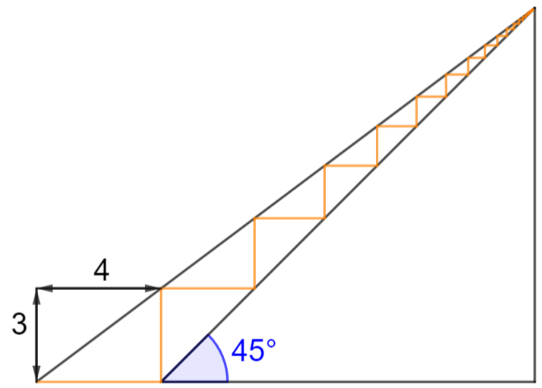
# Lösungen des Monats - März 2024

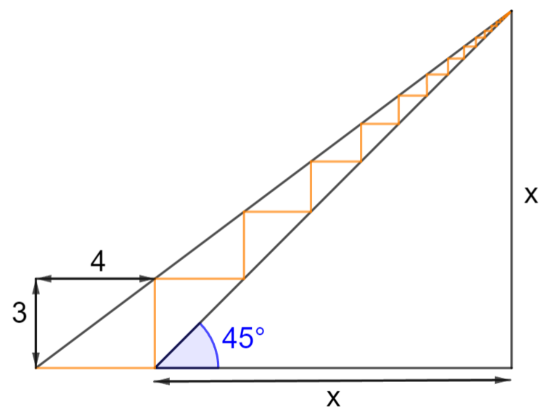
## Kategorie: Miximathik

**Aufgabe 1: Super Bowl in Mathedonien**
Das neue Super Bowl Stadion in Mathedonien soll eine Tribüne mit unendlich vielen Sitzstufen bekommen. Im Bauplan sind diese Stufen orange eingezeichnet. Berechne die Länge der orangen Zickzacklinie.




*Ergebnis:* 28

*Lösung:* Die Länge der Sitzstufen ist gleich der Längen der Katheten des großen Dreiecks. Das kleinere Dreieck hat einen Winkel mit 45°, daher sind die Seitenlängen gleich und werden mit $x$ bezeichnet.




Die Seiten des größeren Dreiecks sind im Verhältnis 3 : 4. Somit gilt

$$3 : 4 = x : 4 + x$$

und man erhält:

$$x = 12$$

Die Längen der Katheten sind daher $(4 + 12) + 12 = 28$.

*Rufen Sie mit Hilfe des QR-Codes unsere Website auf. Dort finden Sie eine Anleitung, wie Sie ihre Lösungen abgeben können. Jeden Monat gibt es neue Aufgaben, bei denen Sie Punkte sammeln können.*

**Aufgabe 2: Kopfrechnen der Superbowlative (AdM 2024/03)**
In der Werbepause des Superbowls wird für die mathebegeisterten Fans folgendes Rätsel eingeblendet. Wie lautet die Einerziffer folgender Zahl?

$$n = 2^{2024} + 3^{20^{24}} + 5^{20^{24}}$$

*Ergebnis:* 2

*Lösung:* Betrachen wir die 2er Potenzen

$$2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, 2^5 = 32, 2^6 = 64, 2^7 = 128, 2^8 = 256, \ldots$$

so enden diese immer auf 2, 4, 8, 6 und danach wiederholen sich diese 4 Ziffern immer wieder. Um herauszufinden welcher Kandidat der richtige ist, teilen wir 2024 durch 4. 2024 lässt sich genau durch 4 teilen. Also ist 2024 eine „vierte" Zahl, daher muss die Einerziffer von $2^{2024}$ gleich 6 sein.

Bei den 3er Potenzen

$$3^1 = 3, 3^2 = 9, 3^3 = 27, 3^4 = 81, 3^5 = 243, \ldots$$

wiederholen sich die 4 Ziffern 3, 9, 7 und 1. Da $20^{24}$ durch 4 teilbar ist muss die Einerziffer von $3^{20^{24}}$ analog zu oben gleich 1 sein.

Die 5er Potenzen

$$5^1 = 5, 5^2 = 25, 5^3 = 125, 5^4 = 625, \ldots$$

hingegen enden immer auf 5.

Nun können wir die Einerziffern der Summanden addieren und erhalten

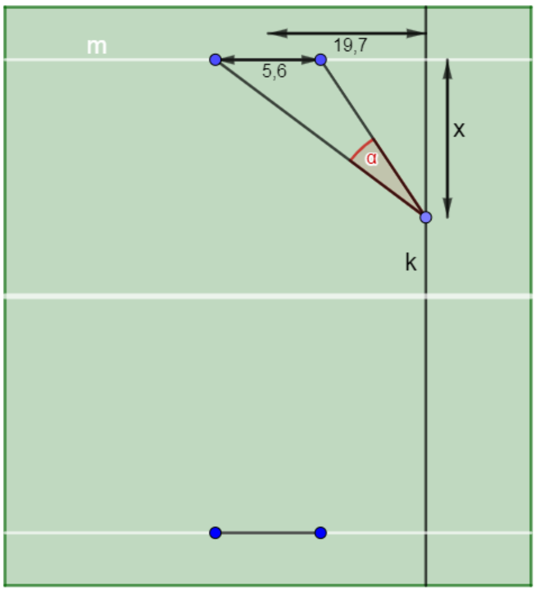
$$6 + 1 + 5 = 12$$

Dessen Einerziffer wiederum ist 2.

