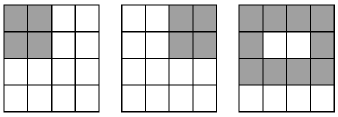
Lösungen des Monats - März 2022

Kategorie: Maximathik

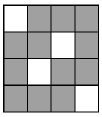
9./10. Schulstufe

Aufgabe. (4x4) Wie viele Möglichkeiten gibt es, in einem 4×4 Gitter Kästchen grau einzufärben, sodass jedes eingefärbte Kästchen waagrecht und/oder senkrecht an exakt zwei weitere graue Kästchen grenzt?

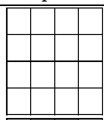
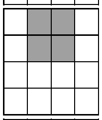
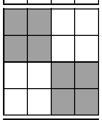
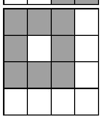
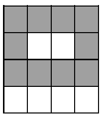
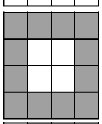
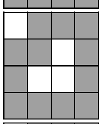
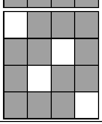
Hier findest du schon drei mögliche Lösungen:



Lösung. (4x4) Da jedes eingefärbte Kästchen an exakt 2 weitere eingefärbte Kästchen grenzt, müssen Gruppen an eingefärbten Kästchen jeweils eine Schlaufe ergeben. Beispiel:



Die kleinst mögliche Schlaufe ist eine eingefärbtes 2×2 Feld. Gibt es mehr als eine Schlaufe so dürfen sich diese nicht berühren. Mit diesen Informationen lassen sich nun alle Möglichkeiten relativ leicht zählen:

Schlaufen:	Beispiel	Anzahl der Positionen
keine		1
eine 2×2		9
zwei 2×2		2
3×3		4
3×4		4
4×4		1
4×4 ein Eck eingedrückt		4
4×4 zwei Ecken eingedrückt		2
Summe:		27

Wenn kein Feld eingefärbt ist (erste Möglichkeit) stimmt die Aussage: „Jedes eingefärbte Kästchen grenzt an exakt zwei weitere graue Kästchen“. Das wird ersichtlich, wenn wir die Verneinung der Aussage betrachten: „Nicht jedes eingefärbte Kästchen grenzt an exakt zwei weitere graue Kästchen“, was wir auch anders sagen können: „Es gibt zumindest ein eingefärbtes Kästchen, das nicht an exakt zwei weitere graue Kästchen grenzt“. Da es nicht einmal ein eingefärbtes Kästchen gibt, kann es auch kein eingefärbtes Kästchen geben, das nicht an exakt zwei weitere graue Kästchen grenzt. Somit ist die Verneinung falsch und die ursprüngliche Aussage richtig.

Aufgabe. (Buchstabensuppe) Benjamin stellt mit Hilfe seiner Buchstabensuppe ein riesiges Gleichungssystem auf.

$$\begin{aligned} a &= -b+c-d+\cdots-z \\ b &= a+1 \\ c &= b+1 \\ &\vdots \\ z &= y+1 \end{aligned}$$

Nun würde Benjamin natürlich gerne die Lösung herausfinden. Gib ihm einem Tipp indem du z berechnest.

Lösung. (Buchstabensuppe) Durch einsetzen von $b=a+1$ in die Gleichung $c=b+1$ erhält man $c=a+2$. Nun kann man weiter in $d=c+1$ einsetzen und erhält $d=a+3$. Usw. bis $z=a+25$.

Jetzt können wir in die erste Gleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} a &= -b+c-d+\cdots-z \\ a &= -(a+1)+(a+2)-(a+3)+\cdots-(a+25) \\ a &= \underbrace{-a-1+a+2}_{=1}\underbrace{-a-3+a+4}_{=1}-\cdots-a-25 \\ a &= 12-a-25 \\ 2a &= -13 \\ a &= -6.5 \end{aligned}$$

Jetzt können wir z berechnen:

$$\begin{aligned} z &= a+25 \\ z &= -6.5+25=18.5 \end{aligned}$$

Aufgabe. (2022te Stelle) Eine 2022-stellige Zahl besteht aus Ziffern, die paarweise mit ihrer benachbarten Ziffer immer ein Vielfaches von 13 oder 47 sind. Die letzte Stelle der Zahl ist 7. Wie lautet die Ziffer der ersten Stelle?

Lösung. (2022te Stelle) Die zweistelligen Vielfachen von 13 sind $13, 26, 39, 52, 65, 78$ und 91. Die zweistelligen Vielfachen von 47 sind 47 und 94. Bei den Vielfachen kommt keine Einerstelle doppelt vor. Daher ist es immer eindeutig, welche Ziffer die nachfolgende in der Zahl sein muss, um die Regel zu erfüllen. Da die Zahl auf 7 endet, müssen die letzten Stellen $\cdots 7 \Rightarrow \cdots 47 \Rightarrow \cdots 947 \Rightarrow \cdots 13913913947$ lauten. Vor 47 kommt eine Periode von 139. Abzüglich der beiden letzten Stellen bleiben also 2020 Ziffern übrig, für die sich 673 ganze Periodendurchläufe $(673+1=2020)$ ausgehen. Dann bleibt noch genau eine Stelle übrig. Der Anfang der Zahl ist also $x139139139\cdots$. Somit ist die erste Stelle der 2022-stelligen Zahl 9.

Rufe mit Hilfe des QR-Codes unsere Website auf. Dort kannst du deine Lösungen abgeben, Punkte sammeln und jeden Monat neue Aufgaben finden!

JOHANNES KEPLER UNIVERSITÄT LINZ

INDUSTRIELLENVEREINIGUNG OBERÖSTERREICH