

# Lösungen des Monats - Juni 2023

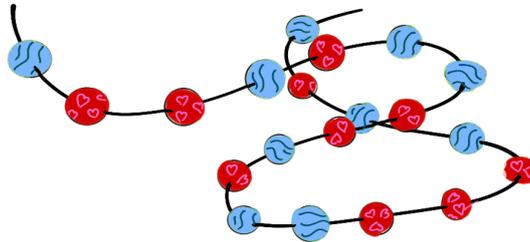
Kategorie: Maximathik  
9./10. Schulstufe

## Aufgabe 1: Schnittige Perlenkette

Carolin hat  $n$  viele rote und  $k$  viele blaue Perlen, wobei  $n$  und  $k$  gerade Zahlen sind. Sie fädelt damit eine Halskette auf. Als alle Perlen aufgebraucht sind, bemerkt Carolin, dass die Kette zu lang geworden ist. Nun will sie die offene Kette mit ihrer Schwester Isabel teilen. Dazu zerschneidet Carolin die Kette in mehrere einzelne Teile, die sie anschließend so miteinander verknötet, dass zwei Ketten entstehen. Isabel will unbedingt gleich viele Perlen wie Carolin haben und dabei soll auch die Anzahl der roten und blauen Perlen jeweils gleich sein.

Was ist die minimale Anzahl an Schnitten, die für eine beliebige Anordnung an Perlen benötigt wird?

Eine mögliche Anordnung der Kette:



Ergebnis: 2

Lösung: Weniger als 2 Schnitte sind nicht möglich. Dies erkennt man, wenn man zum Beispiel die Anordnung betrachtet, bei der zuerst alle roten und dann alle blauen Perlen sind. Es wird ein Schnitt benötigt, um die roten in der Mitte zu teilen und analoges für die blauen.

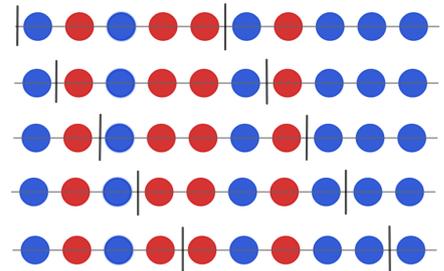


Strategie mit maximal 2 Schnitten:

Wir teilen zunächst die Kette in der Mitte und betrachten das Intervall links von der Mitte. Wenn in diesem  $\frac{n}{2}$  viele rote Perlen sind, reicht ein Schnitt.

Wenn dies nicht der Fall ist, sind auf einer Seite mehr rote Perlen und auf der anderen weniger. Nehmen wir an, im linken Intervall sind mehr rote Perlen. Dann verschieben wir das Intervall einen Schritt nach rechts. Dadurch bleibt entweder die Anzahl der roten Perlen gleich, wird um eins weniger oder um eins mehr. Wenn wir es jedoch oft genug nach rechts verschieben, wird es sicher irgendwann  $\frac{n}{2}$  viele rote Perlen enthalten, da das rechte Intervall weniger als  $\frac{n}{2}$  rote Perlen besitzt.

Damit ist gezeigt, dass maximal 2 Schnitte ausreichen.



Rufe mit Hilfe des QR-Codes unsere Website auf. Dort findest du eine Anleitung, wie du deine Lösungen abgeben kannst. Jeden Monat gibt es neue Aufgaben, bei denen du Punkte sammeln kannst



## Aufgabe 2: Primzahlen-Fanatiker

Max ist nicht nur begeisterter Primzahlen-Fanatiker, sondern auch ein großer Fan von quadratischen Gleichungen. Daher freut er sich sehr, dass bei den Aufgaben des Monats endlich beide Themen in folgender Frage verknüpft werden:

Wie lautet die größte positive ganze Zahl  $n$ , sodass  $n^2 - 8n + 15$  eine Primzahl ist?

*Ergebnis:* 6

*Lösung:*  $n^2 - 8n + 15 = (n - 3)(n - 5)$  kann nur eine Primzahl sein, wenn eine der Klammern gleich  $\pm 1$  ist. Also muss  $n$  gleich 2, 4 oder 6 sein. Die größte dieser Zahlen ist 6 und tatsächlich erhält man damit die Primzahl 3.

## Aufgabe 3: Weit[er]springen

Zu einem Weitsprungwettbewerb wurden insgesamt 50 Mädchen und Buben eingeladen. Leider konnten manche nicht zum Wettbewerb kommen. Wären alle Buben beim Wettbewerb 5,4 cm weiter gehüpft, so wäre die durchschnittliche Sprungweite aller anwesenden TeilnehmerInnen um 2,76 cm gestiegen. Wie viele Mädchen waren beim Wettbewerb?

*Ergebnis:* 22

*Lösung:* Sei  $b$  der prozentuelle Anteil an Buben und  $m$  der prozentuelle Anteil an Mädchen. Dann gilt für die durchschnittlichen Sprungweiten  $d_{ges}$ ,  $d_b$  und  $d_m$ :

$$b \cdot d_b + m \cdot d_m = d_{ges}$$

Die Angabe mit den erhöhten Sprungweiten lässt sich dann folgendermaßen darstellen:

$$b \cdot (d_b + 5,4) + m \cdot d_m = d_{ges} + 2,76$$

Wir ziehen nun die erste Gleichung von der zweiten ab und erhalten:

$$\begin{aligned} b \cdot 5,4 &= 2,76 \\ b &= \frac{2,76}{5,4} = \frac{276}{540} = \frac{276/12}{540/12} = \frac{23}{45} \end{aligned}$$

Wir wissen, dass der Nenner von  $b$  nicht über 50 liegen kann, da sich  $b$  ja aus der Anzahl der Buben und Anzahl der TeilnehmerInnen insgesamt berechnen lässt.  $b = \frac{23}{45}$  lässt sich auch nicht mehr weiter kürzen. Somit wissen wir jetzt, dass von den 45 TeilnehmerInnen 23 Buben waren. Es haben also  $45 - 23 = 22$  Mädchen teilgenommen.

*Rufe mit Hilfe des QR-Codes unsere Website auf. Dort findest du eine Anleitung, wie du deine Lösungen abgeben kannst. Jeden Monat gibt es neue Aufgaben, bei denen du Punkte sammeln kannst*