**Aufgabe 3: American Rugby mit Saylor Twift (AdM 2024/03)**

Nach der Super Bowl 2024 beschäftigt sich Saylor Twift mit der Sportart Rugby. Hier kann man Punkte erzielen, indem man den Ball über eine Linie $m$ bringt. Dies nennt man Versuch. Nach einem Versuch legt die angreifende Mannschaft den Ball auf einen beliebigen Punkt auf der gedachten Linie $k$ parallel zur Seitenlinie durch den Punkt an dem der Versuch erzielt wurde. Von dort aus tritt ein Spieler den Ball, um ihn zwischen Stangen zu schießen. Dies ist leichter, wenn der Winkel zu den Stangen möglichst groß ist. Die Stangen sind dabei 5,6 m voneinander entfernt.
In einem Spiel wurde ein Versuch, 19,7 m entfernt von der Mitte der beiden Stangen, erzielt. Wo soll der Ball platziert werden, um am leichtesten zwischen die zwei Stangen treffen zu können? Bestimme dazu $x$ (in m) in folgender (nicht maßstabtreuer) Skizze!

*Bemerkung:* Wir gehen davon aus, dass der Spieler weit und hoch genug schießen kann.

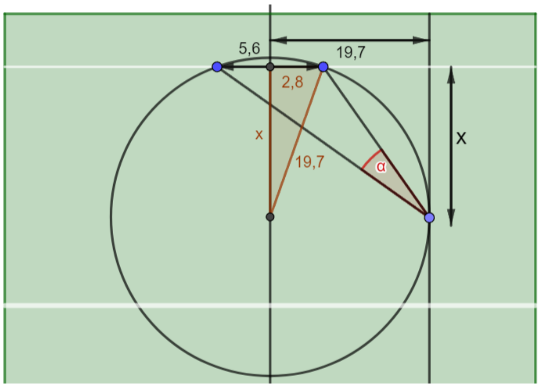



*Rufen Sie mit Hilfe des QR-Codes unsere Website auf. Dort finden Sie eine Anleitung, wie Sie ihre Lösungen abgeben können. Jeden Monat gibt es neue Aufgaben, bei denen Sie Punkte sammeln können.*

*Ergebnis:* 19,5

*Lösung:* Um dieses Beispiel zu lösen, verwenden wir den Peripheriewinkelsatz. Dieser besagt folgendes: Man hat ein Dreieck $ABC$, dessen Umkreis Radius $r$ hat. Verschiebt man einen Eckpunkt (wir wählen beispielhaft $A$) entlang des Umkreises, so bleibt der Innenwinkel $\alpha$ bei $A$ gleich, solange man mit $A$ keinen anderen Eckpunkt ($B$ oder $C$) überquert. Ist $A$ auf dem längeren Teil des von $B$ und $C$ geteilten Umkreises so gilt: Um so größer das Verhältnis $|\overline{BC}|/r$ ist, umso größer ist auch der Innenwinkel $\alpha$.

Konkret auf die Aufgabe angewandt sind $B$ und $C$ die zwei Stangen und $A$ ist der Punkt an dem der Ball platziert werden soll. Um nun einen möglichst großen Winkel $\alpha$ zu erhalten, soll $|\overline{BC}|/r$ möglichst groß werden. Aus der Angabe wissen wir, dass $|\overline{BC}| = 5{,}6\,\text{m}$ fix ist. Die einzig andere Möglichkeit, das Verhältnis zu vergrößern, ist $A$ so zu platzieren, dass der Umkreis mit Radius $r$ möglichst klein wird. Den kleinsten Umkreis erhalten wir wiederum, wenn der Umkreis die Gerade auf der $A$ liegen soll nur tangiert.
In diesem Fall muss der Radius $r$ also $19{,}7\,\text{m}$ sein und der Mittelpunkt des Umkreises ist genau $x$ weit von der Mitte der Stangen entfernt. Wie in der Skizze zu sehen ist, ergibt sich ein rechtwinkliges Dreieck. Mithilfe des Satzes von Pythagoras erhält man:




$$x = \sqrt{19{,}7^2 - 2{,}8^2} = 19{,}5\,\text{m}$$

*Bemerkung:* Alternativ kann die Lösung auch näherungsweise und konstruktiv mittels GeoGebra und Schiebereglern ermittelt werden.