Beispiel 1: Zylinder und Kolben (30 Punkte)

Betrachtet wird ein Kolben, welcher quasistatisch das Gasvolumen in einem zylindrischen Gefäß (Höhe H, Durchmesser D) komprimiert (vgl. Abb. 1). Zu Beginn, d.h. zum Zeitpunkt $t = 0$, herrscht der Druck p_0 und die Dichte ρ_0 im Zylinder. Die Kolbenposition verändert sich gemäß der Funktion $x(t) = H \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2+t}\right)$. Das Gas im Zylinder kann als ideales Gas mit der Gaskonstante R und dem Isentropenexponenten $\varkappa$ angesehen werden.
Bekannt sind die Größen D, H, p_0, ρ_0, R, $\varkappa$.

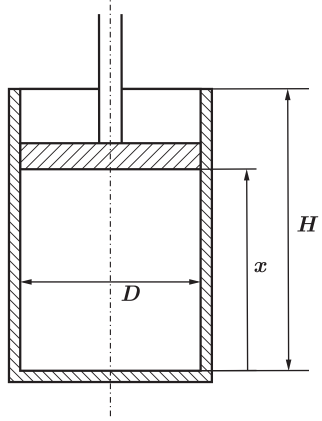


Abbildung 1: Skizze: Zylinder und Kolben

Betrachtet werden sollen zwei Fälle, nämlich eine isotherme und eine isentrope Zustandsänderung des Gases.

(a) Ermitteln Sie den Druckverlauf $p(x)$ im Zylinder für die beiden Fälle.

(b) Ermitteln Sie die am Gas verrichtete Arbeit für $t \to \infty$ für die beiden Fälle.

(c) Argumentieren Sie, inwieweit der zeitliche Verlauf der Kolbenposition für die Ergebnisse aus Punkt b für $t \to \infty$ relevant ist.

(d) Ermitteln Sie die Entropieänderung ΔS im isothermen Fall und bestimmen Sie die insgesamt zu- bzw. abzuführende Wärme.

Nehmen Sie nun den Kolben als unverrückbar an seiner Endposition an. Im Inneren herrsche zu Beginn die Temperatur T_1. Die Umgebungstemperatur ist T_U =const, wobei gilt: $T_U > T_1$. Nehmen Sie an, der Kolben und die zylindrische Außenwand seien adiabat, nur der Boden sei wärmeleitend (bekannt: Dicke d, Wärmeleitfähigkeit λ). Bekannt sind auch die konvektiven Wärmeübergangskoeffizienten an der Innen- und Außenseite α_i, α_a.

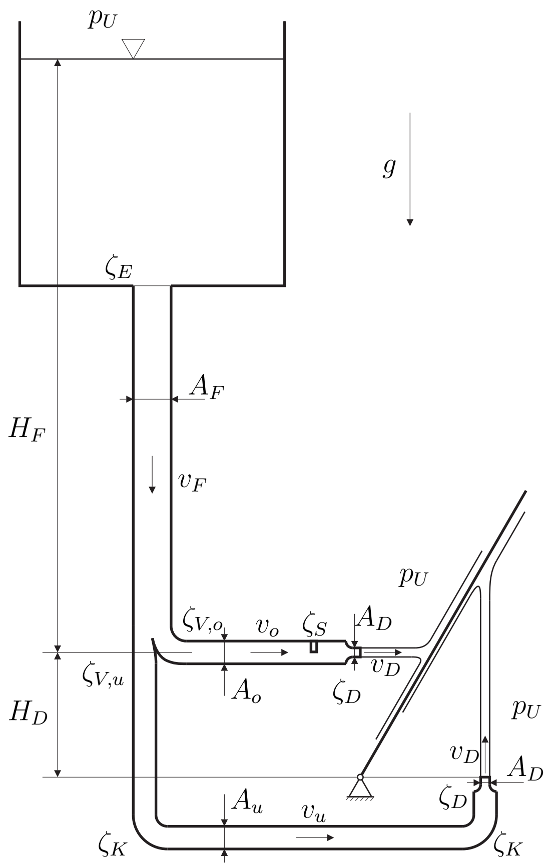
(e) Stellen Sie eine Differentialgleichung für den zeitlichen Temperaturverlauf des Gases im Zylinder auf.

(f) Lösen Sie die Differentialgleichung, und bestimmen Sie, wann die Temperatur T_2 erreicht ist ($T_1 < T_2 < T_U$).

(g) Skizzieren Sie den Temperaturverlauf über der Zeit.

Beispiel 2: Kraftwerksumbau (30 Punkte)

Der Betreiber eines Speicherkraftwerks hat keine Lust mehr, Strom zu produzieren, und beschließt die Peltonturbine in seiner Anlage durch eine sinnlose Plattenkonstruktion zu ersetzen. Das Wasser aus dem Fallrohr wird dazu in eine obere und eine untere Rohrleitung verzweigt und tritt hinter zwei Düsen aus. Die resultierenden Freistrahlen sollen dort eine schräg stehende Platte im Gleichgewicht halten (siehe Abb. 2).



