Lösungen des Monats - April 2023

Kategorie: Maximathik
9./10. Schulstufe

Aufgabe 1: Eierunfall
Bibi und Tina sind mit einem Korb voller roher Eier unterwegs zum Markt. Plötzlich kommt ihnen Karla auf dem Fahrrad entgegen, sie können einander nicht mehr ausweichen und stoßen zusammen. Alle Eier fallen auf den Boden und zerbrechen. Karla möchte den Schaden wieder gut machen und fragt, wie viele Eier es denn waren. Bibi und Tina schauen sich ratlos an und zucken mit den Schultern. Bibi sagt: „Das wissen wir gar nicht. Aber beim Verpacken in 4er-Schachteln, 6er-Schachteln oder 10er-Schachteln blieb uns immer 1 Ei übrig. Wir haben noch gelacht, weil es sich ausgegangen wäre, wenn wir 7er-Schachteln gehabt hätten.“ Tina ergänzt: „Mehr als 700 Eier waren es nicht.“
Mit wie vielen Eiern waren Bibi und Tina zum Markt unterwegs?

Ergebnis: 301

Lösung: Die Anzahl der Eier lässt bei Division durch 4, 6 und 10 den Rest 1. Da das $\text{kgV}(4,6,10) = 60$, suchen wir ein Vielfaches von 7, das um 1 größer ist als ein Vielfaches von 60. Es muss also Faktoren n und m geben, so dass

$$7n = 60m + 1$$

$60m + 1$ soll also auch ein Vielfaches von 7 sein. Eine sinnvolle Zerlegung davon ist:

$$7n = 56m + 4m + 1$$

Da $56m$ ein Vielfaches von 7 ist, muss auch der Rest der rechten Seite ein Vielfaches von 7 sein.

$$7(n - 8m) = 4m + 1$$

$4m + 1$ muss ein Vielfaches von 7 sein. Durch Ausprobieren findet man $m = 5$, $m = 12$, $m = 19$,...
Für $m = 5$ ergeben sich $60 \cdot 5 + 1 = 301$ Eier.
Die nächstgrößere mögliche Antwort mit $m = 12$ wären 721 Eier, aber so viele Eier waren es nicht.

Aufgabe 2: Ostereier testen
Aufgrund zahlreicher zerbrochener Eier in den letzten Jahren wird nun die Osterhasenverkehrsordnung angepasst. Es soll eine Begrenzung der maximalen Hoppelhöhe für im Eiertransport tätige Osterhasen eingeführt werden.
Durch einige Versuche wollen die Osterhasen nun die Höhe ermitteln, aus der Ostereier fallen müssen, um zu zerbrechen. Dazu haben sie zwei Ostereier sowie eine 15-stufig höhenverstellbare Versuchsanordnung zur Verfügung. Bei einem Versuch lassen die Osterhasen ein Ei aus einer bestimmten Höhe fallen. Bleibt das Ei unbeschadet, können sie dieses für weitere Versuche verwenden.
Die Osterhasen wollen nun die kleinste Höheneinstellung bestimmen, bei der die Ostereier zerbrechen. Was ist die kleinste Anzahl an höchstens notwendigen Versuchen, die die Osterhasen mit der richtigen Strategie erreichen können?

Bemerkung: Eine besonders schlechte Strategie wäre, die Stufen der Reihe nach von unten nach oben durchzuprobieren. Dabei wäre die Anzahl der höchstens notwendigen Versuche 15.

Ergebnis: 5

Lösung: Wir nummerieren die Höheneinstellungen von unten nach oben mit den Zahlen 1 bis 15. Jeder Versuch endet in einem von 2 Ergebnissen, das Ei zerbricht oder es zerbricht nicht.

Lösungsstrategie mit 5 Versuchen:

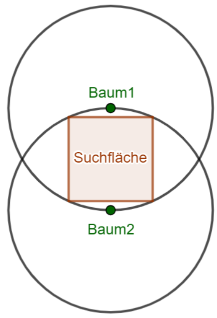
- Erster Versuch mit Einstellung 5. Zerbricht das Ei, so bleiben 4 Versuche um die übersprungenen 3 Einstellungen (1, 2, 3 und 4) von unten nach oben zu überprüfen.
- Zerbricht das Ei nicht, so ist der nächste Versuch mit Einstellung 9. Zerbricht das Ei, so bleiben 3 Versuche um die übersprungenen 3 Einstellungen (6, 7 und 8) zu überprüfen.
- Zerbricht das Ei nicht, so ist der nächste Versuch mit Einstellung 12. Zerbricht das Ei, so bleiben 2 Versuche um die übersprungenen 2 Einstellungen (10 und 11) zu überprüfen.
- Zerbricht das Ei nicht, so ist der nächste Versuch mit Einstellung 14. Zerbricht das Ei, so kann man mit den letzten Versuch die Einstellung 13 prüfen.
- Zerbricht das Ei nicht, so kann man mit dem letzten Versuch die Einstellung 15 prüfen.

