Singuläre Integralgleichungen

Vorlesung von P. Müller

WS 2002/3

Skriptum erstellt von D. Kindermann

Kapitel 1

Einführung

Zunächst einige Beispiele von Singulären Integraloperatoren: Das Paradebeispiel dafür im Eindimensionalen ist die **Hilberttransformation**:

$$H : f \to \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x-y| \geq \epsilon} \frac{f(y)}{x-y} dy,$$

sie kann auch über die Fouriertransformation definiert werden:

$$\widehat{Hf} = i\mathrm{sign}(\xi)\hat{f}(\xi).$$

Mit Plancharel gilt die Isometrie

$$\|Hf\|_{L^2(I\!R)} = \|f\|_{L^2}.$$

Ein interessantes Beispiel ist der **Integraloperator mit Cauchykern**: Sei Ω ein C^1- oder Lipschitzgebiet in $I\!R^n$, damit meinen wir, daß sich Ω lokal darstellen läßt als

$$\Omega = \{(u,v)|v \in I\!R^{n-1} \phi(v) \leq u\},$$

$$\phi : I\!R^{n-1} \to I\!R, \quad \phi \quad Lip, \text{ bzw. } C^1.$$

Der uns interessierende Operator ist ($S = \partial\Omega$):

$$f : S \to I\!R; \quad f \to u(x) = \int_S \left(\frac{(x-y)}{\|x-y\|}, n(y) \right) f(y)\mathrm{d}y,$$

wobei $n(y)$ die Außennormale ist. Für C^1- und Lipschitz-Gebiete funktioniert die klassische Theorie nicht.

Die Hauptresultate für den Cauchy-Operator sind im folgenden Satz zitiert:

Satz 1 *Es sei $f \in L^2(S), x_0 \in S$, dann gilt:*

1. $$\lim_{x \to x_0} u(x) = -\frac{1}{2} f(x_0) + pv. \int_S \left(\frac{(x-y)}{\|x-y\|} n(y) \right) f(y) dy =:$$
$$-\frac{1}{2} f(x_0) + K f(x_0)$$
für fast alle $x_0 \in S$.
$$(pv. \int_S ...)(x) := \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x-y|<\epsilon} \left(\frac{(x-y)}{\|x-y\|} n(y) \right) f(y) \mathrm{d}y.$$

2. $$\phi \in Lip \Rightarrow \|K\|_{L^2(S) \to L^2(S)} \leq C \|\phi\|_{Lip}$$

3. $$\|\phi_i - \phi\|_{Lip} \to 0 \Rightarrow \|K_i - K\|_{L^2(S) \to L^2(S)} \to 0$$
für $\phi \in C^1, \phi_i \in C^\infty$

4. $\phi \in Lip \Rightarrow \frac{1}{2} I \pm K$ *ist auf L^2 invertierbar*
$$\frac{1}{C} \|\frac{1}{2} I - K\|_{L^2 \to L^2} \leq \|\frac{1}{2} I + K\|_{L^2 \to L^2} \leq C \|\frac{1}{2} I - K\|_{L^2 \to L^2}$$
.

Die letzte Ungleichung nennt man nach *Verchota*. Damit gilt auch

$$I = \frac{1}{2} I + K + \frac{1}{2} I - K$$

und

$$\|f\| = \|(\frac{1}{2} I + K) f\| + \|(\frac{1}{2} I - K) f\| \leq (1 + C) \|(\frac{1}{2} I - K) f\|.$$

Der Kern des Cauchy Operators,

$$k(x, y) = \frac{\phi(x) - \phi(y) + \langle \nabla \phi(x), (x-y) \rangle}{(|x-y|^2 + |\phi(x) - \phi(y)|^2)^{1/2}})$$

ist ein singulärer auf $I\!R^{n-1}$. Die in der Vorlesung vorkommenden Methoden sind die Basis für die Weiterentwicklung der Theorie des Cauchy Integrals auf

Lipschitz-Gebiete: Die Theorie für $C^{1+\epsilon}$-Gebiete ist klassisch, jedoch die Resultate für Lipschitz-Gebiete sind erst in den 80er Jahren (20.Jhdt.) bewiesen worden. Der Grund für den Unterschied ist folgender: Sei

$$A : I\!R \to I\!R, \phi(x) = x + iA(x)), \|A\|_{Lip} \leq M$$

$$C_f : z \to \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w = \int_{I\!R} \frac{f(x+iA(x))(1+iA(x))}{x+iA(x)-z}\mathrm{d}x$$

Am Rand $z = y + iA(y)$ gilt

$$(x+iA(x)-y-iA(y))^{-1} = (x-y+i(A(x)-A(y)))^{-1} =$$
$$= ((x-y)+iA(x)'(x-y)+O(|x-y|^{\delta+1}))^{-1} \quad \text{falls } A \in C^{1+\delta}$$
$$= (x-y)^{-1}(1+iA(x)')^{-1} + O(|x-y|^{-1+\delta})$$

damit sieht man, daß für $\delta > 0$ der letzte Term schwach singulär bleibt, wohingegen für Lipschitz-Gebiete Probleme auftreten.

Fortsetzung von Sobolev Räume: Sei $D \subset I\!R^n$ offen und zusammenhängend, sie $L^p_k(D)$ der Raum der Funktionen, die alle Ableitungen bis zur Ordnung k in L^p haben.

Gesucht sind nun Bedingungen an D (notwendig, hinreichend und überprüfbar), sodaß ein Fortsetzungsoperator existiert, also ein linearer, stetiger Operator:

$$\Lambda : L^p_k(D) \to L^p_k(I\!R),$$

mit

$$\Lambda f|_D = f \quad 1 \leq p \leq \infty, k \in N,$$

für alle $f \in L^p_k(D)$.

Es gilt: Sei D ein Lipschitzgebiet, dann existiert ein Fortsetzungsoperator für alle p, und k (Stein).

Ein anderes Resultat ist: Λ existiert für alle p, k genau dann wenn es ein ϵ und δ gibt, sodaß für alle $x, y \in D$, mit $|x-y| \leq \delta$ und für die es eine Kurve $\gamma \in D$ gibt, die x und y verbindet und deren Länge kleiner als $\frac{1}{\epsilon}|x-y|$, ist, die Bedingung erfüllt ist: Für alle $z \in \gamma$ ist

$$\mathrm{dist}(z, D) \leq \frac{1}{\epsilon}\frac{|z-x||y-z|}{|y-x|}.$$

Im wesentlichen bedeutet das, daß Spitzen ausgeschlossen sind.

Kapitel 2

Geometrie des $\mathbb{R}^n$

2.1 Der Satz von Hardy und Littlewood

Sei m das Lebesque-maß in $\mathbb{R}^n$, $B(x,r)$ sei die Kugel mit Mittelpunkt x und Radius r.

Zur Erinnerung:

$$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \quad \Leftrightarrow \quad \forall B \subset \mathbb{R}^n \text{ beschränkt } \int_B |f(x)|dx \leq \infty.$$

Definition 1 *Die Funktion*

$$Mf(x) := \sup_r \frac{1}{\mathrm{m}(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy$$

heißt die Maximalfunktion von Hardy-Littlewood.

Der folgende Satz von Hardy und Littlewood gibt eine Abschätzung für die Maximalfunktion an:

Satz 2 *Es existiert eine Konstante A, sodaß für alle $\alpha > 0$ und $f \in L^1(\mathbb{R})$ die Abschätzung*

$$\mathrm{m}\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \alpha\} \leq A \frac{\|f\|_{L^1}}{\alpha}$$

erfüllt ist.

Mit derselben Konstante läßt sich die Maximalfunktion für alle $f \in L^p(\mathbb{R})$: durch

$$\|Mf(x)\|_{L^p} \leq A \frac{p}{p-1} \|f\|_{L^p}$$

beschränken.

Bemerkung: Es gilt für $g \in L^1(\mathbb{R})$

$$\mathrm{m}\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) > \alpha\} \leq \frac{\|g\|_{L^1}}{\alpha}$$

(Tschebyschef Ungleichung), aber für $f \in L^1$ ist im allgemeinen $Mf \notin L^1$!

Bemerkung: Sei $\lambda_f(\alpha) = m\{x : |f(x)| \geq \alpha\}$ dann gilt immer (Maßtheorie):

$$\int |f|^p \mathrm{d}\lambda = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \lambda_f(\alpha) \mathrm{d}\alpha = -\int \alpha^p \mathrm{d}\lambda_f(\alpha)$$

Der Beweis von Satz 2 stützt sich auf ein technisches Überdeckungslemma:

Lemma 1 *Es seien B_j eine Folge von Kugeln mit Mittelpunkten $x_i \in \mathbb{R}^n$ und Radii r_i mit $\sup r_i < \infty$. Dann existiert eine Teilfolge j_k von* disjunkten *Kugeln $B_{j_k} := B(x_{j_k}, r_{j_k})$ mit $\sum_k \mathrm{m}(B_{j_k}) \geq 5^{-n} \mathrm{m}(\bigcup_{j=1}^\infty B_j)$*

$$j \neq l \Rightarrow B_{j_k} \cap B_{j_l} = \{\}$$

Beweis: Wähle B_{j_1} sodaß $\mathrm{diam}(B_{j_1}) \geq \frac{1}{2} \sup\{\mathrm{diam}(B_i), i \in \mathbb{N}\}$. Weiter mit Induktion: Angenommen $B_{j_1}..B_{j_k}$ sind gewählt, dann bestimme $B_{j_{k+1}}$ sodaß

$$\mathrm{diam}(B_{j_{k+1}}) \geq \frac{1}{2} \sup\{\mathrm{diam} B_i | B_i \cap \bigcup_{l=1}^k B_{j_l} = \{\}\}$$

Es ist nun dieser Prozeß entweder

1. unendlich oft fortsetzbar

2. oder nicht

Im Folgenden gelte Fall 1): Wir machen eine weitere Fallunterscheidung:

1a. $\sum_{k=1}^\infty \mathrm{m}(B_{j_k}) = \infty \rightarrow$ wir haben fertig.

1b. $\sum_{k=1}^\infty \mathrm{m}(B_{j_k}) < \infty$

also es gelte nun Fall 1b): Wir zeigen daß die Teilfolge der Kugeln mit 5-fachem Radius schon alle Kugeln überdecken:

$$\bigcup_{i=1}^\infty B_i =: E \subset \bigcup_{k=1}^\infty B_{j_k}^*$$

wobei $B^*_{j_k} = B(x_{j_k}, 5r_{j_k})$. Falls dies gezeigt ist,

ist automatisch $B_{j_k} \cap B_{j_l} = \{\}$ für $k \neq l$, erfüllt, weil $B_{j_k} \subset B_i$; und nach Definition $B_i \cup \bigcup_{l=1}^{k-1} B_{j_l} = \{\}$. Aus $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B^*_{j_k}$ folgt dann

$$\mathrm{m}(E) \leq \mathrm{m}(\bigcup_{k=1}^{\infty} B^*_{j_k}) \leq \sum \mathrm{m}(B^*_{j_k}) \leq 5^{-n} \sum \mathrm{m}(B_{j_k})$$

Also müssen wir nur noch $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B^*_{j_k}$ zeigen, es reicht aus zu beweisen, daß für alle j:

$$B_j \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B^*_{j_k}.$$

Sei B_j beliebig aber nicht in $\{B_{j_1}..B_{j_k}..\}$ (sonst ist es trivial). Sei k die kleinste natürliche Zahl sodaß

$$\mathrm{diam}(B_{j_{k+1}}) < \frac{1}{2}\mathrm{diam}B_j,$$

diese Wahl ist möglich, weil aus Fall 1b) $\Rightarrow \mathrm{diam}(B_{j_k}) \rightarrow 0$.

Behauptung: Es gilt

$$B_j \cap \bigcup_{l=1}^{k} B_{j_k} \neq \{\}, \tag{2.1}$$

denn falls nicht würde B_j bei der Auswahl der $B_{j_{k+1}}$ mitspielen (nach der Definition) da aber $B_{j_{k+1}}$ so gewählt ist, daß

$$\mathrm{diam}B_{j_{k+1}} \geq \frac{1}{2} \sup\{\mathrm{diam}B_i | B_i \cap \bigcup_{l=1}^{k} B_{j_l} = \{\}\}$$

wäre in diesem Fall dann $\mathrm{diam}B_{j_{k+1}} \geq \frac{1}{2}B_j$ (im Widerspruch zur Wahl von k). also gilt (2.1).

Weil unser k das kleinste ist sodaß $\mathrm{diam}B_{j_{k+1}} \leq \frac{1}{2}B_j$ folgt

$$\mathrm{diam}(B_{j_l}) \geq \frac{1}{2}\mathrm{diam}B_j, \quad l = 1..k \tag{2.2}$$

Sei $l_0 \leq k$ so daß $B_{j_{l_0}} \cap B_j \neq 0$ (so etwas existiert wegen (2.1)), dann folgt aus (2.1) + (2.2) $B^*_{j_{l_0}} \supset B_j$, damit ergibt sich

$$\bigcup B^*_{j_k} \supset B_j \qquad \square$$

Wir kommen nun zum *Beweis des Satzes von Hardy und Littlewood:* Sei $f \in L^1, \alpha \geq 0, E_\alpha := \{x \in : Mf(x) > \alpha\}$. Es sei $x \in E_\alpha$ beliebig, dann gibt es einen Radius $r_x > 0$ mit

$$\frac{\int_{B(x,r_x)} |f(y)| \mathrm{d}y}{\mathrm{m}(B(x, r_x))} \geq \alpha.$$

Definiere $B(x, r_x) =: B_x,\ E = \bigcup_{x \in E_\alpha} B_x$. Auf $\{B_x, x \in E_\alpha\}$ wenden wir das vorherige Lemma an. Damit erhalten wir eine Teilfolge $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ und disjunkte Kugeln $B_{x_j} \cup B_{x_l} = \{\}, j \neq l$ mit der Eigenschaft

$$\sum \mathrm{m}(B_{x_j}) \geq 5^{-n} \mathrm{m}(\bigcup_x B_x) = 5^n \mathrm{m}(E),$$

Außerdem überdecken die Kugeln mit 5-fachem Radius E:

$$\bigcup B^*_{x_j} \supset E.$$

(Die Voraussetzung $\sup r_x < \infty$ ist erfüllt, weil $\int_{B_x} |f| \geq \alpha \mathrm{m}(B_x) = \alpha c r_x^n$, damit sind die Radii beschränkt). Wir schätzen ab

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |f| \geq \int_{\bigcup_j B_{x_j}} |f| = \sum_j \int_{B_{x_j}} |f| \geq$$

$$\alpha \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{m}(B_{x_j}) \geq \alpha 5^{-n} \mathrm{m}(E) \geq \alpha 5^{-n} \mathrm{m}(E_\alpha) \geq \alpha 5^{-n} \lambda_f(\alpha).$$

Damit haben wir die erste Behauptung bewiesen:

$$\lambda_f(\alpha) \leq \frac{\|f\|_{L^1}}{\alpha} 5^n$$

Wir zeigen jetzt die zweite:

$$\|Mf\|_p \leq c_p A \|f\|_p. \tag{2.3}$$

Aus der Maßtheorie ist bekannt daß

$$\|Mf\|_p = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \lambda_f \mathrm{d}\alpha \tag{2.4}$$

Sei $\alpha > 0$ beliebig aber fix. Wir definieren die Funktion f_1 indem wir von f die kleinen Anteile wegschneiden:

$$f_1(x) := \begin{cases} f(x) & \text{wenn} \quad |f(x)| \geq \frac{\alpha}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Trivialerweise läßt sich f für alle x so abschätzen:

$$|f(x)| \leq |f_1(x)| + \frac{\alpha}{2}$$

Diese Ungleichung gilt auch für die Maximalfunktionen:

$$|Mf(x)| \leq Mf_1(x) + \frac{\alpha}{2}$$

Daraus folgt

$$Mf(x) > \alpha \Rightarrow Mf_1(x) \geq \frac{\alpha}{2},$$

also

$$E_\alpha \subset \{x : Mf_1(x) > \frac{\alpha}{2}\}$$

und somit

$$\lambda_f(\alpha) = \mathrm{m}(E_\alpha) \leq \mathrm{m}(\{x : Mf_1(x) > \frac{\alpha}{2}\}) \leq 5^n \frac{\|f_1\|_1}{\alpha}.$$

Man beachte daß f_1 von α abhängig ist.

