Lösungen des Monats - Oktober 2023

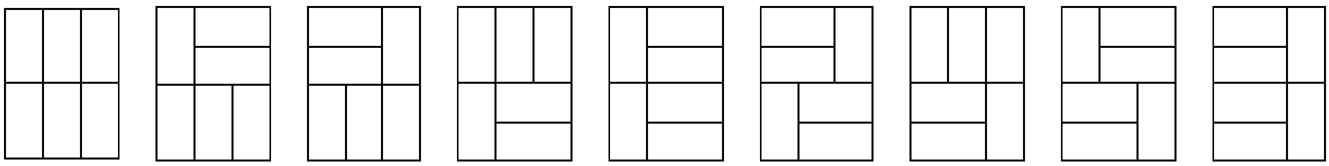
Kategorie: Maximathik
9./10. Schulstufe

Aufgabe 1: Fiese Riesenfliesen
Karin möchte auf einem Teil ihrer Einfahrt wirklich riesige Fliesen verlegen. Dieser Bereich soll die Maße $3 \times 4\,\text{m}$ haben. Die Riesenfliesen mit den Maßen $1 \times 2\,\text{m}$ will sie dabei auf keinen Fall zerschneiden. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Fliesen dort entsprechend zu verlegen?

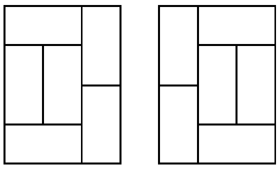
Ergebnis: 11

Lösung: Zuerst können wir den Bereich in zwei rechteckige Gebiete mit den Maßen $2 \times 3\,\text{m}$ zerlegen. Nun kann es sein, dass jedes Rechteck aus 3 ganzen Fliesen besteht oder dass mindestens eine Fliese in beiden Rechtecken ist.

Betrachten wir zuerst den Fall, dass jedes Rechteck aus 3 ganzen Fliesen besteht. Dann gibt es für jedes der zwei Rechtecke je 3 Möglichkeiten die Fliesen zu verlegen. Da die Fliesen in einem Rechteck die Fliesen im anderen nicht beeinflussen, gibt es in diesem Fall also $3 \cdot 3 = 9$ Möglichkeiten.



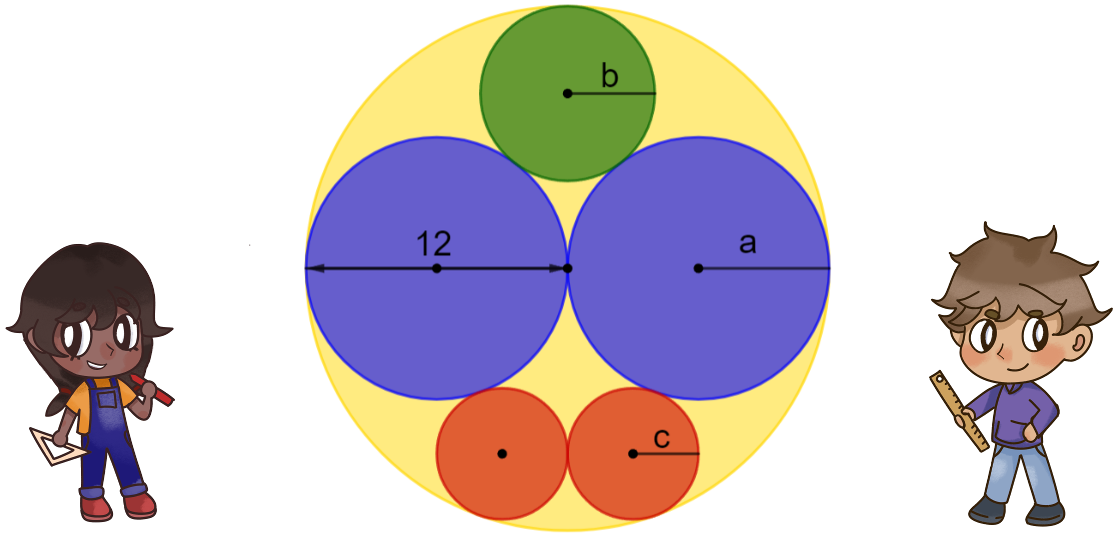
Betrachten wir nun den zweiten Fall, bei dem mindestens eine Fliese in beiden Rechtecken sein muss. Handelt es sich bloß um eine Fliese, so bleiben in jedem Rechteck $5\,\text{m}^2$. Die verbleibende Fläche ließe sich somit nicht mit Fliesen auslegen, die nur in einem der zwei Rechtecke sind. Es müssen sich also 2 Fliesen je zur Hälfte in einem der gedachten Rechtecke befinden. Für die Position der 2 Fliesen gibt es 3 Möglichkeiten. Durch Probieren erkennt man, dass man mit 2 davon den Bereich auslegen kann.



Insgesamt gibt es also $9 + 2 = 11$ Möglichkeiten die Fliesen zu verlegen.

