

Lösungen des Monats - Mai 2023

Kategorie: Maximathik
9./10. Schulstufe

Aufgabe 1: Lichtschalter ein- und ausschalten

In einem Gang im Museum für Mathematik sind 100 Lichtschalter hintereinander angeordnet, die mit jeweils einer Glühbirne verbunden sind. Alle Lampen sind zu Beginn ausgeschaltet. Nun gehen der Reihe nach 100 Personen durch, von denen die erste alle Schalter betätigt, die zweite jeden zweiten Schalter, die dritte jeden dritten Schalter usw. Die hundertste Person betätigt nur mehr den 100. Schalter, also den letzten. Wie viele Lampen brennen am Schluss?

Ergebnis: 10

Lösung: Betrachten wir beispielsweise die 15-te Lampe, dann wird deren Lichtschalter von der 1-ten, 3-ten, 5-ten und 15-ten Person betätigt. Daher ist diese Lampe am Ende ausgeschaltet.

Betrachten wir hingegen die 16-te Lampe, dann wird deren Lichtschalter von der 1-ten, 2-ten, 4-ten, 8-ten und 16-ten Person betätigt. Daher ist diese Lampe am Ende eingeschaltet.

Betrachten wir nun allgemein die n -te Lampe und die k -te Person. Dann ändert die n -te Lampe ihren Zustand genau dann, wenn n von k geteilt wird. Damit eine Lampe am Schluss brennt, muss n eine ungerade Anzahl an Teilern haben. Dies gilt nur für Quadratzahlen, also 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100. Daher brennen am Schluss 10 Lampen.

Aufgabe 2: Wahrheit oder Lüge

Bei der Geburtstagsparty einer Mathematikerin sitzen n Personen an einem großen runden Tisch. Es gilt stets, dass die zwei Sitznachbarn einer Person entweder beide immer lügen oder beide immer die Wahrheit sagen. Es werden folgende Aussagen von den Personen A, B, C, D, E und F getroffen:

A: „Die Anzahl an Personen ist durch 5 teilbar“

B: „Die Anzahl an Personen ist durch 6 teilbar“

C: „Wir sind eine ungerade Anzahl an Personen“

D: „Wir sind nicht weniger als 24 Personen“

E: „C ist ein Lügner. Wir sind mindestens 15 Personen“

F: „D sagt die Wahrheit. Wir sind 30 Personen.“

Zusätzlich ist bekannt, dass B neben C sitzt und D neben E sitzt. Wie viele Personen sitzen an dem Tisch?

Ergebnis: 18

Lösung: Wir wissen, dass die Sitznachbarn einer Person immer beide lügen oder beide die Wahrheit sagen.

Erste Möglichkeit: Angenommen alle sagen die Wahrheit. E sagt die Wahrheit also muss C ein Lügner sein. Das ist ein Widerspruch, was wiederum bedeutet, dass die Annahme nicht stimmt.

Rufe mit Hilfe des QR-Codes unsere Website auf. Dort findest du eine Anleitung, wie du deine Lösungen abgeben kannst. Jeden Monat gibt es neue Aufgaben, bei denen du Punkte sammeln kannst



Zweite Möglichkeit: Angenommen alle lügen. E lügt also muss C die Wahrheit sagen. Das ist ein Widerspruch, was wiederum bedeutet, dass die Annahme nicht stimmt.

Daraus können wir schließen, dass es sowohl Lügner als auch Ehrliche geben muss. Das ist nur möglich wenn Lügner und Ehrliche immer abwechselnd am Tisch sitzen. Daraus können wir weiter schließen, dass es sich um eine gerade Anzahl an Personen handeln muss. Somit wissen wir: C lügt.

B sitzt neben C und muss daher die Wahrheit sagen. E behauptet C ist ein Lügner. Da Lügner immer lügen und Ehrliche immer die Wahrheit sagen, wissen wir also auch, dass E die Wahrheit sagt. D sitzt neben E also muss D lügen. Kombiniert man nun alle wahren Aussagen und die Gegensätze der Lügen, so erhält man die folgenden Voraussetzungen an die gesuchte Zahl:

- Sie ist durch 6 teilbar.
- Sie ist gerade.
- Sie ist kleiner als 24.
- Sie ist größer gleich 15.

18 ist die einzige Zahl mit all diesen Eigenschaften. Also sitzen 18 Personen an dem Tisch.

Aufgabe 3: Garten mähen

Andreas hat einen Plan seines kreisrunden Grundstücks (Mittelpunkt M_G) erstellt. Darauf sieht man sein quadratisches Haus mit der Seitenlänge 10 m und seinen kreisförmigen Pool (Mittelpunkt M_P). Er fragt sich, wie groß seine Rasenfläche eigentlich ist. Beim Rasenmähen geht Andreas eine Strecke ab, die einerseits tangential zum Pool und andererseits parallel zur Geraden durch M_G und M_P verläuft. Er stellt fest, dass die gegangene Strecke 24 m lang ist. Wie viele Quadratmeter Rasen muss Andreas mähen?

Ergebnis: 352,39

Lösung:

Sei R der Radius des Grundstücks und r der Radius des Pools. Dann lässt sich der Flächeninhalt des Grundstücks ohne den Pool folgendermaßen berechnen:

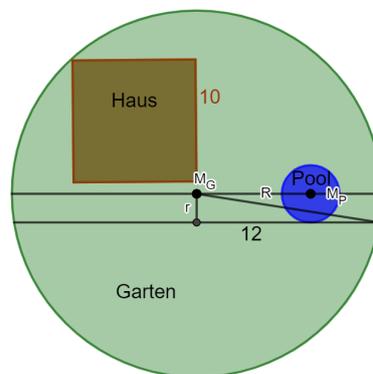
$$R^2\pi - r^2\pi = (R^2 - r^2)\pi$$

$R^2 - r^2$ erhält man mithilfe des Satzes von Pythagoras (siehe Skizze):

$$R^2 - r^2 = 12^2 = 144$$

Somit ist die Fläche des Gartens inklusive Haus gleich 144π und die Rasenfläche beträgt:

$$144\pi - 100 = 352,39 \text{ m}^2$$



Abkürzung: Bei den Aufgaben des Monats ist das Ergebnis stets genau eine Zahl. Es gibt also nur eine Möglichkeit für die Rasenfläche. Das heißt, die Rasenfläche ist unabhängig vom Radius des Pools. Nehmen wir also an, dass der Pool den Radius 0 hat. Dann entspricht die gegangene Strecke dem Durchmesser des Gartens. Und die Rasenfläche beträgt $12^2\pi - 10^2 = 352,39 \text{ m}^2$.

Rufe mit Hilfe des QR-Codes unsere Website auf. Dort findest du eine Anleitung, wie du deine Lösungen abgeben kannst. Jeden Monat gibt es neue Aufgaben, bei denen du Punkte sammeln kannst