Damit gilt

$$(2.4) \leq C \int_0^\infty \alpha^{p-1} \frac{\|f_1\|_1}{\alpha} \mathrm{d}\alpha = \int_0^\alpha \alpha^{p-2} \left(\int_{\{x:|f(x)|\geq\alpha/2\}} |f(z)| \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}\alpha$$

$$= \int_0^\alpha \int_{R^n} \alpha^{p-2} \chi_{\{x:|f(x)|\geq\alpha/2\}} |f(z)| \mathrm{d}z \mathrm{d}\alpha$$

Nach einer Anwendung des Satzes von Fubini erhalten wir

$$= C \int |f(x)| \int_0^{2|f(x)|} \alpha^{p-2} \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}x = C \int |f(x)| \left. \frac{\alpha^{p-1}}{p-1} \right|_0^{2|f(x)|} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{C}{p-1} \int_R |f|^p$$

Also mit allen Konstanten haben wir

$$\|Mf\|_p^p \leq 2^{p-1} 5^n \frac{p}{p-1} \|f\|_{L^p}^p \qquad \square$$

Unser nächstes Ziel ist es Abschätzungen für singuläre Integraloperatoren der Form

$$T : f \to pv. \int k(x-y) f(y) \mathrm{d}y$$

zu finden. Also zum Beispiel

$$\|Tf\|_p \leq C_p \|f\|_p \quad 1 < p < \infty.$$

Dies wird für solche singuläre Kerne $k(x)$ erfüllt sein, für die gilt:

$$|k(x)| \leq |x|^{-n},$$

$$|\nabla k(x)| \leq |x|^{-n-1}$$

$$\int_{\epsilon < |x| < A} k(x) = 0.$$

Motivation: Es ist nicht möglich $\int k(x-y) f(y) \mathrm{d}y$ direkt mit einer Methode abzuschätzen, sondern man muß zuerst f in eine Summe zerlegen: $f = g + b$, dann $\|Tf\| \leq \|Tg\| + \|Tb\|$ und $\|Tb\|$ mit 'Methode 1' und $\|Tg\|$ mit 'Methode 2' abschätzen. Also brauchen wir eine Zerlegung $f = g + b$. Zunächst zeigen wir daß man die Funktion f aus der in der Definition von Mf durchgeführten Mittelung wieder zurückgewinnen kann:

Korollar 1 *$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann gilt*

$$f(x) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\mathrm{m}(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y) \mathrm{d}y \quad \textit{für fast alle } x \in \mathbb{R}^n$$

Beweis: Sei

$$f_r(x) := \frac{1}{\mathrm{m}(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y) \mathrm{d}y;$$

für $h \in C_0(\mathbb{R}^n)$ zeigt man leicht

$$\lim_{r \to 0} \|h_r - h\|_\infty \to 0.$$

Sei $\epsilon > 0$ beliebig, dann gibt es eine L^1-Funktion f und eine C_0-Funktion h mit

$$f = g + h, \quad \|g\|_{L^1} \leq \epsilon^2, \tag{2.5}$$

dies zeigt man indem f auf einer kompakten Menge I einschränkt, sodaß $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n \setminus I)} \leq \epsilon^2/2$ und dann die Dichtheit der stetigen Funktionen in L^1 verwendet. Also sei $\epsilon > 0$, wähle $f = g + h$ wie in (2.5), sei

$$\Lambda(x) := |\mathrm{limsup}_{r \to 0} f_r(x)) - \mathrm{liminf}_{r \to 0} f_r(x)|,$$

dann folgt

$$\Lambda(x) \leq 2Mg(x).$$

Damit erhalten wir mit Satz 2

$$\mathrm{m}(\{x \in I\!R : \Lambda(x) > \epsilon\}) \leq \mathrm{m}(\{x \in I\!R : Mg(x) > \epsilon/2\}) \leq$$

$$\leq C(n)\frac{\|g\|_1}{\epsilon} \leq C(n)\epsilon$$

(denn $\|g\|_1 \leq \epsilon^2$ per Definition). Daraus folgt für beliebiges ϵ

$$\mathrm{m}(\{x \in I\!R : \Lambda(x) > \epsilon\}) > \epsilon$$

und schließlich

$$\mathrm{m}(\{x \in I\!R : \Lambda(x) \neq 0\}) = 0. \qquad \square$$

2.2 Die Calderon-Zygmund Zerlegung

Wie schon in der Motivation angedeutet, benötigt man eine Zerlegung einer Funktion in die 'guten' und 'schlechten' Anteile. Der folgende Satz ist dafür die Grundlage

Satz 3 *Sei $f \in L^1(I\!R^n)$, $\alpha > 0$. Dann existiert eine disjunkte Zerlegung von $I\!R^n = \Omega \cup F$ sodaß*

1. $$|f(x)| \leq \alpha \quad \text{\textit{fast überall auf}} \quad F$$

2. $$\Omega = \bigcup_i Q_i,$$

   wobei die Q_i Würfel mit paarweise disjunktem Inneren sind.

3. *Für alle Q_i gilt*

   $$\alpha\mathrm{m}(Q_i) \leq \int_{Q_i} |f| \leq \alpha\mathrm{m}(Q_i)2^n$$

4. $$\mathrm{m}(\Omega) \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_{L^1}$$

Beweis: Definiere die Menge der n-dimensionalen Quader mit Seitenlänge 2^{-k}

$$M_k := \left\{ [\frac{l-1}{2^k}, \frac{l}{2^k}] \times \text{.. n-mal..} \times [\frac{l-1}{2^k}, \frac{l}{2^k}] : l \in \boldsymbol{Z} \right\}, k \in \boldsymbol{Z}$$

Bestimme $k_0(\alpha, \|f\|)$ sodaß für alle Quader $Q \in M_{k_0}$

$$\int_Q |f| \leq \mathrm{m}(Q)\alpha.$$

k_0 ist wohldefiniert, weil $\int_Q |f| \leq \int_{R^n} |f|$ und $\mathrm{m}(Q) = 2^{-k_0}$.

Wähle $Q' \in M_{k_0}$, zerlege Q' in 2^n kongruente Würfel in M_{k_0+1} (und somit mit halber Seitenlänge von Q'). Sei Q'' einer dieser 2^n Würfel.

Fallunterscheidung:

1.
$$\frac{1}{\mathrm{m}(Q'')} \int_{Q''} |f| \leq \alpha$$

2.
$$\frac{1}{\mathrm{m}(Q'')} \int_{Q''} |f| > \alpha$$

Im **Fall 1)** ersetze Q'' durch 2^n Würfel der halben Seitenlänge (analog wie bei Q') und für jeden betrachte die 2 Fälle Fall 1) und Fall 2).

Im **Fall 2)** wird Q'' ein Mitglied der Familie $\mathcal{Q}$ d.h. $\mathcal{Q} = \mathcal{Q} \cup \{Q“\}$, Q'' wird jetzt *nie mehr* zerlegt.

Im Fall 2 gilt für Q''

$$\alpha \mathrm{m}(Q'') \leq \int_{Q''} |f| \leq \int_{Q'} |f| \leq \mathrm{m}(Q')\alpha \leq 2^n \alpha \mathrm{m}(Q'')$$

(wobei die erste Ungleichung gilt weil Q'' ein Fall 2)-Würfel ist und die zweite Ungleichung gilt weil Q' vom Fall 1)-Typ ist.)

Im Fall 1) wird Q'' wieder zerlegt und die obige Fallunterscheidung so lange durchgeführt bis man auf einen Fall 2 -Würfel stößt und dieser wird in $\mathcal{Q}$ aufgenommen!

Wir setzen $\Omega = \bigcup_{Q_i \in \mathcal{Q}} Q_i$, $F = I\!R^n \setminus \Omega$, die Q_i, Q_j sind nach ihrer Definition mit paarweise disjunktem Inneren, also gilt Behauptung 2.

Sei $x \in F$ dann gilt

$$f(x) = \lim_{\operatorname{diam}(Q) \to 0, x \in Q} \frac{1}{\mathrm{m}(Q)} \int_Q f \quad \text{fast überall } \leq \alpha,$$

weil jedes Q, daß x enthält ein Fall 1 Würfel ist ($x \in F$) damit gilt Behauptung 1).

Sei Q_i ein Würfel in $\mathcal{Q}$, dann folgt

$$\frac{1}{\mathrm{m}(Q_i)} \int_{Q_i} f \geq \alpha \tag{2.6}$$

weil Q_i ein Fall 2 Würfel ist.

Zu Q_i gibt es einen Würfel $\tilde{Q}_i$ mit $Q_i \supset \tilde{Q}_i$ und $\mathrm{m}(\tilde{Q}_i) = 2^n \mathrm{m}(Q_i)$, denn $\tilde{Q}_i$ sei der direkte Vorgänger von Q_i, und damit erfüllt $\tilde{Q}_i$ die Bedingung von Fall 1 (denn ein Vater von Fall 2-Würfel ist ein Fall 1-Würfel). Daher gilt

$$\int_{Q_i} |f| \leq \int_{\tilde{Q}_i} |f| \leq \alpha \mathrm{m}(\tilde{Q}_i) = 2^n \mathrm{m}(Q_i)$$

und damit ist Behauptung 3 mit (2.6) bewiesen.

Behauptung 4:

$$\mathrm{m}(\Omega) = \sum_{Q_i \in \mathcal{Q}} \mathrm{m}(Q_i) \leq \sum \frac{1}{\alpha} \int_{Q_i} |f| = \frac{1}{\alpha} \|f\|_{L^1}$$

wobei die erste Ungleichung aus (2.6) folgt, die zweite weil die Q_i paarweise disjunkt sind. $\square$

Wir definieren die Calderon-Zygmund Zerlegung von f bezüglich des Niveaus $\alpha > 0$:

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & x \in F \\ \frac{1}{\mathrm{m}(Q_i)} \int_{Q_i} f \,\mathrm{d}y & x \in Q_i \end{cases} \qquad b := f - g$$

Es gilt mit dem letzten Satz

$$|g(x)| \leq 2^n \alpha \quad b(x) = 0 \quad \forall x \in F$$

$$\int_{Q_i} b = 0 \quad \mathrm{m}(\Omega) \leq \frac{\|f\|_1}{\alpha}.$$

Kapitel 3

Singuläre Integrale

Wie schon angedeutet, interessieren wir uns dafür, wann ein singulärer Integraloperator stetig zwischen L^p-Räumen abbildet. Wir betrachten zunächst Faltungsoperatoren. Der nächste Satz gibt eine hinreichende Bedingung an die Kern-Funktion k, damit der zugehörige Faltungsoperator für alle L^p mit $1 < p < \infty$ stetig ist. Im Folgenden bezeichne $\widehat{f}$ die Fouriertransformierte von f.

Satz 4 *Sei $k(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, sodaß*

$$
\begin{aligned}
\|\widehat{k}\|_\infty &\leq B && (3.1)\\
\int_{|x|>2|y|} |k(x) - k(x-y)|\mathrm{d}x &\leq B \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n, |y| \neq 0, , && (3.2)
\end{aligned}
$$

dann gilt für

$$
Tf(x) := \int k(x-y)f(y)\mathrm{d}y :
$$

Für alle $1 < p < \infty$ gibt es eine Konstante $A(p, n, B)$, sodaß

$$
\|Tf\|_p \leq A(p, n, B)\|f\|_p \quad f \in L^p
$$

Ein typisches Beispiel für die Anwendung dieses Satzes ist die Hilberttransformation: $k(x) = \frac{1}{x}$, $\int_{|x|>2|y|} |\frac{1}{x} - \frac{1}{x-y}|\mathrm{d}x \leq 14$.

Beweis: **Teil 1:** Wir zeigen T ist weak type 2-2, d.h. es existiert eine Konstante C mit

$$
\mathrm{m}(\{x \in \mathbb{R} : |Tf(x)| > \alpha\}) \leq C\frac{\|f\|_2}{\alpha^2}.
$$

Es gilt $\widehat{Tf} = \widehat{k}\widehat{f}$, und damit $\|Tf\|_2 = \|\widehat{k}\widehat{f}\|_2 \leq \|\widehat{k}\|_\infty \|f\|_2 \leq B\|f\|_2$, damit folgt sofort mit Anwendung der Tchebychef Ungleichung, daß T w.t. 2-2 ist.

Teil 2: Wir zeigen T ist weak type 1-1, d.h. es existiert eine Konstante C mit

$$\mathrm{m}(\{x \in \mathbb{R} : |Tf(x)| > \alpha\}) \leq C\frac{\|f\|_1}{\alpha}.$$

Also sei $f \in L^1, \alpha > 0$ gegeben, dann wenden wir die Calderon-Zygmund Zerlegung an und erhalten ein disjunkte Zerlegung $\mathbb{R}^n = F \cup \Omega$, wobei $\Omega = \bigcup Q_i$ und die Q_i paarweise disjunktes Inneres besitzen, $\mathrm{m}(\Omega) \leq \frac{\|f\|_1}{\alpha}$, $|f(x)| \leq \alpha$ fast überall in F und

$$\alpha \mathrm{m}(Q_i) \leq \int_{Q_i} |f(x)| \mathrm{d}x \leq 2^n \alpha \mathrm{m}(Q_i)$$

gilt. f wird zerlegt in $f = g + b$, wobei

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in F \\ \int_{Q_i} f \mathrm{d}y \frac{1}{\mathrm{m}(Q_i)} & x \in Q_i \end{cases}.$$

Klarerweise gilt $Tf = Tb + Tg$; wir wenden die Dreiecksungleichung für Verteilungsfunktionen an (Übung):

$$\begin{aligned} &\mathrm{m}(\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \alpha\}) \leq \\ &\quad \mathrm{m}(\{x \in \mathbb{R}^n : |Tb(x)| > \frac{\alpha}{2}\}) \quad + \quad \mathrm{m}(\{x \in \mathbb{R}^n : |Tg(x)| > \frac{\alpha}{2}\}) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Teil 2.1: Weil für $x \in F$ $g(x) = f(x) \leq \alpha$, folgt

$$\|g\|_2^2 = \int_F |g|^2 + \int_\Omega |g|^2 \leq \alpha \int_F |f| + 2^{2n}\alpha^2 \mathrm{m}(\Omega) \leq$$

$$\leq \alpha\|f\|_1 + C\alpha^2 \frac{|f\|_1}{\alpha} \leq C\alpha\|f\|_1$$

Wir wissen bereits daß T w.t. 2-2 ist, daher

$$\mathrm{m}(\{x \in \mathbb{R} : |Tg(x)| > \frac{\alpha}{2}\}) \leq B^2 2^2 \frac{\|g\|_2^2}{\alpha^2} \leq B^2(2^2 + 2^{2n} + 1)\frac{\|f\|_1}{\alpha}.$$

Teil 2.2 Sei $\Omega = \bigcup Q_i$, Q_i^* sei der Würfel der denselben Mittelpunkt hat wie Q_i aber mit doppelt so großer Seitenlänge d.h. $\mathrm{diam}(Q_i^*) = 2n^{\frac{1}{2}}\mathrm{diam}(Q_i)$. $\Omega^* = \bigcup Q_i^*$, $F^* = \mathbb{R}^n \setminus \Omega^*$, $\mathrm{m}(\Omega^*) \leq 2^n \mathrm{m}(\Omega)$, $F^* \subset F$. Für $x \in F^*$, $y, y_i \in Q_i$ ist $|x - y_i| > 2|y - y_i|$.

