
Dann existiert ein $\mathbf{u} \in \mathcal{A}$, sodaß

$$I[\boldsymbol{u}] = \min_{w\in\mathcal{A}} I[w].$$

Literatur

[1] Struwe, Michael
VARIATONAL METHODS,
Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems
Springer Verlag

[2] Dacorogna, B.
DIRECT METHODS IN DHE CACULUS OF VARIATIONS
Springer

[3] Evans, L. C.
PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS
AMS

[4] jesse-douglass
???

[5] Lieb, Elliot H.
Loss, Michael
ANALYSIS
AMS

[6] J.B. Cooper und W. Schachermayer
SKRIPTUM ZUR VORLESUNG ANALYSIS III