Gegeben:

Rohrquerschnitte
- Fallrohr A_F
- obere/untere Rohrleitung $A_o = A_u$

Düsenquerschnitt A_D

Höhendifferenzen
- Speicher - Düse oben H_F (konstant)
- Düse oben - Düse unten H_D

Flüssigkeitsdichte ρ
Umgebungsdruck p_U
Schwerebeschleunigung g

Druckverlustbeiwerte
- Rohreinlauf ζ_E
- Verzweigung oben $\zeta_{V,o}$ (Bezug v_o)
- Verzweigung unten $\zeta_{V,u}$ (Bezug v_u)
- Krümmer ζ_K
- Düse ζ_D

Abbildung 2: Rohrsystem Kraftwerk neu

Die Auslegung soll dahingehend erfolgen, dass die Austrittsgeschwindigkeit v_D an beiden Düsen gleich ist. Dies soll mithilfe eines Schiebers (zusätzlicher Druckverlustbeiwert ζ_S) sichergestellt werden.

(a) Ermitteln Sie die Geschwindigkeiten im Fallrohr v_F, in der oberen Rohrleitung v_o, sowie in der unteren Rohrleitung v_u als Funktion der Düsengeschwindigkeit v_D.

(b) Geben Sie die Druckverluste aufgrund des Schiebers, sowie der gegebenen ζ-Beiwerte in Abhängigkeit von v_D und ζ_S an. Die Rohrreibung soll vernachlässigt werden.

(c) Berechnen Sie die Austrittsgeschwindigkeit v_D anhand der unteren Rohrleitung.

(d) Wie groß muss nun ζ_S gewählt werden, damit sich auch an der oberen Düse dieselbe Austrittsgeschwindigkeit v_D einstellt? Zur Vereinfachung sei hier angenommen, dass H_D gegenüber H_F vernachlässigt werden kann (also $H_F \gg H_D$, somit $H_F + H_D \approx H_F$).

Hinter den beiden Düsen tritt das Wasser jeweils als Freistrahl aus und trifft auf eine schräg stehende Platte (siehe Abb. 3). Die Geschwindigkeit v_D sei für die folgenden Aufgaben gegeben. Das Problem soll zweidimensional und reibungsfrei berechnet werden, der Schwerkrafteinfluss auf Fluid und Platte ist zu vernachlässigen. In hinreichender Entfernung vom Staupunkt herrscht in allen Strahlen Umgebungsdruck p_U.

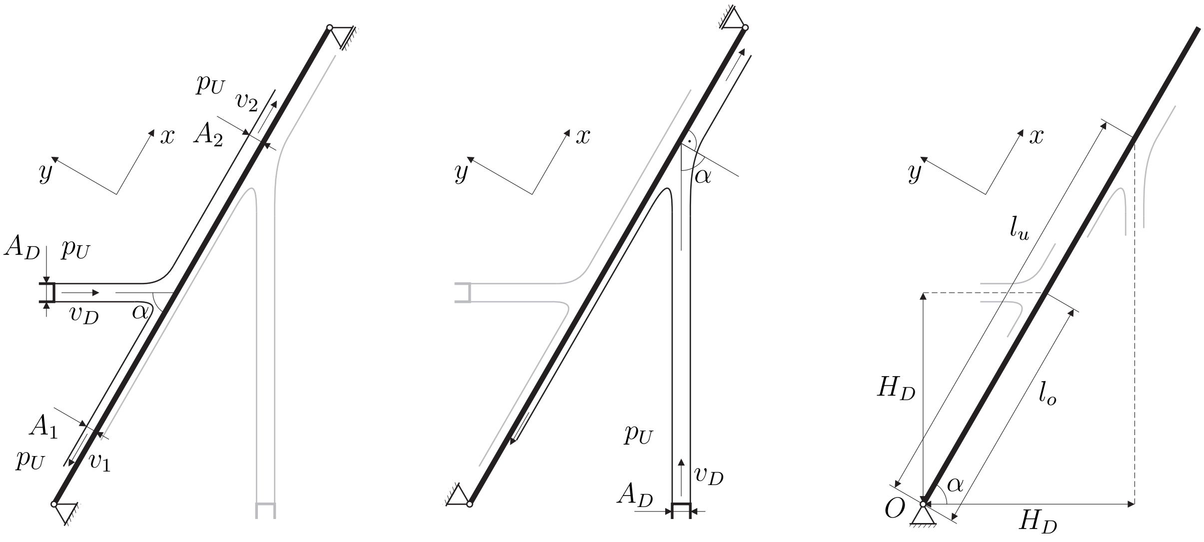


Abbildung 3: Detailskizze Freistrahlen und Momentengleichgewicht ((e), (f) und (g))

(e) Betrachten Sie zunächst nur den oberen Freistrahl (siehe Abb. 3, links): Berechnen Sie die Kraft, die das Fluid auf eine unbewegliche Platte ausübt, in Abhängigkeit des Winkels α, in dem der Freistrahl auf die Platte trifft. Machen Sie dazu bitte eine Skizze, und zeichnen Sie das von Ihnen verwendete Kontrollvolumen und Koordinatensystem ein (Empfehlung siehe Abb. 3!).

(f) Wie groß ist die Kraft, die der untere Freistrahl auf die Platte ausübt (siehe Abb. 3, Mitte)? Sie können das Ergebnis aus (e) verwenden. Beachten Sie die Winkel und Koordinatenrichtungen!

(g) Nehmen Sie nun an, die Platte wäre nur im Punkt O gelagert (siehe Abb. 3, rechts). Gehen Sie davon aus, dass die Kräfte aus (e) und (f) an den Punkten angreifen, an denen die Strahlen auf die Platte treffen. Stellen Sie das Momentengleichgewicht um O auf, und berechnen Sie den Winkel α, in dem sich die Platte im Gleichgewicht befinden wird (Achtung: $l_o = l_o(\alpha)$, $l_u = l_u(\alpha)$!).

Hinweis: $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, $M_z = r_x F_y - r_y F_x$