Wir zeigen jetzt

$$\int_{x\in Q_i^*} |k(x-y)-k(x-y_i)|\mathrm{d}x \le B.$$

OBdA setzten wir $y_i = 0$ (sonst Variablentransformation), dann gilt nach Voraussetzung (3.2)

$$\int_{x\in Q_i^*} |k(x-y)-k(x-y)|\mathrm{d}x \le \int_{|x|>2|y|} |k(x-y)-k(x-y)|\mathrm{d}x \le B.$$

Wir setzen $b_j := b\chi_{Q_j}$. Dann folgt

$$Tb_j(x) = \int k(x-y)b_j(y)\mathrm{d}y = \int_{Q_i} k(x-y)b_j(y) - k(x)b_j(y)\mathrm{d}y,$$

denn nach Konstruktion von b ist $\int b_j = \int_{Q_j} b = 0$. Also

$$Tb_j(x) = \int_{Q_i} \left(k(x-y)-k(x)\right) b(y)\mathrm{d}y.$$

Damit können wir abschätzen:

$$\int_{F^*} |Tb(x)| \le \sum_j \int |Tb_j(x)|\mathrm{d}x = \sum_j \int_{F^*}\int_{Q_i} \left(|k(x-y)-k(x)|\right)|b(y)|\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Für alle j ist $F^* = I\!R^n \setminus (\bigcup Q_i^*) \subset I\!R^n \setminus Q_j^*$, mit Fubini kommt man zu

$$\int_{F^*} |Tb(x)| \le \sum_j \int_{Q_j}\int_{I\!R^n\setminus Q_j^*} \left(|k(x-y)-k(x)|\right)\mathrm{d}x|b_j(y)|\mathrm{d}y$$

$$\le \sum_j \int_{Q_j} |b_j| B\mathrm{d}y = B\int_{I\!R^n} |b| \le CB\|f\|_1 \tag{3.4}$$

Die letzte Ungleichung in (3.4) folgt aus der Definition denn

$$\|b\|_{L^1} = \sum_i \int_{Q_i} |f - \frac{\int_{Q_i}|f|}{\mathrm{m}(Q_i)}| \le 2\|f\|_1.$$

Also wie im Beweis zur Tchebychef Ungleichung erhalten wir

$$\frac{\alpha}{2}\mathrm{m}(\{x\in F^* : |Tb(x)| > \frac{\alpha}{2}\}) = \int \frac{\alpha}{2}\chi_{\{x\in F^*:|Tb(x)|>\frac{\alpha}{2}\}} \le$$

$$\int |Tb(y)|\chi_{\{x\in F^*:|Tb(x)|>\frac{\alpha}{2}\}}\mathrm{d}y \leq \int_{F^*} |Tb(y)|\mathrm{d}y \leq CB\|f\|,$$

Diese Ergebnis halten wir fest:

$$\mathrm{m}(\{x \in F^* : |Tb(x)| > \frac{\alpha}{2}\}) \leq \frac{2CB}{\alpha}\|f\|_1 \tag{3.5}$$

Wir teilen die interessante Menge auf:

$$\mathrm{m}(\{x \in \mathbb{R}^n : |Tb(x)| > \frac{\alpha}{2}\}) =$$

$$= \mathrm{m}(\{x \in F^* : |Tb(x)| > \frac{\alpha}{2}\}) + \mathrm{m}(\{x \in \Omega^* : |Tb(x)| > \frac{\alpha}{2}\})$$

Nach der C-Z Zerlegung gilt

$$\mathrm{m}(\{x \in \Omega^* : |Tb(x)| > \frac{\alpha}{2}\}) \leq \mathrm{m}(\Omega^*) \leq 2^n \mathrm{m}(\Omega) \leq 2^n \frac{\|f\|}{\alpha}$$

Mit (3.5) folgt nun insgesamt, daß eine Konstante C existiert, sodaß

$$\mathrm{m}(\{x \in \mathbb{R}^n : |Tb(x)| > \frac{\alpha}{2}\}) \leq \frac{\|f\|_1}{\alpha}C$$

Zusammen mit (3.3) folgt also T ist w.t. 1-1. Wir haben jetzt gezeigt, daß T w.t 2-2 und w.t. 1-1 ist, daher existieren Konstanten A_1, A_2 mit

$$\mathrm{m}(\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \alpha\}) \leq A_1 \frac{\|f\|_1}{\alpha}$$

$$\mathrm{m}(\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \alpha\}) \leq A_2 \frac{\|f\|_2}{\alpha^2}.$$

der Satz 4 folgt dann mit Hilfe von Interpolation - dem Satz von Marczinkiewitz - , den wir jetzt beweisen werden.

Wir definieren die Räume

$$L^p(\mathbb{R}^n) \oplus L^q(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ meßbar } : f = f_1 + f_2, \quad f_1 \in L^p, f_2 \in L^q\}$$

eine Norm ist auf diesem Raum gegeben durch

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\oplus L^q(\mathbb{R}^n)} := \inf\{\|f_1\|_{L^p} + \|f_2\|_{L^q} : f = f_1 + f_2\}.$$

Bemerkung: Falls für ein r mit $p \leq r \leq q$ $f \in L^r(\mathbb{R}^n)$ ist, dann folgt, daß $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \oplus L^q(\mathbb{R}^n)$, denn sei $f \in L^r(\mathbb{R}^n)$ fixiert. Für beliebiges $\gamma > 0$ definieren wir

$$f_1(x) := \begin{cases} f(x) & |f(x)| > \gamma \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_2(x) := \begin{cases} f(x) & |f(x)| \leq \gamma \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

natürlich ist $f = f_1 + f_2$, und

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_1|^p = \int_{\{x:|f(x)|>\gamma\}} |f_1(x)|^r |f_1(x)|^{p-r} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f_1|^r \gamma^{p-r} \leq \gamma^{p-r} \|f_1\|_r$$

(denn $p - r > 0$). Analog gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_2|^q = \int_{\{x:|f(x)|\leq\gamma\}} |f_2(x)|^r |f_2(x)|^{q-r} \leq \gamma^{q-r} \|f_2\|_r.$$

Also sind in $L^p(\mathbb{R}^n) \oplus L^q(\mathbb{R}^n)$ die Räume $L^r(\mathbb{R}^n)$ mit $p < r < q$ enthalten.

Als nächstes beweisen wir den schon genannten **Satz von Marcinkiewitz**:

Satz 5 *Sei* $1 < r < \infty$,

$$T : L^1(\mathbb{R}^n) \oplus L^r(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{M} := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, messbar\}$$

und der Operator T *erfülle die Bedingung*

$$|T(f+g)(x)| \leq |Tf(x)| + |Tg(x)| \quad \textit{(Sublinearität)}. \tag{3.6}$$

Weiters möge es Konstanten A_1 *und* A_r *geben, sodaß für alle* α *die (weak-type) Abschätzungen gelten:*

$$\mathrm{m}(\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \alpha\}) \leq A_1 \frac{\|f\|_1}{\alpha} \quad \textit{(w.t 1-1)} \tag{3.7}$$

$$\mathrm{m}(\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \alpha\}) \leq A_r^r \frac{\|f\|_r^r}{\alpha^r} \quad \textit{(w.t. r-r)}. \tag{3.8}$$

Dann gibt es für alle $1 < p < r$ *eine Konstante* A_p, *mit*

$$\|Tf\|_p \leq A_p \|f\|_{L^p}, \tag{3.9}$$

und die Konstante A_p *läßt sich abschätzen durch*

$$A_p \leq p \left(\frac{1}{p-1} A_1 2 + \frac{1}{r-p} A_r 2^r \right).$$

Aus der Sublinearität und den weak-type Abschätzungen folgt also die Beschränktheit des Operators in den entsprechenden L^p-Räumen.

Beweis: **Schritt 1:** Wir zeigen

$$\lambda(\alpha) := \mathrm{m}(\{x : |Tf(x)| > \alpha\}) \leq \frac{2A_1}{\alpha}\int_{\{x:|f(x)|>\alpha\}} |f(y)|dy + \frac{A_r^r 2^r}{\alpha^r}\int_{\{x:|f(x)|\leq\alpha\}} |f(y)|^r \mathrm{d}y. \tag{3.10}$$

Zum Beweis von (3.10): Es sei

$$f_1(x) := \begin{cases} f(x) & |f(x)| \geq \alpha \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_2(x) := f(x) - f_1(x)$$

Aus der Sublinearität folgt

$$|Tf(x)| \leq |Tf_1(x)| + |Tf_2(x)|.$$

Aus der Dreiecksungleichung für Verteilungsfunktionen und den Voraussetzungen an T folgt

$$\lambda(\alpha) \leq \mathrm{m}(\{x : |Tf_1(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\}) + \mathrm{m}(\{x : |Tf_2(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\}) \leq$$

$$\frac{2A_1}{\alpha}\|f_1\|_1 + \frac{A_r^r 2^r}{\alpha}\|f_2\|_r^r$$

$$= \frac{2A_1}{\alpha}\int_{\{x:|f(x)|\geq\alpha\}} f(y)\mathrm{d}y + \frac{A_r^r 2^r}{\alpha}\int_{\{x:|f(x)|\leq\alpha\}} f(y)\mathrm{d}y$$

Damit ist (3.10) gezeigt.

Schritt 2 ist ein Anwendung von Fubini: Mit (2.4) gilt

$$\|Tf\|_p^p = \int_{I\!R^n} |Tf(y)|^p \mathrm{d}y = p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\lambda(\alpha)\mathrm{d}\alpha \leq$$

$$p\int_0^\infty \alpha^{p-1-1} A_1 2\int_{\{x:|f(x)|>\alpha\}} |f(y)|\mathrm{d}y\mathrm{d}\alpha$$

$$+p\int_0^\infty \alpha^{p-1-r} A_r^r 2^r \int_{\{x:|f(x)|\leq\alpha\}} |f(y)|^r \mathrm{d}y\mathrm{d}\alpha,$$

wir behandeln die beiden Integrale getrennt:

$$I_1 := \int_0^\infty \alpha^{p-1-1}\int_{\{x:|f(x)|>\alpha\}} |f(y)|\mathrm{d}y\mathrm{d}\alpha,$$

$$I_2 := \int_0^\infty \alpha^{p-1-r} \int_{\{x:|f(x)|\leq\alpha\}} |f(y)|^r \mathrm{d}y\mathrm{d}\alpha.$$

Es gilt mit Fubini

$$I_1 = \int_0^\infty \int_{I\!R^n} \alpha^{p-2} \chi_{\{x:|f(x)|>\alpha\}} |f(y)|\mathrm{d}y\mathrm{d}\alpha = \int_{I\!R^n} |f(y)| \int_0^{|f(y)|} \alpha^{p-2}\mathrm{d}\alpha \; dy =$$

$$\int_{I\!R^n} |f(y)| \frac{|f(y)|^{p-1}}{p-1}\mathrm{d}y = \frac{1}{p-1} \int |f(y)|^p \mathrm{d}y = \frac{1}{p-1}\|f\|^p;$$

$$I_2 = \int_0^\infty \alpha^{p-1-r} \int_{\{x:|f(x)|\leq\alpha\}} |f(y)|^r \mathrm{d}y\mathrm{d}\alpha = \int_0^\infty \int_{I\!R^n} \alpha^{p-1-r} \chi_{\{x:|f(x)|\leq\alpha\}} |f(y)|^r \mathrm{d}y\mathrm{d}\alpha =$$

$$\int_{I\!R^n} |f(x)|^r \int_{|f(x)|}^\infty \alpha^{p-1-r}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}y = \frac{-1}{p-r} \int_{I\!R^n} |f(x)|^p = \frac{1}{r-p}\|f\|_p^p.$$

Damit ist der Satz von Marczinkiewitz bewiesen. $\square$

Insgesamt ist jetzt auch Satz 4 für $1 < p < 2$ bewiesen, für die restlichen p folgt er aus einem Dualitätsargument: Es ist $Tf = \int k(x-y)f(y)\mathrm{d}y$, es sei $T^* = \int k(y-x)f(x)\mathrm{d}x$, falls T die Voraussetzungen von Satz 4 erfüllt dann auch T^*. Damit erhalten wir für T^* nach dem bisher bewiesenen,

$$\|T^* f\|_p \leq A_p \|f\|_p, 1 < p \leq 2$$

Für $g \in L^p, p > 2, h \in L^q, 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ ist somit

$$\langle Tg, h\rangle = \langle g, T^* h\rangle \leq \|g\|_p \|Th\|_p \leq C\|g\|_p \|h\|_q.$$

Nach dem Satz von Hahn-Banach folgt schließlich

$$\|Tq\|_p \leq C\|g\|_p.$$

Damit ist jetzt der Satz 4 bewiesen. $\square$

Das nächste Ziel ist es den *Satz von Calderon -Zygmund* zu beweisen, der ohne eine Beschränkung an $\widehat{k}$ auskommt:

Satz 6 *Die Funktion $k : I\!R^n \setminus 0 \to I\!R$ erfülle mit ein Konstanten B:*

$$|k(x)| \leq \frac{B}{\|x\|^n}, \tag{3.11}$$

weiters gelte für alle $x \in I\!R, |y| \neq 0$

$$\int_{|x|>2|y|} |k(x) - k(x-y)|\mathrm{d}x \leq B, \tag{3.12}$$

und für alle $R_1 < R_2$ gelte

$$\int_{R_1 \leq |x| \leq R_2} k(x) \mathrm{d}x = 0. \tag{3.13}$$

Wir definieren

$$T_\epsilon f := \int_{|x-y| \geq \epsilon} k(x-y) f(y) \mathrm{d}y$$

für alle $f \in C_0^\infty(I\!R^n)$, dann gilt für $1 < p < \infty$:

Es existiert eine Konstante $C_p(B)$, sodaß für alle $\epsilon > 0$ und für alle $f \in C_0^\infty$ gilt

$$\|T_\epsilon f\|_p \leq C_p(B) \|f\|_p. \tag{3.14}$$

Außerdem existiert für alle $f \in L^p(I\!R^n)$ der Limes $Tf(x) := \lim_{\epsilon \to 0} T_\epsilon f$ in $L^p(I\!R^n)$, und es gilt die Abschätzung

$$\|Tf\|_p \leq C_p(B) \|f\|_p$$

Bemerkung: Der Grenzwert $\lim_{\epsilon \to 0} T_\epsilon f(x)$ existiert sogar fast überall, was allerdings nicht trivial zu zeigen ist. Es gilt der tiefliegende Satz:

$$\lim T_\epsilon f(x) \text{ konvergiert fast überall } \Leftrightarrow \int \left(\sup_{\epsilon \to 0} Tf(x) \right)^p \mathrm{d}x \leq C \|f\|.$$

Beispiele für Kerne die die Voraussetzungen erfüllen sind z. B. für $n = 1$, $k(x) = \frac{1}{x}$, $x \in I\!R \setminus 0$, bzw. für $n \geq 2 : k_i(x) := \frac{x_i}{|x|^{n+1}}$.

