Lösungen des Monats - Jänner 2024

Kategorie: Minimathik
7./8. Schulstufe

Aufgabe 1: Verdeckter Spieleabend
Bei einem winterlichen Spieleabend liegen 3 klassische Würfel direkt hintereinander auf einem Tisch. Betrachtet man sie von vorn, sieht man eine 1 auf dem ersten Würfel. Betrachtet man sie von oben, sieht man eine 2 auf dem ersten, eine 3 auf dem zweiten und eine 4 auf dem dritten Würfel. Betrachtet man sie von hinten, sieht man eine 5. Was ist die Summe der Seiten, die vom Tisch oder von einem anderem Würfel verdeckt werden?

Ergebnis: 27

Lösung: Gegenüberliegende Seiten bei einem Würfel ergeben in Summe immer sieben. Damit sind die Seiten, die dem Tisch zugewandt sind 5, 4 und 3. Die Rückseite des ersten Würfels ist 6 und die Vorderseite des dritten ist 2. Die seitlichen Flächen des mittleren Würfels addieren sich zu 7 auf. Somit erhält man $5 + 4 + 3 + 6 + 2 + 7 = 27$.

Aufgabe 2: Zeitloses Schlittenrennen
Eine Klasse mit 25 Kindern macht ein Schlittenrennen. Bei einem Durchgang dürfen 5 Kinder gleichzeitig gegeneinander antreten. Es ist leider keine Stoppuhr vorhanden, um die genauen Zeiten zu bestimmen. Tritt ein Kind öfters an, so ist es jedes Mal gleich schnell. Spannenderweise sind zwei Kinder immer unterschiedlich schnell. Was ist die kleinste Anzahl an Durchgängen, die durchgeführt werden müssen, um die schnellsten 3 Schlittenfahrer:innen zu bestimmen?

Ergebnis: 7

Lösung: Zunächst teilt man die Kinder in 5 Gruppen und lässt diese jeweils intern gegeneinander antreten. Die Gruppen werden mit a, b, c, d und e bezeichnet und die Kinder nach der Reihenfolge beim Durchgang nummeriert.

a_1	b_1	c_1	d_1	e_1
a_2	b_2	c_2	d_2	e_2
a_3	b_3	c_3	d_3	e_3
a_4	b_4	c_4	d_4	e_4
a_5	b_5	c_5	d_5	e_5

Rufe mit Hilfe des QR-Codes unsere Website auf. Dort findest du eine Anleitung, wie du deine Lösungen abgeben kannst. Jeden Monat gibt es neue Aufgaben, bei denen du Punkte sammeln kannst

JOHANNES KEPLER UNIVERSITÄT LINZ

INDUSTRIELLENVEREINIGUNG OBERÖSTERREICH

Das heißt, in der Gruppe a ist a_1 am schnellsten, a_2 am zweitschnellsten und so weiter.
Für den ersten Platz kommen somit nur noch a_1, b_1, c_1, d_1 und e_1 infrage. Also treten diese im nächsten Durchgang an. Wir nehmen an, dass a_1 am schnellsten, b_1 am zweitschnellsten und c_1 am drittschnellsten sind. Damit belegt a_1 den ersten Platz.
Für den zweiten und dritten Platz kommen dann nur mehr a_2, a_3, b_1, b_2 und c_1 infrage, da bei allen anderen Kindern mindestens 2 Kinder bereits besser waren. Diese fünf Kinder treten gegeneinander an und damit sind der zweite und dritte Platz fixiert. Es haben somit 7 Durchgänge ausgereicht.

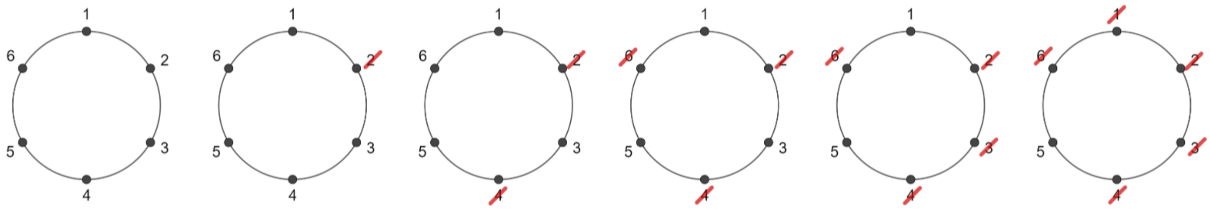
Nun zeigen wir noch, dass 6 Durchgänge nicht ausreichen können, um die schnellsten 3 Kinder zu bestimmen. Will man nur den ersten Platz bestimmen, so scheiden bei jedem Durchgang 4 Kinder aus. Damit 24 der 25 Kinder ausscheiden, werden $\frac{24}{4} = 6$ Durchgänge benötigt. Um Platz zwei und drei zu bestimmen, sind daher mehr als 6 Durchgänge notwendig.

Somit ist die kleinste Anzahl an Durchgängen 7.

Aufgabe 3: Alternierende Silvesterparty

Bei der großen Silvesterparty sitzen 127 Personen rund um einen riesigen Tisch. Im Laufe der Nacht verlässt nacheinander jede zweite Person den Tisch, bis nur noch eine Person übrig bleibt. Die wievielte Person bleibt am längsten?

Hinweise: Wären es sechs Personen, würde die fünfte Person am längsten bleiben, wie folgende Abbildung zeigt:



Ergebnis: 127

Lösung: Diese Aufgabe kann klarerweise graphisch gelöst werden, in dem man die 127 Zahlen aufschreibt und schrittweise vorgeht.

Wir zeigen hier eine allgemeinere Lösung:
Betrachten wir zunächst den Fall, dass 2^n Personen mit $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2$ um den Tisch sitzen. In der ersten Runde werden alle geraden Zahlen gestrichen Es bleiben dann genau 2^{n-1} Personen übrig und es wird wieder bei 1 gestartet. Dies wird solange wiederholt, bis nur mehr die erste Person übrig bleibt.

Haben wir nun $2^n + \ell$ Personen, wollen wir diesen Fall auf den vorherigen zurückführen. Dazu streichen wir die ℓ Personen $2, 4, 6, ..., 2\ell$. Die Person danach ist dann unsere neue erste Person mit 2^n Personen am Tisch und wird deswegen übrig bleiben.

Für die konkrete Aufgabe gehen wir daher so vor: 127 ist gleich $2^6 + 63$. Wir streichen also die 63 Personen $2, 4, 6, ..., 126$. Die letzte Zahl, die gestrichen wird, ist 126. Die 127. Person bleibt also am Schluss übrig.