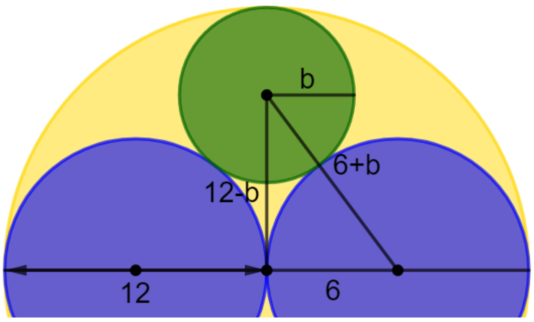
Aufgabe 2: Krasse Kreise

Tobias möchte in Karins Einfahrt folgendes Mandala malen. Ihm ist nur bekannt, dass der Radius des gelben Kreises 12 lang ist. Um die anderen Kreise malen zu können, muss er allerdings wissen, wie groß die Radien sind. Bestimme die Radien und gib als Lösung deren Summe $a + b + c$ an.



Ergebnis: 13

Lösung: Der Radius a ist die Hälfte des Durchmessers, also $a = \frac{12}{2} = 6$. Den Radius b erhält man, indem man das Dreieck in der folgenden Abbildung betrachtet.



Der Radius $a = 6$ des blauen Kreises ist die Länge einer Kathete. Die Länge der zweiten Kathete ist der Radius des gelben Kreisen minus dem Radius des grünen Kreises, also $12 - b$. Die Hypothenuse ist dann $6 + b$ lang. Mithilfe des Satzes von Pythagoras erhält man

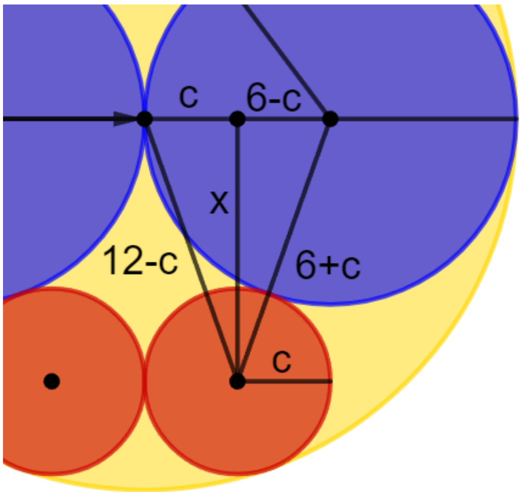
$$6^2 + (12 - b)^2 = (6 + b)^2$$

Durch Umformen ergibt sich $b = 4$. Für den Radius c betrachten wir die beiden Dreiecke, die in folgender Abbildung eingezeichnet sind.

Rufe mit Hilfe des QR-Codes unsere Website auf. Dort findest du eine Anleitung, wie du deine Lösungen abgeben kannst. Jeden Monat gibt es neue Aufgaben, bei denen du Punkte sammeln kannst

JOHANNES KEPLER UNIVERSITÄT LINZ

INDUSTRIELLENVEREINIGUNG OBERÖSTERREICH



Mithilfe des Satzes von Pythagoras erhält man die beiden Gleichungen:

$$x^2 + c^2 = (12 - c)^2$$
$$x^2 + (6 - c)^2 = (6 + c)^2$$

Durch Ausquadrieren, Vereinfachen und Subtrahieren der Gleichungen ergibt sich $c = 3$.
Somit ist $a + b + c = 6 + 4 + 3 = 13$.

Aufgabe 3: Wahres Waagnis
Nachdem Karin und Tobias mit ihren Arbeiten in der Einfahrt fertig sind, gehen sie einkaufen. Der nahegelegene Retro-Supermarkt besitzt nur eine Balkenwaage zum Abwiegen von Obst. Der Inhaber des Supermarktes behauptet, dass es möglich ist, mit dieser Waage alle ganzzahligen Mengen von 1 kg bis 40 kg abzuwiegen. Was ist die minimale Anzahl an Gewichten, die der Inhaber des Supermarktes besitzt?

Hinweis: Die Gewichte können auf beide Seiten der Waage gelegt werden.

Ergebnis: 4

Lösung: Nützt man die Waage, so hat jedes der Gewichte drei mögliche Positionen: links, rechts, nicht auf der Waage. Würde der Inhaber des Supermarktes nur 3 Gewichte besitzen, so gäbe es $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27$ mögliche Anordnungen der Gewichte. Es wäre also nicht möglich, alle Mengen von 1 kg bis 40 kg genau abzuwiegen.
Durch geschicktes Probieren findet man die vier Gewichte 1 kg, 3 kg, 9 kg und 27 kg, mit denen es tatsächlich möglich ist, alle gewünschten Mengen abzuwiegen. Die nachfolgende Tabelle, zeigt die ersten Lösungen.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
links	1	3	3	1, 3	9	9	1, 9	9	9	1, 9	3, 9	3, 9	1, 3, 9	27	27	...
rechts		1			1, 3	3	3	1			1			1, 3, 9	3, 9	...

Rufe mit Hilfe des QR-Codes unsere Website auf. Dort findest du eine Anleitung, wie du deine Lösungen abgeben kannst. Jeden Monat gibt es neue Aufgaben, bei denen du Punkte sammeln kannst

JOHANNES KEPLER UNIVERSITÄT LINZ

INDUSTRIELLENVEREINIGUNG OBERÖSTERREICH