Definition 2 *Wir bezeichnen die Menge der Kerne k, die die Voraussetzungen des Satzes 6 mit der Konstante B erfüllen mit $\mathcal{K}(B)$, also*

$$\mathcal{K}(B) := \{k : I\!R^n \setminus 0 \to I\!R : k \textit{ erfüllt } (3.11, (3.12), (3.13)\}.$$

Zunächst benötigen wir zwei Lemmata: Das erste zeigt, daß ein Kern, der auf einen Kreisring eingeschränkt wird, wieder die Voraussetzungen von Satz 6 erfüllt:

Lemma 2 *Es existiert eine Konstante C, sodaß für alle $\epsilon > 0$ und $N > \epsilon$ und für*

$$h(x) := k(x) \chi_{\{x : \epsilon < |x| < N\}} \tag{3.15}$$

gilt,

$$k \in \mathcal{K}(B) \Rightarrow h \in \mathcal{K}(CB)$$

Dieser Kern h hat jedoch noch weitere schöne Eigenschaften:

Lemma 3 *Es existiert eine Konstante C, sodaß für alle $\epsilon > 0$, N und $k \in \mathcal{K}(B)$ und für die in (3.15) definierte Funktion gilt*

$$|\widehat{h}(\xi)| \leq CB \quad \xi \in I\!R^n.$$

Damit ist für $Sf := \int h(x-y)f(y)\mathrm{d}y$ der Satz 4 anwendbar!

Beweis von Lemma 2: Trivialerweise erfüllt h (3.11) und (3.13), zu zeigen ist nur (3.12), also daß für alle $y \neq 0$

$$\int_{|x|>2|y|} |h(x-y) - h(x)|dx \leq CB$$

Vorbemerkung: es gilt $|h(x)| \leq B|x|^{-n}$, damit folgt

$$\int_{\frac{R}{A}<|x|<R} |h(x)|\mathrm{d}x \leq |log(A)|Bc^n$$

unabhängig von R, denn

$$\int_{\frac{R}{A}<|x|<R} |h(x)|\mathrm{d}x \leq B \int_{\frac{R}{A}<|x|<R} |x|^{-n} \leq$$
$$\leq C \int_{R/A}^{R} r^n r^{n-1}\mathrm{d}r = CB(ln(R/A) - ln(R)) = Cln(A)B. \tag{3.16}$$

Damit können wir Integrale über Kreisringe gut abschätzen. Wir benötigen jetzt einige Fallunterscheidungen, als Faustregel sollte man im Kopf haben *"Entweder $|h(x)-h(x-y)| = |k(x)-k(x-y)|$ oder der Summand der alleine bleibt, wird über $\frac{\epsilon}{2} < |x| < \epsilon$ bzw $\frac{N}{2} < |x| < N$ integriert "*

Fall 1: $|y| \geq N$

Sei $E := \{x : |x| \geq 2|y|\}$, dann folgt für $x \in E$:

$$|x| \geq 2N \Rightarrow h(x) = 0,$$

und

$$|x-y| \geq |x| - |y| \geq |x| - \frac{|x|}{2} \geq \frac{|x|}{2} \geq N \Rightarrow h(x-y) = 0$$

insgesamt gilt in diesem Fall

$$\int_{|x|>2|y|} |h(x-y) - h(x)|\mathrm{d}x = 0$$

und (3.12) ist erfüllt.

Fall 2: $|y| < N$

Wir zerlegen $E := \{x : |x| \geq 2|y|\}$

$$
\begin{aligned}
E_{21} &:= \{x : |x-y| \geq N\} \cap E & (3.17)\\
E_{22} &:= \{x : \epsilon < |x-y| < N\} \cap E & (3.18)\\
E_{23} &:= \{x : |x-y| \leq \epsilon\} \cap E & (3.19)
\end{aligned}
$$

- ad E_{21}: Es gilt $h(x-y) = 0$, und

$$|x| \geq |x-y| - |y| \geq N - \frac{|x|}{2} \Rightarrow \frac{3}{2}|x| \geq N$$

also

$$\int_{E_{21}} |h(x-y) - h(y)| \mathrm{d}y = \int_{E_{21}} |h(y)| \mathrm{d}y \leq \int_{\frac{2}{3}N \leq |x| \leq N} |h(x)| \mathrm{d}x \leq CBlog(3/2)$$

- ad E_{22}: E_{22} wird weiter unterteilt:

$$
\begin{aligned}
E_{221} &:= \{x : |x| \geq \epsilon\} \cap E_{22} & (3.20)\\
E_{222} &:= \{x : \epsilon < |x| < N\} \cap E_{22} & (3.21)\\
E_{223} &:= \{x : |x| \geq N\} \cap E_{22} & (3.22)
\end{aligned}
$$

  - ad E_{221}: hier verschwindet $h(x)$ und

$$|x-y| \leq |x| + |y| \leq |x| + \frac{|x|}{2} \leq \frac{3}{2}\epsilon,$$

also

$$\int_{E_{221}} |h(x-y) - h(x)| \mathrm{d}x \leq \int_{\epsilon < |x-y| < \frac{3}{2}\epsilon} |h(x-y)| \mathrm{d}x \leq CB \log(\frac{3}{2})$$

  - ad E_{222}: hier bleiben beide Terme erhalten und nach Voraussetzung gilt

$$\int_{E_{222}} |h(x-y) - h(y)| \mathrm{d}x = \int_{E_{222}} |k(x-y) - k(y)| \mathrm{d}x \leq B$$

– ad E_{223}: hier verschwindet $h(x)$ und

$$|x-y| \geq |x|-|y| \geq \frac{|x|}{2} \geq \frac{N}{2},$$

also

$$\int_{E_{223}} |h(x-y)-h(x)|\mathrm{d}x \leq \int_{\frac{N}{2}<|x-y|<N} |h(x-y)|\mathrm{d}x \leq CBln(2).$$

- ad E_{23}: Es gilt $|x-y| \leq \epsilon$ und damit

$$|x| \leq |x-y|+|y| \leq |x-y|+\frac{|x|}{2},$$

also

$$\frac{|x|}{2} \leq |x-y| \leq \epsilon \Rightarrow |x| \leq 2\epsilon.$$

Nach Voraussetzung verschwindet hier $h(x-y)$, und

$$\int_{E_{23}} |h(x-y)-h(x)|\mathrm{d}x \leq \int_{E_{23}} |h(x)|\mathrm{d}x \leq \int_{\epsilon<|x|<2\epsilon} |h(x)|\mathrm{d}x \leq CB\log(2)$$

Also alles zusammen ergibt

$$\int_{|x|>2y} |h(x-y)-h(x)|\mathrm{d}x \leq \mathrm{Const.}B$$

Und damit ist Lemma 2 bewiesen. □

Nun zum *Beweis von Lemma 3*: Sei ξ beliebig aber fix,

$$\widehat{h}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)}h(x)\mathrm{d}x$$

mittels Variablentranformation sieht man leicht, daß für alle $y \in \mathbb{R}^n$

$$\widehat{h}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x-y,\xi)}h(x-y)\mathrm{d}x,$$

und damit

$$2\widehat{h}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)}h(x)\mathrm{d}x + e^{i(y,\xi)}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)}h(x-y)\mathrm{d}x$$

erfüllt ist. Die letzte Gleichheit gilt für beliebige y, also wähle man y jetzt sodaß $e^{i(y,\xi)} = -1$, (dies erreicht man etwa mit $y = \pi\frac{\xi}{|\xi|^2}$), damit erhalten wir

$$\widehat{h}(\xi) = \frac{1}{2}\int_{I\!R^n} e^{-i(x,\xi)}\left(h(x) - h(x-y)\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{|x|\leq 2|y|} e^{-i(x,\xi)}\left(h(x) - h(x-y)\right)\mathrm{d}x +$$

$$\frac{1}{2}\int_{|x|\geq 2|y|} e^{-i(x,\xi)}\left(h(x) - h(x-y)\right)\mathrm{d}x =: \frac{1}{2}\left(I + J\right)$$

Wir schätzen die Integrale getrennt ab:

$$|J| \leq \int_{|x|\geq 2|y|} |h(x) - h(x-y)|\mathrm{d}x \leq CB,$$

dies gilt nach Lemma 2. Das zweite Integral spalten wir weiter auf:

$$I = \int_{|x|\leq 2|y|} e^{-i(x,\xi)}\left(h(x) - h(x-y)\right)\mathrm{d}x = \int_{|x|\leq 2|y|} h(x)\left(e^{-i(x,\xi)} - 1\right)\mathrm{d}x -$$

$$\int_{|x|\leq 2|y|} e^{-i(x,\xi)} h(x-y)\mathrm{d}x + \int_{|x|\leq 2|y|} h(x)\mathrm{d}x =: I_1 + I_3 + I_2$$

Es gilt laut Voraussetzung (der Integrationsbereich ist ein Kreisring) $I_2 = 0$. Wir verwenden jetzt die Abschätzung (Übung) $\left(e^{-i(x,\xi)} - 1\right)| \leq |x||\xi|$ und erhalten

$$|I_1| \leq \int_{|x|\leq 2|y|} |h(x)||\left(e^{-i(x,\xi)} - 1\right)|\mathrm{d}x \leq \int_{|x|\leq 2|y|} |h(x)||x\xi|\mathrm{d}x \leq$$

$$B\int_{|x|\leq 2|y|} |x|^{-n}|x|\mathrm{d}x\xi \leq CB\xi\int_{r<2|y|} r^{-n+1}r^{n-1}\mathrm{d}r \leq CB\xi 2|y| \leq CB2$$

denn wir haben $y = \pi\frac{\xi}{|\xi|^2}$ gewählt !

$$I_3 = \int_{|x|\leq 2|y|} e^{-i(x,\xi)} h(x-y)\mathrm{d}x + \int_{|x|\leq 2|y|} h(x-y)\mathrm{d}x - \int_{|x|\leq 2|y|} h(x-y)\mathrm{d}x =$$

-weil $e^{i(y,\xi)} = -1$ ist, gilt:

$$= \int_{|x|\leq 2|y|} h(x-y)\left(e^{-i(x,\xi)} - e^{i(y,\xi)}\right)\mathrm{d}x - \int_{|x|\leq 2y} h(x-y)\mathrm{d}x =: I_4 + I_5$$

Wir verwenden jetzt, daß e^{iz} Lipschitz-stetig ist:

$$I_4 \leq \int_{|x|\leq 2|y|} |h(x-y)||(x,\xi) - (y,\xi)|\mathrm{d}x \leq |\xi|\int_{|x|\leq 2|y|} |h(x-y)||x-y|\mathrm{d}x \leq$$

$$|\xi|\int_{|x|\leq 2|y|}|x-y|^{-n+1}\mathrm{d}x \leq CB|\xi|y \leq CB.$$

Aufgrund der Dreiecksungleichung gilt die folgende Inklusion

$$\{x : |x| < 2|y|\} \subset \{x : |x-y| \leq 3|y|\}$$

und

$$\{x : |x| < 2|y|\} \subset \{x : |x-y| \leq 3|y|\} \setminus \{x : |x| > 2|y|\}.$$

Weiter gehts mit Abschätzen:

$$|I_5| \leq |\int_{|x-y|\leq 3|y|} h(x-y)\mathrm{d}x| + |\int_{\{x:|x-y|\leq 3|y|\}\setminus\{x:|x|>2|y|\}} h(x-y)\mathrm{d}x| =: I_6 + I_7$$

$I_6 = 0$ aufgrund der Voraussetzung (3.13). für I_7 verwenden wir

$$|x| > 2|y| \Rightarrow |x-y| \geq |x| - |y| \geq |y|.$$

damit können wir das I_7 als Integral über einen Kreisring ausdrücken und erhalten schließlich

$$|I_7| \leq |\int_{|y|\leq|x-y|\leq 3|y|} h(x-y)\mathrm{d}x \leq CBln(3)$$

wobei wir jetzt (3.16) verwendet haben. Damit ist alles gezeigt.

Für h gilt jetzt Satz 4, nämlich

$$\|T_\epsilon f\|_p \leq C_p\|f\|_p$$

zu zeigen ist noch daß $(\lim_{\epsilon\to 0} T_\epsilon f)$ in L^p für alle $f \in L^p$ konvergiert. Genauer, daß für alle $\epsilon > 0$,

$f \in L^p$ es ein δ gibt, sodaß für alle $\eta, \eta' < \delta$

$$|T_\eta f - T_{\eta'} f\|_p \leq \epsilon\|f\|_p \tag{3.23}$$

Dazu seien f, ϵ beliebig aber fix. Es existieren $f_1 \in C_0^2(I\!R^n)$, $\|f_1\|_{C^2} \leq A(f,\epsilon)$, $\|f_2\| \leq \epsilon$, mit $f = f_1 + f_2$, denn dies folgt wiederum aus der Dichtheit der C_0^2 -Funktionen. Bestimme nun $\delta > 0$ so daß für alle $\eta, \eta' < \delta$

$$\mathrm{m}(\{x : \eta' < |x| < \eta\}) \leq \frac{\epsilon}{A(\epsilon)B}\mathrm{m}(\mathrm{supp} f_1)^{1/p}$$

(so ein δ existiert, weil der Inhalt des Kreisringes auf der linken Seite beliebig klein für $\delta \to 0$ wird.) Es gilt

$$|T_{\eta'}f - T_\eta f| \le |T_{\eta'}f_1 - T_\eta f_1| + |T_{\eta'}f_2 - T_\eta f_2|$$

$$|T_{\eta'}f_1 - T_\eta f_1| = \int_{\eta'<|x-y|<\eta} k(x-y)f_1(y)\mathrm{d}y = \int_{\eta'<|y|<\eta} k(y)f_1(x-y)\mathrm{d}y =$$
$$\int_{\eta'<|y|<\eta} k(y)\left(f_1(x-y) - f_1(x)\right)\mathrm{d}y =: I,$$

hierbei verwendeten wir die Voraussetzung $\int_{\eta'<|y|<\eta} k(y)\mathrm{d}y = 0$.