Lösungsstrategie mit 4 Versuchen:
Es ist nicht möglich, die Höhe nach nur 4 Versuchen zu finden. Nach jedem Versuch wird eine von zwei Höhen getestet. Das heißt, bei einer Strategie mit 4 Versuchen können sicher nicht mehr als $1+2+4+8=15$ Stockwerke überprüft werden. In der Tat sind es sogar noch weniger, da hier zum Beispiel auch die Möglichkeit gezählt wurde, wo bei den ersten drei Versuchen jeweils die Eier brechen. So viele Eier haben die Osterhasen jedoch nicht zur Verfügung.

Damit ist gezeigt, dass 5 die kleinste Anzahl ist, die man garantieren kann.

Aufgabe 3: Ostereier suchen

Sophie sucht Ostereier in ihrem Garten. Im Garten stehen zwei große Bäume, die 10 Meter voneinander entfernt sind. Von ihren Eltern bekommt sie folgende Hinweise für die Suche:

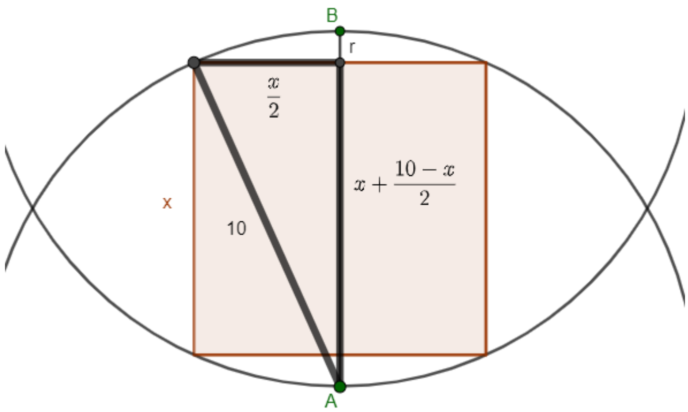


- Die Eier sind höchstens 10 Meter von beiden Bäumen entfernt.
- Die Fläche, die sie absuchen muss, ist quadratisch.

Wie groß ist die eingezeichnete größtmögliche Fläche in Quadratmeter, die Sophie absuchen muss?

Ergebnis: 67,71

Lösung: Da die Eier höchstens 10 Meter von beiden Bäumen entfernt sind, ergibt sich für die Suchfläche die Schnittmenge von zwei Kreisen. Der Mittelpunkt eines Kreises liegt dabei auf dem Kreisrand des jeweiligen anderen Kreises, da die Bäume 10 Meter voneinander entfernt sind. Das größtmögliche Quadrat in dieser Schnittfläche ist eindeutig bestimmt als das Quadrat, dessen Eckpunkte wie in der Skizze auf den Kreisen liegen.



Man bezeichne die Seitenlänge des Quadrates mit x und die beiden Bäume mit A bzw. B. Wir betrachten das Dreieck, das in der Abbildung eingezeichnet ist. Die Hypthenuse ist 10, da diese dem Radius des Kreise entspricht. Eine Kathete ist die Hälfte des Quadrates also $\frac{x}{2}$. Der Abstand zwischen A und B setzt sich zusammen aus x und zwei Streckenabschnitten, die wir mit r bezeichnen. r erhält man, wenn man x von der Gesamtlänge 10 subtrahiert und durch 2 dividiert. Die zweite Kathete ist somit $x + r = x + \frac{10-x}{2}$.
Mit dem Satz von Pythagoras erhält man dann folgende Gleichung:

$$10^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{10-x}{2}\right)^2$$

Vereinfacht:

$$0 = x^2 + 10x - 150$$

Mit der positiven Lösung $x = -5 + \sqrt{175}$ ist der Flächeninhalt des Quadrates dann $67{,}71\,\mathrm{m}^2$.

Rufe mit Hilfe des QR-Codes unsere Website auf. Dort findest du eine Anleitung, wie du deine Lösungen abgeben kannst. Jeden Monat gibt es neue Aufgaben, bei denen du Punkte sammeln kannst