$f_1 \in C^2$ ist insbesondere Lipschitzstetig und wir können abschätzen

$$|I| \le BA\int_{\eta'<|y|<\eta} |y||y|^{-n}\mathrm{d}y \le BA\mathrm{m}(\{\eta' < |y| < \eta\})$$

Wir verwenden jetzt die folgende Inklusion für Convolutionen (Übung):

$$\mathrm{supp}(T_{\eta'}f_1 - T_\eta f_1) \subset \mathrm{supp}f_1 + B(0, \eta - \eta),$$

also

$$\mathrm{m}(\mathrm{supp}\{T_\eta f_1 - T_\eta f_1\}) \le C\mathrm{m}(\mathrm{supp}f_1)$$

Insgesamt erhalten wir

$$\|T_\eta f_1 - T_\eta)f_1\|_{L^p} \le \|T_\eta f_1 - T_\eta f_1)\|_{L^\infty}\mathrm{m}(\mathrm{supp}\{T_{\eta'}f_1 - T_\eta f_1)\}^{1/p}$$
$$\le BA|\eta - \eta|\mathrm{m}(\mathrm{supp}f_1)^{1/p} \le \epsilon$$

Für f_2 gilt ganz simpel

$$\|T_\eta f_2 - T_\eta)f_2\|_{L^p} \le 2C_p\|f\|_p \le 2C_p\epsilon$$

Damit ist (3.23) bewiesen. $\square$.

Insgesamt beweist dies den Satz von Calderon -Zygmund $\square$

3.1 Fourier - Multiplikatoren auf L^p, $1 < p \le 2$

Wir sind an folgender Problemstellung interessiert: Gegeben sei eine Funktion $m : I\!R^n \to I\!R$, mit $\|m\|_\infty \le B$, nach dem Satz von Plancharel existiert der Multiplikationsoperator

$$T_m : L^2(I\!R^n) \to L^2(I\!R^n)$$

$$\widehat{T_m(f)}(\xi) := m(\xi)\hat{f}(\xi) \quad \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$
$$\|T_m\|_{L^2 \to L^2} \leq \|m\|_\infty,$$

weil für alle $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\|T_m f\|_2 = \|\widehat{T_m(f)}\|_2 \leq \|m\|_\infty \|\hat{f}\|_2 = \|m\|_\infty \|f\|_2$$

Wir beschäftigen uns nun mit der Frage untere welchen nichttrivialen Zusatzbedingungen an m der Operator T_m auch in den L^p-Räumen stetig ist, also wann es eine Konstante A_p gibt, sodaß für alle $f \in C_0^\infty$

$$\|Tf\|_p \leq A_p \|f\|_p?$$

Eine Antwort wir durch einen Satz von Hörmander gegeben, nämlich, daß die Bedingung

$$|\partial^\alpha m(\xi)| \leq |\xi|^\alpha \quad \alpha \leq [\frac{n}{2}] + 1, \tag{3.24}$$

an m hinreichend ist für die Stetigkeit des Multiplikationsoperators in L^p, $1 < p \leq 2$. ($[z]$ bezeichnet hier die größte ganze Zahl die kleiner oder gleich als z ist.)

Zuerst beweisen wir allerdings den folgenden Satz, der besagt, daß ein Operator, der sich in entsprechender Weise als singulärer Integraloperator schreiben läßt, stetig zwischen $L^p, 1 < p \leq 2$ abbildet:

Satz 7 *Sei $T : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n), \|T\| \leq 1$, außerdem soll es ein $k \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus 0)$ und eine Konstante B geben mit*

$$\int_{|x|>2y} |k(x-y) - k(x)| \mathrm{d}x < B, \qquad \textit{für alle } y \neq 0, \tag{3.25}$$

sodaß für alle $f \in C_0^\infty$ und $x \notin \mathrm{supp} f$ gilt

$$\int k(x-y) f(y) \mathrm{d}y = Tf(x). \tag{3.26}$$

Dann gibt es für $1 < p \leq 2$ eine Konstante A_p mit

$$\|Tf\|_p \leq A_p \|f\|_p.$$

Bemerkung: weil $x \notin \operatorname{supp}(f)$ tritt im Integral nie eine Singularität auf!

$$(h \in L^1_{loc}(I\!R^n \setminus 0) \Leftrightarrow \forall C \text{ kompakt } \subset I\!R^n \setminus 0 : \int_C |h(x)| \mathrm{d}x < \infty$$

Beweis: Wir zeigen:

$$\mathrm{m}(\{x : |Tf(x)| > \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_1 B \quad \text{für alle } f \in C_0^\infty(I\!R^n)$$

und wenden dann den Interpolationssatz an. Also sei $f \in L^1$ fix, $\alpha > 0$ beliebig, dann wenden wir die Calderon-Zygmund-Zerlegung an und erhalten die Mengen F, Ω

$$I\!R^n = F \cup \Omega, \quad \Omega = \bigcup Q_i;$$

die Q_i sind Würfel mit paarweise disjunktem Inneren, und es gilt

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \alpha \quad x \in F \\ \mathrm{m}(Q_i)\alpha &\leq \int_{Q_i} |f(x)| \leq 2^n \mathrm{m}(Q_i)\alpha \end{aligned}$$

Es sei

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & x \in F \\ \frac{1}{\mathrm{m}(Q_i)} \int_{Q_i} f & x \in Q_i \end{cases},$$

$$b := f - g.$$

Die so konstruierten Funktionen haben die Eigenschaften

$$\|g\|_2^2 = \int_F |g|^2 + \int_\Omega |g|^2 \leq \alpha \int_F |f| + 2^{2n} \alpha^2 \mathrm{m}(\Omega) \leq$$

$$\alpha \int_F |f| + 2^{2n} \alpha^2 \frac{\int_\Omega |f|}{\alpha} \leq C\alpha \|f\|_1$$

Für b folgt direkt aus der Definition $b(x) = 0 \quad x \in F$ und $\int_{Q_i} b(x) \mathrm{d}x = 0$, und es gilt

$$\|b\|_1 \leq \sum_i \int_{Q_i} |f| + |g| \mathrm{d}x \leq 2\|f\|_1$$

Wir benutzen die schon wohlbekannte Ungleichung

$$\mathrm{m}(\{x : |Tf(x)| > \alpha\}) \leq \mathrm{m}(\{x : |Tg(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\}) + \mathrm{m}(\{x : |Tb(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\}) \tag{3.27}$$

Für den ersten Term folgt mit Tschebyschef

$$\mathrm{m}(\{x : |Tg(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\}) \leq \left(\frac{2}{\alpha}\right)^2 \|Tg\|_2^2 \leq$$

$$2^2 \|T\|^2_{L^2 \to L^2} \frac{\|g\|_2^2}{\alpha^2} \leq 4C\|T\|^2 \frac{\|f\|_1}{\alpha} \tag{3.28}$$

Also nächste konzentrieren wir uns auf den Term mit Tb: Es sei Q_i^* der Würfel mit dem selben Mittelpunkt y_j als Q_i aber mit 5-facher Seitenlänge, und wir setzen $\Omega^* := \bigcup Q_i^*$, $F^* = I\!R^n \setminus \Omega^*$. Klarerweise gilt

$$\mathrm{m}(\Omega^*) \leq 5^n \mathrm{m}(\Omega) \leq 5^n \frac{\|f\|_1}{\alpha}. \tag{3.29}$$

Das nächste Ziel ist es $\int_{F^*} |Tb| \leq CB$ zu zeigen. Es sei $x \in F^*$, dann folgt $x \notin Q_j \supset \mathrm{supp}(b_j)$, wobei b_j die Funktion b eingeschränkt auf Q_j sei $((b_j := b\chi_{Q_j}))$. Dann gilt mit der Voraussetzung (3.26), daß sich T als singuläres Integral darstellen läßt:

$$Tb_j(x) = \int_{I\!R^n} k(x-y)b_j(y)\mathrm{d}y = \int_{Q_j} \left(k(x-y) - k(x-y_j)\right) b_j(y)\mathrm{d}y$$

denn es gilt $\int_{Q_j} b_j(y) = 0$ nach Konstruktion und weiters

$$\int_{I\!R^n \setminus Q_i^*} |Tb_i(x)|\mathrm{d}x = \int_{I\!R^n \setminus Q_i^*} \int_{Q_i} |k(x-y) - k(x-y_i)| b_i(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{Q_i} \int_{I\!R^n \setminus Q_i^*} |k(x-y) - k(x-y_i)| b_i(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x. \tag{3.30}$$

Die letzte Gleichheit folgt aus Anwendung von Fubini, was erlaubt ist weil die $b_i \in L^1(Q_i)$ sind.

Nebenrechnung: nach der Konstruktion von Q_i^* gilt

$$\int_{I\!R^n \setminus Q_i^*} |k(x-y) - k(x-y_i)|\mathrm{d}x \leq \int_{|x-y_j|>2|y-y_j|} |k(y-y_j-(x-y_j)) - k(x-y_j)|\mathrm{d}x \leq$$

$$\int_{|w|>2|v|} |k(v-w) - k(w)|\mathrm{d}w \leq B$$

wegen der Voraussetzung an k. Wir erhalten

$$(3.30) \leq \int_{Q_i} B|b_i(y)|\mathrm{d}y$$

und
$$\int_{I\!R^n\setminus Q_i^*} |Tb_i(x)|\mathrm{d}x \le B\int_{Q_i} |b_i(y)|\mathrm{d}y.$$
Weil $F^*\subset I\!R^n\setminus Q_i^*$ folgt für alle i
$$\int_{F^*} |Tb_i| \le \int_{I\!R^n\setminus Q_i^*} |Tb_i| \le B\int_{Q_i} |b_i|$$
also
$$\int_{F^*} |Tb| \le \sum_i \int_{F^*} |Tb_i| \ \le B\sum_i \int_{Q_i} |b_i| \le B2\|f\|_1$$
Es gilt nun mit (3.29) und der Tschebychef Ungleichung
$$\mathrm{m}(\{x : |Tb(x)| > \alpha\}) \le \mathrm{m}(\Omega^*) + \mathrm{m}(\{x\in F^* : |Tb(x)| \ge \alpha\}) \le$$
$$5^n\frac{1}{\alpha}\|f\| + \frac{1}{\alpha}\int_{F^*} |Tb| \le C\frac{1}{\alpha}\|f\|_1.$$
Wegen (3.28,3.27) ist daher T weak-type $(1,1)$. Aus der Stetigkeit in L^2 folgt
$$\mathrm{m}(\{x : |Tf(x)| > \alpha)\}) \le \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \|Tf\|_2^2 \le \|T\|\frac{\|f\|_2^2}{\alpha^2}.$$
Damit ist T weak-type (2,2) und der Satz ergibt sich jetzt mit einer Anwendung des Interpolationssatzes von Marcinkiewitz (Satz 5), (siehe auch Stein, Kap 5, 1). □

Wir können nun den oben erwähnten Satz von Hörmander beweisen, indem wir zeigen, daß unter bestimmten Bedingungen an m der dazugehörige Fouriermultiplikationsoperator die Bedingungen von Satz 7 erfüllt, und sich also als singuläres Integral darstellen läßt:

Satz 8 *Es sei $m\in C^l(I\!R^n\setminus 0)$, $l=[\frac{n}{2}]+1$. Für alle $\alpha\le[\frac{n}{2}]+1$ möge es eine Konstante A_α geben, sodaß für alle $\xi\neq 0$:*
$$|\partial^\alpha m(\xi)| \le A_\alpha|\xi|^{|\alpha|}.$$
Dann gilt

1. *Es existiert ein stetiger Operator T_m mit*
$$T_m : L^2\to L^2 \quad \|T_m\|_{L^2\to L^2} \le \|m\|_\infty$$

2.

$$\widehat{T_m f} = m(\xi)\widehat{f}(\xi)$$

3. es existiert eine Funktion $k \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus 0)$ *und eine Konstante* $B > 0$ *sodaß für alle* $y \neq 0$

$$\int_{|x|>2y} |k(x) - k(x-y)| \mathrm{d}x \leq B$$

und für alle $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *und* $x \notin \mathrm{supp} f$

$$Tf(x) = \int k(x-y) f(y) \mathrm{d}y.$$

Mit Satz 7 gilt damit

Korollar 2 *Unter den Bedingungen von Satz 8 gibt es für* $1 < p \leq 2$ *eine Konstante* A_p*, sodaß für alle* $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\|T_m f\|_p \leq A_p \|f\|_p.$$

Beweis von Satz 8: Sei

$$\eta(\xi) := \begin{cases} 1 & |\xi| \leq 1 \\ 0 & |\xi| \geq 2 \\ \text{sonst} & C^\infty \end{cases}$$

$$\delta(\xi) := \eta(\xi) - \eta(2\xi).$$

δ hat den Träger im Kreisring $\{\xi : \frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2\}$, außerdem gilt:

$$\sum_{j=l'}^{l} \delta(2^{-j}\xi) = \eta(2^{-l}\xi) - \eta(2^{-l'+1}\xi),$$

und daher ergibt sich für $\xi \neq 0$ beliebig aber fix

$$\lim_{l\to\infty, l'\to-\infty} \sum_{j=l'}^{l} \delta(2^{-j}\xi) = 1.$$

Wir definieren nun

$$m_j(\xi) := \delta(2^j\xi) m_j(\xi).$$

Es gilt

$$\operatorname{supp}(m_j(\xi)) \subset \{\xi : 2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1}\},$$

weiters sei

$$k_j(x) := \int_{I\!R^n} e^{2\pi i x.\xi} m_j(\xi) \mathrm{d}\xi = \check{m}_j(x)$$

(Das Integral konvergiert absolut.) Wir stellen nun die Behauptungen auf:

1. Für C kompakt $\subset I\!R^n \setminus 0$ beliebig gibt es eine Konstante A_C sodaß

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_C |k_{j(x)}| \mathrm{d}x \leq A_C$$

2.

$$K := \lim_{n\to\infty} \sum_{j=-n}^{n} k_j$$

existiert in $L^1_{loc}(I\!R^n \setminus 0)$

3.

$$\int_{|x|>2y} |k(x) - k(x-y)| \mathrm{d}x \leq B$$

4.

$$T_N f := \left(\sum_{j=-n}^{n} k_j \right) * f$$

erfüllt

$$\|T_N\|_{L^2} \leq 2\|m\|_\infty$$

5.

$$\lim_{N\to\infty} T_N f =: Tf$$

existiert in $L^2(I\!R^n)$, und

$$\|T\|_{L^2 \to L^2} \leq 2\|m\|_\infty$$

6. Für alle $f \in C_0^\infty(I\!R^n)$ $x \notin \operatorname{supp} f$ gilt

$$Tf(x) = \int k(x-y) f(y) \mathrm{d}y$$

und

7. für alle $f \in C_0^\infty(I\!R^n)$ und $\xi \neq 0$ gilt

$$\widehat{Tf(x)}(\xi) = m(\xi)\hat{f}(\xi)$$

Beweis der Behauptungen. Sei $\gamma \leq [\frac{n}{2}] + 1$ ein Multiindex und fix. Nach Plancharel gilt

$$\int_{I\!R^n} |(2\pi ix)^\gamma k_j(x)|^2 \mathrm{d}x = \int_{I\!R^n} |\partial^\gamma \check{m}_j|^2 \mathrm{d}x = \int_{I\!R^n} |\partial^\gamma m_j(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi$$

und nach Definition von m_j

$$\int_{I\!R^n} |(2\pi ix)^\gamma k_j(x)|^2 \mathrm{d}x \leq \int_{2^{j-1}<\xi<2^{j+1}} |\partial^\gamma m(\xi)|^2.$$

Nach den Voraussetzungen an m, der Definition von δ, und mit der Leibnitzschen Produktregel gibt es eine Konstante C sodaß

$$\int_{2^{j-1}<\xi<2^{j+1}} |\partial^\gamma m(\xi)|^2 \leq \int_{2^{j-1}<\xi<2^{j+1}} |\xi|^{-|\gamma|2} \mathrm{d}\xi \leq C \int_{2^{j-1}}^{2^{j+1}} r^{-|\gamma|2} r^{n-1} \leq C 2^{-2|\gamma|j} 2^{jn}$$

Also haben wir bewiesen, daß es für beliebige $M \leq [\frac{n}{2}] + 1$ eine Konstante $C(M)$ gibt, sodaß für alle j

$$\int_{I\!R^n} |x^{2M} k_j(x)|^2 \leq C_M 2^{-j2M} 2^{jn}. \tag{3.31}$$

Wir fixieren nun a, dann gilt mit (3.31) und $M = 0$

$$\int_{|x|\leq a} |k_j(x)| \mathrm{d}x \leq \left(\int_{I\!R^n} |k_j(x)|^2 \right)^{1/2} (\mathrm{m}(\{x : |x| \leq a\}))^{1/2} \leq 2^{jn/2} a^{n/2}$$

und außerdem gilt mit $M \leq [\frac{n}{2}] + 1$

$$\int_{|x|\geq a} |k_j(x)| \mathrm{d}x = \int_{|x|\geq a} (|k_j(x)| x^M) |x|^{-M} \mathrm{d}x \leq$$

$$\left(\int_{|x|\geq a} (|k_j(x)|^2 x^{2M}) \mathrm{d}x \right)^{1/2} \left(\int_{|x|\geq a} |x|^{-2M} \mathrm{d}x \leq \right)^{1/2}$$

$$\leq C_M 2^{-jM} 2^{jn/2} a^{-M} a^{n/2}. \tag{3.32}$$

Damit folgt

$$\int_{a/2<|x|<a} |k_j(x)|\mathrm{d}x \leq C_M 2^{jn/2} a^{n/2} \min\{1, 2^{-jM} a^{-M}\}$$

mit dieser Abschätzung erhalten wir eine konvergente Reihe: Wir wählen $M = [\frac{n}{2}] + 1$, dann gilt

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{a/2<|x|<a} |k_j(x)|\mathrm{d}x = \sum_{\{j:2^j \leq a^{-1}\}} ... + \sum_{\{j:2^j > a^{-1}\}} ... = S_1 + S_2.$$

$$|S_1| \leq \sum_{\{j:2^j \leq a^{-1}\}} 2^{jn/2} a^{n/2} \leq C$$

$$S_2 \leq \sum_{j:2^j > a^{-1}} 2^{jn/2} a^{n/2} 2^{-jM} a^{-M} \leq a^{n/2} a^{-M} \sum 2^{j(n/2-M)} \leq C$$

beide Konstanten sind unabhängig von a! (die zweite deswegen weil die Reihe konvergiert und der Faktor $a^{n/2-M}$ den Reihenwert kompensiert.)
zu Behauptung 1: Es sei C kompakt $\subset I\!R^n \setminus 0$, dann kann man C durch endlich viele Kreisringe $R_l := \{x : 2^l \leq \|x\| \leq 2^{l+1}$ überdecken, und erhält

$$\sum_j \int_C |k_j(x)| \leq \sum_{l,j} \int_{a/2<|x|<a, a=2^l} |k_j| \leq A_c$$

Behauptung 2 folgt dann mit dominierter Konvergenz. Mit derselben Methode zeigt man für $\alpha \leq [\frac{n}{2}] + 1$

$$\int_{R^n} |\partial^\alpha k_j(x)| \leq C 2^{j\alpha}, \tag{3.33}$$

nun zu *Behauptung 3:*

$$\int_{I\!R^n} |k_j(x-h) - k_j(x)|\mathrm{d}x \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{I\!R^n} |\partial_i k_j(x)| \leq Ch2^j$$

Sei $y \in I\!R^n \setminus 0$, dann gilt

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{|x|\geq 2|y|} |k_j(x-y) - k_j(x)|\mathrm{d}x = \sum_{2^j<|y|^{-1}} \int .. + \sum_{2^j>y^{-1}} \int .. =: S_1 + S_2$$

$$S_1 = \sum_{2^j<|y|^{-1}} \int_{|x|>2|y|} |k_j(x-y) - k_j(x)| \leq \sum_{2^j<|y|^{-1}} 2^j |y| \leq Const$$

$$S_2 = \sum_{2^j \geq |y|^{-1}} \int_{|x|>2|y|} |k_j(x-y) - k_j(x)| \leq \sum_{2^j \geq |y|^{-1}} \int_{|x|>|y|} 2|K_j(x)|\mathrm{d}x \leq$$

$$(\text{ mit } (3.32)) \quad \leq \sum_{2^j \geq |y|^{-1}} 2^{j/2n}|y|^{n/2}2^{-jl}|y|^l$$

wähle $l = [n/2] + 1$ dann folgt

$$\sum_{2^j \geq |y|^{-1}} 2^{j/2n}|y|^{n/2}2^{-jl}|y|^l \leq Const$$

Insgesamt folgt damit (3). (4),(5) sind trivial.
Bemerkung 6: Wir fixieren $f \in C_0^\infty(I\!R^n), x \notin \operatorname{supp} f$. Zu zeigen ist, daß $\int k(x-y)f(y)$ absolut konvergent ist und $\int k(x-y)f(y) = T_m f$.

$$T_N f = S_N * f = \left(\sum_{j=-N}^{N} k_j\right) * f = \int \sum_{j=-N}^{N} k_j(x-y)f(y)\mathrm{d}y$$

Weil nach dem Bisherigen gezeigt wurde daß $\sum_{j=-N}^{N} k_j$ absolut konvergiert falls $|x-y| \geq \epsilon$ gilt somit

$$Tf = \lim_{N\to\infty} T_N f = \int \lim \sum_{j=-N}^{N} k_j(x-y)f(y)\mathrm{d}y = \int k(x-y)f(y)\mathrm{d}y.$$

Bemerkung 7: Sei $f \in C_0^\infty$ $T_N f \to T_f$ in L^2 nach Plancharel ist das identisch mit $\widehat{T_N f} \to \widehat{Tf}$ aber $\widehat{T_N f} = m_j(\xi)\hat{f} \to m(\xi)f(\xi) = \widehat{Tf}$. Damit ist der Satz von Hörmander bewiesen. $\square$

Kapitel 4

Pseudodifferentialoperatoren

Wir verallgemeinern jetzt die Fouriermultiplikationsoperatoren aus dem vorigen Kapitel zu den sogenannten Pseudodifferentialoperatoren.

Wir definieren die Symbolklasse S_m, $m \geq 0$:

Definition 3 *Sei* $a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$

$$a \in S_m \Leftrightarrow \forall \alpha, \beta Multiindices \exists A_{\alpha,\beta} \forall x, \xi : \quad |\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)| \leq A_{\alpha,\beta}\,(1+|\xi|)^{m-\alpha}$$

Die ganze Zahl m *heißt die Ordnung.*

Für $a \in S_m$ definieren wir den Operator (für f aus der Schwartzklasse $\mathcal{S}$)

$$T_a f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x.\xi} a(x,\xi) \widehat{f(\xi)} \mathrm{d}\xi \quad f \in \mathcal{S}$$

damit ist $T_a f$ wohldefiniert. Offensichtlich sind die Operatoren T_a Verallgemeinerungen der T_m.

Das erste Ziel dieses Abschnitts ist es den folgenden wichtigen Satz zu beweisen:

Satz 9 *Für* $a \in S_m$ *läßt sich* T_a *fortsetzen zu einem stetigen Operator*

$$T_a : W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \to W^{k-m,p}(\mathbb{R}^n) \quad k - m \geq 0 \quad 1 < p < \infty$$

Insbesondere gilt für den Fouriermuliplikationsoperator T_m: Falls $m \in S_0$, dann ist $T : L^p \to L^p$ stetig.

Wir zeigen zuerst, daß $T : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$:

Proposition 1 *Falls* $f \in \mathcal{S}$, *dann gilt* $Tf \in \mathcal{S}$

Beweis: zu Zeigen ist

$$|\partial_x^\gamma Tf|(1+|x|)^N \leq C_{\gamma,N} f \quad x \in I\!R^n.$$

Es sei Δ_ξ der Laplace-Operator, der auf die ξ-Variable wirkt, dann ist (Übung):

$$(I-\Delta_\xi)e^{2\pi ix.\xi} = (1+4\pi^2|x|^2)e^{2\pi ix.\xi}.$$

Sei

$$L_\xi = \frac{(I-\Delta_\xi)}{(1+4\pi^2|x|^2)},$$

daher läßt der Operator L_ξ die Funktion $e^{2\pi ix.\xi}$ invariant:

$$L_\xi^N e^{2\pi ix.\xi} = e^{2\pi ix.\xi}$$

Sei B_m eine Kugel mit Radius m Die Greensche Identität besagt für $u, v \in \mathcal{S}$:

$$\int_B \Delta uv - \Delta vu = \int_{\partial B} \frac{\partial v}{\partial n} u - \frac{\partial u}{\partial n} v.$$

Damit erhalten wir für den Operator T_a:

$$(T_a)f(x) = \int a(x,\xi)\widehat{f}(\xi) L_\xi^N e^{-2\pi x.\xi} \mathrm{d}\xi$$

Nach dem Satz von Green kann man L_ξ^N hinüberschaufeln:

$$(T_a f)(x) = \int L_\xi^N \left(a(x,\xi)\widehat{f}(\xi)\right) e^{-2\pi ix.\xi} \mathrm{d}\xi = \frac{1}{(1+4\pi|x|^2)^N} \int_{I\!R^n} (I-\Delta_\xi)^N (a\widehat{f}) e^{-2\pi ix.\xi} \mathrm{d}\xi,$$

aber das Integral ist gleichmäßig beschränkt, denn $\widehat{f}$ ist in $\mathcal{S}$, (die Fouriertransformation bildet $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{S}$ ab) und nach Voraussetzung an a ist auch $a\widehat{f} \in \mathcal{S}$. Damit folgt

$$|T_a f| \leq C(1+|x|^2)^{-N}$$

und mit dem gleichen Beweis erhält man

$$|\partial^\gamma T_a f| \leq C(1+|x|^2)^{-N}.$$

Damit ist die Proposition bewiesen. □

Als nächstes zeigen wir, daß sich T_a durch Operatoren mit Symbolen mit kompaktem Träger approximieren läßt:

Proposition 2 *Es sei $a \in \mathcal{S}_m$, $\gamma \in C_0^\infty(I\!R^n \times I\!R^n)$, $\gamma(0,0) = 1$, $\epsilon > 0$. Sei*

$$a_\epsilon(x,\xi) := a(x,\xi)\gamma(\epsilon x, \epsilon\xi)$$

Dann gilt

1. $$\lim_{\epsilon \to 0} a_\epsilon(x,\xi) \to a(x,\xi)$$

2. *Für $\epsilon > 0$, α, β Multiindex beliebig, gibt es eine Konstante $A_{\alpha,\beta}$ mit*

$$\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a_\epsilon(x,\xi) \leq A_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|} \quad x \in I\!R^n$$

3. $$T_a f(x) = \lim_{\epsilon \to 0} T_{a_\epsilon} f(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{I\!R^n} e^{2\pi i x.\xi}(a_\epsilon(x,\xi))\widehat{f}(\xi)\mathrm{d}\xi$$

Beweis der Proposition: Übung.

Eine Nebenbemerkung:

$$T_{a_\epsilon} f(x) = \int_{I\!R^n} e^{2\pi i x.\xi}(a_\epsilon(x,\xi))\widehat{f}(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{I\!R^n} a_\epsilon(x,\xi) \int_{I\!R^n} f(y) e^{2\pi i \xi y}\mathrm{d}y e^{2\pi i x \xi}\mathrm{d}\xi$$

Weil a_ϵ kompakten Träger hat darf man Fubini anwenden und erhält

$$= \int_{I\!R^n} \int_{I\!R^n} a_\epsilon(x,\xi) e^{2\pi i \xi.(x-y)}\mathrm{d}\xi f(y)\mathrm{d}y = \int_{I\!R^n} k_\epsilon(x, x-y) f(y)\mathrm{d}y$$

mit $k_\epsilon(x,\xi) = \int_{I\!R^n} a_\epsilon(x,\xi)e^{2\pi i \xi.(x-y)}\mathrm{d}\xi$. $k_\epsilon(x,x-y) := K_\epsilon(x,y)$ ist in $L^1(I\!R^n \times I\!R^n)$. Also hat T_{a_ϵ} eine Darstellung, die an ein singuläres Integral erinnert. Dies wird für den Beweis von Satz 9 von Nutzen sein. Doch zuerst zeigen wir die L^2-Stetigkeit des Operators T_a falls a kompakten Träger hat: Wir bezeichnen mit $\mathrm{supp}_x(a(x,\xi))$ den Träger der Funktion $a(.,\xi)$ für fixes ξ.

Proposition 3 *Sei $a \in \mathcal{S}_0$,* $\mathrm{supp}_x a(x,\xi))$ *sei kompakt, Dann gilt:*

$$\|T_a f\|_{L^2} \leq C \sup_\xi \left[\mathrm{m}\{\mathrm{supp}_x a(x,\xi)\}\right] \|f\|_{L^2} \quad f \in L^2$$

Beweis: Die Strategie in diesem Beweis ist es die Operatoren auf der Gestalt $\check{a\hat{f}}$ zu bringen:

Es ist

$$\hat{a}(\lambda,\xi) = \int_{I\!R^n} a(x,\xi)e^{-2\pi i x.\lambda}\mathrm{d}x, \quad \check{a}(x,\xi) = \int_{I\!R^n} \hat{a}(\lambda,\xi)e^{2\pi i x.\lambda}\mathrm{d}\lambda,$$

Wir schätzen ab:

$$|\hat{a}(\lambda,\xi)(2\pi i\lambda)^\gamma| = \int_{I\!R^n} \partial_x^\gamma a(x,\xi)e^{-2\pi i x.\lambda}\mathrm{d}x \leq CA_\gamma \mathrm{m}(\mathrm{supp}_x(a))(\xi)$$

also

$$|\hat{a}(\lambda,\xi)| \leq A_N(1+|\lambda|)^{-N}C\mathrm{m}(\mathrm{supp}_x(a))$$

$$T_a f(x) = \int_{I\!R^n}\int_{I\!R^n} \hat{a}(\lambda,\xi)e^{2\pi i\lambda x}\hat{f}(\xi)e^{2\pi i x\xi}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\xi =$$

- Fubini ist erlaubt weil wir die Abschätzung an $\hat{a}$ haben - daher

$$= \int_{I\!R^n}\int_{I\!R^n} \hat{a}(\lambda,\xi)e^{2\pi i\lambda x}\hat{f}(\xi)e^{2\pi i x\xi}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\lambda =: \int T^\lambda f(x)\mathrm{d}\lambda$$

Das Ziel ist es $\|T^\lambda f\|_{L^2} \leq \frac{C}{(1+|\lambda|)^N}$ zu zeigen.

$$T^\lambda f(x) = \check{\hat{a}(\lambda,.)\hat{f}(.)}(x)$$

Mit Plancharel gilt

$$\|T^\lambda f\|_2 = \|\hat{a}(\lambda,.)\hat{f}(.)\|_2 \leq \sup_\xi |\hat{a}(x,\xi)|\|f\|_2$$

$$\leq \frac{A}{(1+|\lambda|)^N}\sup_\xi |\mathrm{supp}_x a(x,\xi)|\|f\|_2 =: \frac{C}{(1+|\lambda|)^N}$$

Für $N > n+1$ erhalten wir damit

$$\|T_a f(x)\|_2 = \|\int_{I\!R^n} T^\lambda(x)f\mathrm{d}\lambda\|_2 \leq \int_{I\!R^n}\|T^\lambda f\|_2\mathrm{d}\lambda \leq$$

$$\|f\|_2\int_{I\!R^n}\frac{C}{(1+|\lambda|)^N}\mathrm{d}\lambda \leq C\sup_\xi|\mathrm{supp}_x a(x,\xi)|\|f\|_2.$$

Die Darstellung von T_a als singuläres Integral hilft, um die Voraussetzung " $\mathrm{supp}_x a(x,\xi)$ kompakt " loszuwerden:

Proposition 4 *Sei $a \in S^m, m \in \mathbf{Z}$, dann gilt:*

1. *Es existiert ein $k \in C^\infty(I\!R^n \times I\!R^n \setminus 0)$, sodaß für alle $f \in C_0^\infty(I\!R^n)$, $x \notin \mathrm{supp} f$ gilt:*

$$T_a f(x) = \int_{I\!R^n} k(x, x-z) f(z) \mathrm{d}z,$$

2. *und für alle N gibt es eine Konstante A_N sodaß für alle $x \in I\!R^n$ und $|z| \geq 1$*

$$|k(x,z)| \leq |z|^{-N} A_N,$$

3. *außerdem genügt k der Abschätzung für beliebige N, α, β, $x \in I\!R^n$ und $z \neq 0$:*

$$|\partial_x^\beta \partial_z^\alpha k(x,z)| \leq A_{N,\alpha,\beta} |z|^{-n-m-\alpha-N}$$

Der Beweis kommt später.

Satz 10 *Sei $a \in S^0$, $f \in \mathcal{S}$, dann gilt*

1.
$$\|T_a f\|_2 \leq C_0 \|f\|_2,$$

2. *für alle N gibt es eine Konstante C, sodaß für alle $x_0 \in I\!R^n$ gilt*

$$\int_{\{x : |x-x_0| \leq 1\}} |T_a f(x)|^2 \mathrm{d}x \leq C \int_{I\!R^n} \frac{|f(x)|^2}{(1+|x-x_0|)^N} \mathrm{d}x$$

Die letzte Ungleichung bedeutet daß T_a **pseudolokal** ist.

Beweis: Sei $f \in \mathcal{S}$ gegeben, wir zerlegen $f = f_1 + f_2$ wobei $f_1, f_2 \in \mathcal{S}$:

$$|f_1| \leq |f| \quad \mathrm{supp}(f_1) \subset B_{x_0}(3)$$

$$|f_2| \leq |f| \quad \mathrm{supp}(f_1) \subset I\!R^n \setminus B_{x_0}(2)$$

Diese Zerlegung kann zum Beispiel durch ein $\gamma \in \mathcal{S}$ mit $\gamma(x) = 1$ auf $B_{x_0}(2)$ und $\gamma = 0$ auf $B_{x_0}(3)$ erreicht werden, denn dann kann man $f_1 = \gamma f$ und $f_2 = f - f_1$ wählen. Wir zerlegen a: Sei $\eta \in C_0^\infty(I\!R^n)$,mit $\eta(x) = 1$ falls $|x - x_0| \leq 1$, wir definieren das Symbol ηa :

$$(\eta a)(x,\xi) := \eta(x) a(x,\xi)$$

ηa erfüllt trivialerweise die Eigenschaft

$$\eta(x)(T_a f)(x) = T_{\eta a} f(x).$$

Wir schätzen ab:

$$\int_{\{x:|x-x_0|\leq 1\}} |T_a f_1|^2(x)\mathrm{d}x = \int_{\{x:|x-x_0|\leq 1\}} |T_{\eta a} f_1|^2 \mathrm{d}x \leq \int_{I\!R^n} |T_{\eta a} f_1|^2 \mathrm{d}x \leq$$

$$\leq \sup_{\xi} |\mathrm{supp}_x \eta a(x,\xi)| A \int_{B_{x_0}(3)} |f_1|^2 \mathrm{d}x \leq C(\eta) A \int_{B_{x_0}(3)} |f_1|^2$$

Dabei haben wir verwendet daß $|\mathrm{supp}_x(\eta a)| \leq C(\eta)$. Sei jetzt $z \in \mathrm{supp} f_2$, dann ist $z \notin B_{x_0}(2)$ und damit ist $|x-z| \geq 1$ für $x \in B_{x_0}(1)$. Weiters gilt für $|x-x_0| \leq 1$:

$$\frac{1}{|x-z|} \leq 4 \frac{1}{1+|z-x_0|}$$

und aus $|x-x_0| \leq 1$ folgt $x \notin \mathrm{supp} f_2$. Aus Proposition 4 erhalten wir die Integraldarstellung

$$T_a f_2 = \int_{I\!R^n} k(x, x-z) f_2(z) \mathrm{d}z.$$

Sei nun $|x-x_0| \leq 1$, dann folgt

$$|T_a f_2| \leq \int_{I\!R^n} \frac{1}{|x-z|^N} f_2(z)\mathrm{d}z \leq C 4^n \int_{I\!R^n} \frac{1}{(1+|z-x_0|)^N} f_2(z)\mathrm{d}z \leq$$

Anwenden von Cauchy-Schwarz:

$$\leq C_N \int_{I\!R^n} \frac{1}{(1+|z-x_0|)^N} f_2^2(z)\mathrm{d}z.$$

Damit ist die zweite Behauptung bewiesen Zur Ersten:

$$\int_{\{x:|x-x_0|\leq 1\}} |T_a f|^2(x)\mathrm{d}x \leq 2\left(\int_{\{x:|x-x_0|\leq 1\}} |(T_a f_1)^2 + \int_{\{x:|x-x_0|\leq 1\}} |T_a f_2|^2 \mathrm{d}x\right)$$

$$\leq C(\eta)\int_{B_3} |f|^2 + C\int_{I\!R^n} \frac{1}{1+|z-x_0|} f_2^2(z)\mathrm{d}z \leq C\int_{I\!R^n} \frac{1}{1+|z-x_0|} f^2(z)\mathrm{d}z.$$

Anwenden von Fubini:

$$\int_{I\!R^n}\int_{\{x:|x-x_0|\leq 1\}} |T_a f|^2(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}x_0 \leq \int_{I\!R^n}\int_{I\!R^n} \chi_{\{x,x_0:|x-x_0|\leq 1\}} (T_a f)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}x_0 =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (T_a f)^2(x)\mathrm{m}(B(x,1))\mathrm{d}x = C_N \int_{\mathbb{R}^n} |T_a f|^2 \mathrm{d}x = C_N \|T_a f\|_2^2$$

Damit gilt

$$\|T_a f\|_2^2 \le C_N \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x-x_0|)^N} f^2(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}x_0 \le$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x-x_0|)^N} \mathrm{d}x_0\mathrm{d}x \le C_N K \|f\|_2^2$$

denn $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x-x_0|)^N}\mathrm{d}x_0\mathrm{d}x$ ist unabhängig von x für N hinreichend groß.

Wir kommen nun zum Beweis der singulären Integraldarstellung der Pseudodifferential operatoren (Satz 4). Es sei $a \in S^m$, $m \in \boldsymbol{Z}$, a erfüllt

$$|\partial_\xi^\beta \partial_x^\alpha a(x,\xi)| \le C\,(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}$$

Sei

$$\eta(\xi) := \begin{cases} 1 & |\xi| \le 1 \\ 0 & |\xi| \ge 2 \\ C^\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\delta(\xi) := \eta(\xi) - \eta(2\xi)$$

$$a_0(x,\xi) = a(x,\xi)\eta(\xi)$$

$$a_j(x,\xi) = a(x,\xi)\delta(2^j\xi)$$

Wir definieren

$$k_j(x,z) := \int_{\mathbb{R}^n} a_j(x,\xi)e^{2\pi i\xi.z}\mathrm{d}\xi,$$

damit folgt

$$(f * \widehat{k_j(x,.)}) = \widehat{f} a_j(x,\xi)$$

und somit

$$T_{a_j} f = \int_{\mathbb{R}^n} k_j(x,x-y)f(y)\mathrm{d}y$$

Wir behaupten jetzt, daß für beliebige α, β, M es eine Konstante $A_{M,\alpha,\beta}$ gibt mit

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha k_j(x,z)| \le A_{M,\alpha,\beta}|z|^{-M} 2^{j(n+m+|\alpha|-M)}$$

Beweis der Behauptung: Es sei γ beliebig:

$$(2\pi i z)^\gamma \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha k_j(x,z) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_\xi^\gamma \left[(2\pi i\xi)^\alpha \partial_x^\beta a_j(x,\xi)e^{2\pi i\xi z}\right] \mathrm{d}\xi \le (*)$$

Nun gilt aber (Übung):

$$a_j(x,\xi) \in S^m \Rightarrow (2\pi i\xi)^\alpha \partial_x^\beta a_j(x,\xi) \in S^{m+\alpha}$$

also kriegen wir die Abschätzung

$$(*) \le C \int_{2^{j-1} \le |\xi| \le 2^{j+1}} |\xi|^{m+\alpha-\gamma} \le C\mathrm{m}_n(\{2^{j-1} \le |\xi| \le 2^{j+1}\}) 2^{j(m+|\alpha|-|\gamma|)} \le C2^{nj}2^{j(m+|\alpha|-|\gamma|)}.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. Wir behaupten als nächstes:

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha k_j(x,z)| \le A_{m,n,|\alpha|,N} |z|^{-m-n-|\alpha|-N}$$

falls $m + n + |\alpha| + N \ge 0$. Der Beweis ist eine Fallunterscheidung:
Fall 1: $0 < |z| < 1$: Sei $S = \sum_{j=0}^{\infty} |\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha k_j(x,z)|$ Wir zerlegen die Summe in $S =: S_1 + S_2$ wobei

$$S_1 := \sum_{j:2^j \le z^{-1}} |\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha k_j(x,z)|$$

$$S_2 := \sum_{j:2^j > z^{-1}} |\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha k_j(x,z)|$$

zu S_1: Setzt man $M = 0$ dann gilt

$$S_1 \le \sum_{j:2^j \le z^{-1}} 2^{j(m+n+|\alpha|)} A \le \begin{cases} C|z|^{-(m+n+|\alpha|)} & m+n+|\alpha| \ge 0 \\ |\log(z)| + 1 & m+n+|\alpha| \le 0 \end{cases}$$

wobei die zweite Abschätzung (die mit log) nur im Fall $m+n+\alpha = 0$ relevant ist. Weil $|z| \le 1$ folgt daraus weiters für $N \ge 0$

$$S_1 \le A|z|^{-(m+n+|\alpha|-N)}.$$

Nun zu S_2 : Für $M \ge m + n + |\alpha| + 1$
schätzen wir ab:

$$S_2 \le A \sum_{j:2^j > z^{-1}} |z|^{-M} 2^{j(n+m+|\alpha|-M)} \le A|z|^{-M}|z|^{-(n+m+|\alpha|-M)} \le A|z|^{-(n+m+|\alpha|)} \le$$

und mit der Voraussetzung $|z| < 1$ kommen wir zu

$$S_2 \le A|z|^{-n-m-|\alpha|-N}.$$

Fall 2: $|z| \geq 1$: Wähle $M \geq m+n+|\alpha|+N$ dann gilt

$$S \leq \sum_{j=0}^{\infty} |z|^{-M} 2^{j(m+n+|\alpha|+M)} \leq$$

$$|z|^{-M} 4 \leq |z|^{-(m+n+|\alpha|+N)}.$$

Für alle x, $z \neq 0$ existiert somit

$$k(x,z) := \lim_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} k_j(x,z)$$

und mit

$$S_N(x,\xi) := \sum_{j=0}^{N} a_j(x,\xi)$$

folgt

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x,\xi) \to a(x,\xi) \quad \text{p.w.}$$

Es sei $f \in C_0^\infty$, $x \notin \mathrm{supp} f$,

$$T_a f(x) = \lim_N T_{S_N} f(x) = \lim_{N\to\infty} \int \sum_{j=0}^{\infty} k_j(x, x-y) f(y) \mathrm{d}y.$$

Falls $|x-y| \geq \epsilon$,dann gilt mit dominierter Konvergenz und dem obigen Resultat

$$T_a f(x) = \int \lim_N \sum_{j=0}^{N} k_j(x, x-y) f(y) \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} k(x, x-y) f(y) \mathrm{d}y. \qquad \square$$

Um die vorher entwickelte Theorie der singulären Integrale anwenden zu können muß der Kern k im wesentlichen die Voraussetzungen des Satzes von Calderon und Zygmund erfüllen. Dies zeigen wir in der nächsten Proposition.

Proposition 5 *Sei $m = 0$ $k(x,y) := k(x, x-y)$, dann gilt*

1.

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha k(x,z)| \leq A|x-y|^{-n-|\alpha|-|\beta|}$$

2. für alle $|y-\bar{y}| \leq \delta$ gilt

$$B := \int_{|x-y|\geq 2\delta} |k(x,y) - k(x,\bar{y})| \mathrm{d}x \leq A$$

Beweis: Die erste Aussage ist offensichtlich und folgt aus dem bisher Bewiesenen. Zur zweiten Aussage:

$$B \leq \int_{|x-y| \geq 2\delta} |y - \bar{y}| A |x-y|^{n-1} \mathrm{d}x \leq$$

$$A \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\delta 2 2^k < |x-y| \leq 2\delta 2^{k+1} := A_k} |y - \bar{y}| A |x-y|^{n-1} \mathrm{d}x$$

$$\leq A\delta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{m}(A_k)}{(\delta 2^k 2)^{n+1}} \leq\leq A\delta \sum \frac{(2^k\delta)^n}{(\delta 2^k 2)^{n+1}} \leq A2.$$

Damit sind für den Operator T_a mit $a \in S_0$ die Voraussetzungen des Satzes 7 erfüllt: Die Darstellung als singuläres Integral folgt aus Proposition 4, die Voraussetzung (3.26) folgt aus Propositon 5, die L^2- Beschränktheit folgt aus Satz 10. Damit erhalten wir sofort L^p-Beschränktheit für Operatoren in der Symbolklasse S_0. Als nächstes beweisen wir die Beschränktheit in Sobolev-Räumen:

4.1 Sobolev Räume

Wir schränken uns zunächst auf die Räume $W^{k,p}$ mit positiven $k \in \mathbb{N}$ ein:

Fall 1: $k \geq 0$ Die Räume $W^{p,k}$ sind definiert als die Menge der Funktionen, die k-te (distributionelle) Ableitungen in L^p besitzen:

$$f \in W^{k,p} \Leftrightarrow f \in L^p \wedge \forall |\alpha| \leq k : \quad \partial^\alpha f \in L^p$$

Mit der Norm

$$\|f\|_{W^{k,p}} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^p}$$

erhalten wir einen Banachraum.

Wir können jetzt den am Anfang des Kapitels zitierten Satz 9 beweisen, nämlich daß ein Pseudodifferentialoperator der Ordnung m sich - grob gesprochen - in Sobolev-Räumen wie ein Differentialoperator der Ordnung m verhält: Genauer:

Satz 11 *Sei* $a \in \mathcal{S}^m$

$$T_a f = \int a(x,\xi) e^{2\pi i x \xi} \widehat{f}(\xi) \mathrm{d}\xi$$

$k \geq m$, dann läßt sich T_a erweitern zu einem Operator

$$T_a : W^{p,k} \to W^{p,k-m} \quad 1 < p < \infty$$

, d.h.

für $f \in C_0^\infty$ gilt

$$\|T_a f\|_{W^{p,k-m}} \leq A\|f\|_{W^{p,k}}$$

Beweis: Wir zeigen

$$\partial_x^\gamma T_a = \sum_{|\alpha \leq k} T_{a_\alpha} \partial^\alpha \text{ und } a_\alpha \in S^0$$

Sei γ ein fixer Multiindex mit $|\gamma| \leq k - m$, dann ist

$$\partial_x^\gamma T_a = \int_{I\!R^n} \partial_x^\gamma \left(a(x,\xi) e^{2\pi i x \xi} \right) \widehat{f}(\xi) \mathrm{d}\xi = \int_{I\!R^n} \tilde{a}(x,\xi) \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi},$$

wobei $\tilde{a} \in S^k$ (Übung). Also $\partial_x^\gamma T_a f = T_{\tilde{a}} f$ mit $\tilde{a} \in S^k$.
Wir behaupten

$$T_{\tilde{a}} = \sum_{|\alpha \leq k} T_{a_\alpha} \partial^\alpha$$

wobei $a_\alpha \in S^0$.

Mit dieser Behauptung ist die Proposition bewiesen denn:

$$\|\partial^\gamma T_a f\|_{L^p} = \| \sum_{|\alpha \leq k} T_{a_\alpha} \partial^\alpha f\|_{L^p} \leq \sum_{|\alpha \leq k} \|T_{a_\alpha} \partial^\alpha f\|_{L^p} \leq$$

und mit der Bemerkung am Ende des vorigen Abschnitts ergibt sich

$$\leq C_p \sum_{|\alpha \leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_{W^{k,p}}.$$

Zum Beweis der Behauptung: es sei

$$\beta(\xi) := \begin{cases} 1 & |\xi| \leq \frac{1}{8} \\ 0 & |\xi| \geq 2 \\ C^\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Es sei

$$\beta_0(\xi) := \beta(\xi)$$

$$\beta_j(\xi) := (1 + \beta_0(\xi))\frac{\xi_j}{|\xi|^2}$$

für $\quad j \leq n$. Es folgt (Übung) $\beta_j \in S^{-1}$.

Folgende Identität sieht man leicht:

$$\beta_0 + \sum_{j=1}^{n} \beta_j(\xi)\xi_j = 1.$$

Wir betrachten jetzt

$$\tilde{a}(x,\xi)1 = \tilde{a}(x,\xi)\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{n} \beta_j(\xi)\xi_j\right)^k$$

für $k = 1$ gilt $\tilde{a}(x,\xi)\beta_0(\xi) \in S^1.\ S^{-1} = S^0$, und $\tilde{a}(x,\xi)\beta_j(\xi) \in S^1.S^{-1} = S^0$, der Faktor ξ_j wird zu ∂_{x_j} damit folgt die Behauptung für den Fall $k = 1$. Analog gilt für $k > 1$

$$\tilde{a}(x,\xi)1 = \tilde{a}(x,\xi)\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{n} \beta_j(\xi)\xi_j\right)^k =$$

$$\tilde{a}(x,\xi)1 = \tilde{a}(x,\xi)\left(\sum_{|\alpha|\leq k} \beta_0^{k-|\alpha} + < \beta(\xi)\xi >^\alpha C_\alpha\right) =$$

$$\tilde{a}(x,\xi)\left(\sum_{|\alpha|\leq k} \beta_0^{k-|\alpha}\beta^\alpha\xi^\alpha\right) = \tilde{a}(x,\xi)\left(\sum_{|\alpha|\leq k} \gamma_\alpha(\xi)\xi^\alpha C_\alpha\right)$$

Nun ist $\beta_0^{k-|\alpha} \in S^{k-|\alpha|}$ und $< \beta(\xi)\xi >^\alpha \in S^{-\alpha}$ und also $\gamma \in S^0$. □

Wir kommen jetzt zum **Fall 2:** $k \in I\!R\ 1 < p < \infty$.

Wir definieren die Sobolev-Räume mit $k \in I\!R$ mittels der Pseudodifferentialoperatoren:

$$a(x,\xi) := \left(1 + 4\pi^2|\xi|^2\right)^{k/2}$$

$$T_a f(x) =: (1 - \Delta)^{k/2}$$

Definition 4

$$f \in W^{k,p} \Leftrightarrow (1 + \Delta)^{k/2} f \in L^p(I\!R^n)$$

$$\|f\|_{W^{k,p}} := \|(1 + \Delta)^{k/2} f\|_{L^p}$$

Wir behaupten für $k \in \mathbb{N}$ ist

$$\frac{1}{A} \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^2} \leq \| (1+\Delta)^{k/2} f\|_{L^2} \leq A \frac{1}{A} \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^2}.$$

Dies gilt nach dem bisher Bewiesenen, denn $(1+\Delta)^{k/2}$ ist ein Pseudodifferentialoperator. Damit ist die Definition von $W^{p,k}$ konsistent mit der vorherigen im Fall $k \in \mathbb{N}$.

Es gilt ein analoger Stetigkeitssatz:

Satz 12 *Sei T_a ein Pseudodifferentialoperator mit Symbol $a \in S^m$.*

$$\forall k \in \mathbb{R} : \forall m \in \mathbb{Z} \forall f \in \mathcal{S} : \|T_a f\|_{W^{k-m,p}} \leq C \|f\|_{W^{k,p}}$$

Beweis: Stein, p.252.

4.2 Wichtige L^2-Beschränktheitskriterien

Wir kommen jetzt zu Symbolen, die nicht von elliptischen Differentialgleichungen stammen: Wir verallgemeinern die bisherige Definition der Symbolklasse:

Definition 5 *Sei $a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \in C^\infty$. Es seien α, β, x, ξ beliebig, und $A_{\alpha,\beta}$ seien Konstanten, die von α, β aber nicht von x, ξ abhängen. Wir definieren die Symbolklassen*

$$A \in S^0_{0,0}(\mathbb{R}^n) \quad \Leftrightarrow \quad |\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)| \leq A_{\alpha,\beta} \tag{4.1}$$

$$A \in S^0_{0,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n) \quad \Leftrightarrow \quad |\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)| \leq A_{\alpha,\beta} (1+|\xi|)^{-|\alpha|/2} \tag{4.2}$$

$$A \in S^0_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n) \quad \Leftrightarrow \quad |\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)| \leq A_{\alpha,\beta} (1+|\xi|)^{-|\alpha|/2+|\beta|/2} \tag{4.3}$$

$$A \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n) \quad \Leftrightarrow \quad |\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)| \leq A_{\alpha,\beta} (1+|\xi|)^{m-|\alpha|\rho+|\beta|\delta} \tag{4.4}$$

Um die L^2-Beschränktheit zu zeigen, brauchen wir das *Lemma von Cotlav*:

Lemma 4 *Es seien $T_i : H \to H$ stetige Operatoren zwischen dem Hilbertraum H. Ferner gebe es eine Funktion $\gamma(i), i \in \mathbb{Z}$ mit*

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \gamma(i) \leq A$$

sodaß gilt:

$$\|T_j^* T_i\| \leq \gamma^2(i-j)$$

$$\|T_i T_j^*| \leq \gamma^2(i-j)$$

Dann gilt

$$\|\sum_{i=1}^{\infty} T_i\| \leq A.$$

Beweis: Zu Zeigen ist: Es gibt eine Konstante A, sodaß für alle $N \in N$ die Abschätzung $\|\sum_{i=1}^N T_i\| \leq A$ gilt. Dazu sei N fix, $T = \sum_{i=1}^N T_i$. Es gilt

$$\|T\|^2 = \|TT^*\|^2 = \|(TT^*)^n\|^{\frac{1}{n}}$$

$$(TT^*)^n = \sum (T_{i_1} T_{i_2}^*)(T_{i_3} T_{i_4}^*)..(T_{i_{2n-1}} T_{i_{2n}}^*) = \sum_{1 \leq i_j \leq N, 1 \leq j \leq 2n} (T_{i_j} T_{i_{j+1}}^*) =: \sum S$$

Wir schätzen S ab:

$$\|S\| \leq \|T_{i_1} T_{i_2}^*)\| \|T_{i_3} T_{i_4}^*)\|..\|T_{i_{2n-1}} T_{i_{2n}}^*)\|$$

andererseits gilt auch

$$\|S\| \leq \|T_{i_1}\| \|T_{i_2}^* T_{i_3}\|..\|T_{i_{2n-2}}^* T_{i_{2n-1}}\| \|T_{i_{2n}}\|$$

Wir verwenden jetzt die Voraussetzung und erhalten:

$$\|S\| \leq \gamma^2(i_1 - i_i)...\gamma^2(i_{2n-1} - i_{2n})$$

$$\|S\| \leq A^2 \gamma^2(i_2 - i_3)...\gamma^2(i_{2n-2} - i_{2n-1})$$

Mit der einfachen Ungleichung $(x \leq e^2 \wedge x \leq l^2) \Rightarrow x \leq el$ folgt

$$\|S\| \leq A\gamma(i_1 - i_2)\gamma(i_2 - i_3)\gamma(i_3 - i_4)...\gamma(i_{2n-1} - i_{2n})$$

Also

$$\|(TT^*)^n\|^{\frac{1}{n}} \leq A \sum_{i_1} \sum_{i_2} .. \sum_{i_{2n}} \gamma(i_1 - i_2)\gamma(i_2 - i_3)\gamma(i_3 - i_4)...\gamma(i_{2n-1} - i_{2n}) \leq$$

$$AA \sum_{i_2} .. \sum_{i_{2n}} \gamma(i_1 - i_2)\gamma(i_2 - i_3)\gamma(i_3 - i_4)...\gamma(i_{2n-1} - i_{2n}) \leq$$

$$AAA \sum_{i_i 3} .. \sum_{i_{2n}} \gamma(i_1 - i_2)\gamma(i_2 - i_3)\gamma(i_3 - i_4)...\gamma(i_{2n-1} - i_{2n}) \leq \text{ Induktion.. } \leq A^{2n} N$$

Also gilt mit N fix und $n \to \infty$:

$$\|T\|^2 = \|\|(TT^*)^n\|^{\frac{1}{n}} \leq A^2 N^{\frac{1}{n}} \leq A^{\cdot}$$

Das *Lemma von Schur* gibt ein Beschränktheitskriterium für Integraloperatoren:

Lemma 5 *Es sei $s : I\!R^n \times I\!R^n \to \mathbb{C}$,*

$$Tf(x) := \int s(x,y)f(y)\mathrm{d}y,$$

der Kern s erfülle

$$\sup_x \int |s(x,y)|\mathrm{d}y \leq C_1 \quad \sup_y \int |s(x,y)|\mathrm{d}x \leq C_2$$

dann gilt

$$\|T\|_{L^2 \to L^2} \leq \frac{C_1 + C_2}{2}$$

(Bemerkung: C_1 ist die L^∞ -Beschränktheit, C_2 ist die L^1 Beschränktheit, also ist dies ein Interpolationstheorem.)
Beweis:

$$\|T\| = \sup_{\|f\| \leq 1, \|g\| \leq 1} (Tf, g)_{L^2, L^2}$$

Sei $g, f \in L^2 \|f\|, \|g\| \leq 1$,

$$|(Tf,g)| \leq \int |s(x,y)||f(y)||g(x)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

mit $2|a||b| \leq |a|^2 + |b|^2$ gilt

$$|(Tf,g)| \leq \frac{1}{2}(\int |s(x,y)||f(y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int |s(x,y)||g(x)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y) \leq$$

$$\frac{1}{2}(C_1\|g\|^2 + C_2\|g\|^2) \leq \frac{C_1 + C_2}{2}.$$

Bemerkung $Tf(x) = \int k(x,y)f(y)\mathrm{d}y$ sei ein absolut konvergentes Integral, der Kern von T^*T ist $l(x,y) = \int \overline{k(x,z)}k(z,y)\mathrm{d}z$ ist schöner weil glatter und daher leichter zu behandeln.

2 prototypische Beispiele dazu: Kapitel 7 im Stein:

Beispiel 1: Sei $a \in S^0_{0,0}$:

$$S^0_{0,0} : |\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)| \leq A_{\alpha,\beta}$$

und T_a der dazugehörige PDO:

$$T_a f(x) = \int a(x,\xi)\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x.\xi}\mathrm{d}x.$$

Ferner sei $\phi \in C_0^\infty(I\!R^n)$ mit supp$\phi \subset \{x : |x| \leq 1\}$ und $\sum_{i \in \mathbf{Z}^n} \phi(x-i) = 1$
Wir definieren

$$a_{ij}(x,\xi) = \phi(x-i)a(x,\xi)\phi(\xi - j)$$

und

$$T_{ij} := T_{a_{ij}}$$

dann gilt mit Schurs Lemma

$$T_{ij}^* T_{ij} \leq A_N \frac{1}{(1 - |(i,j) - (i,j)|)^{2N}}$$

Cotlavs Lemma liefert nun die L^2 Beschränktheit.

$$\| \sum_{i,j \in \mathbf{Z}^n} T_{ij} \|_{L^2} \leq A.$$

Beispiel 2: Es sei $k(x,y) := I\!R \times I\!R \to I\!R$,

$$k(x,y) = -k(y,x) \quad k(x,y) \leq \frac{1}{|x-y|} \quad \partial k(x,y) \leq \frac{1}{|x-y|^2}$$

und

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x-y| \geq \epsilon} k(x,y)\mathrm{d}y = 0$$

Dann ist der Operator

$$T : f \to \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x-y| \geq \epsilon} k(x,y) f(y)\mathrm{d}y$$

beschränkt auf L^2 (und somit auf $L^p \to L^p$, $1 < p < \infty$.) Sei

$$k_j(x,y) := \chi_{\{2^j \geq |x-y| \geq 2^{j+1}\}} k(x,y)$$

$$T_j f := \int_R k_j(x,y) f(y)\mathrm{d}y$$

Es gilt mit Schur (steht im Stein)

$$\|T_j^* T_i\| \leq 2^{-|i-j|} \quad \|T_i^* T_j\| \leq 2^{-|i-j|}$$

damit folgt die Behauptung mit Cotlavs Lemma und

$$\sum T_j \leq \sum 2^{-jc}.$$